한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회논문집, pp. 995~999

일반 경계조건 아치의 자유진동해석

○이 태 은* · 이 종 국* · 이 병 구**

Free Vibration Analysis of Arches With General Boundary Condition

Lee, Tae Eun · Lee, Jong Kook · Lee, Byoung Koo

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of arches with general boundary condition. Based on the dynamic equilibrium equations of a arch element acting the stress resultants and the inertia forces, the governing differential equation is derived for the in-plane free vibration of such arches. Differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies. In numerical examples, the parabolic arch is considered. The effects of the arch rise to span length ratio, the slenderness ratio, the vertical spring coefficient and the rotational spring coefficient on the natural frequencies are analyzed.

1. 서 론

아치는 구조적으로 매우 이상적일 뿐만 아니라 그 미적인 감각 때문에 예부터 교량 등 각종 구조물에 많이 이용되었다. 특히 재료공학의 발달로 인한 강구조물의 경량화는 지간이 긴 아치교의 가설을 가능하게 하여 자연경관과 조화를 이루는 아름다운 아치교가 등장하게 되었다. 아치교에 있어서 아치의 거동에 진동이 미치는 영향은 상당히 크기 때문에 아치구조의 거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요구되고 있다.[1] 아치의 자유진동해석에 관한 연구는 많은 참고문헌들[4-6]에서 찾아볼 수 있지만 대부분이 이론의 전개가 비교적 용이한 원호아치를 연구의 대상으로 하고 있다.

이러한 관점에서 본 연구는 일반적인 경계조건을 갖는 포물선아치의 자유진동특성을 고찰함으로써 아치의 진동에 대한 이론을 확장하고, 나아가서 실제 아치구조물의 설계시 더욱 정확한 자유진동특성을 고려하도록 하는데 본 연구의 목적이 있다.

* 정회원 · 원광대학교 교수

** 정회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

2. 수학적 모형

Fig. 1은 지간길이 l, 아치의 높이 h, $y=y(x)$의 임의선형을 갖는 아치의 기하학적 형상을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 (x, y)는 아치의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며, ρ 및 ϕ는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및 x축과 곡률중심방향이 이루는 각도이며, v, w 및 Ψ는 각각 접선방향 변위, 곡률방향 변위 및 단면 회전각이다. 한편 K_{wa}, K_{wb}는 각각 부재의 좌단과 우단에서의

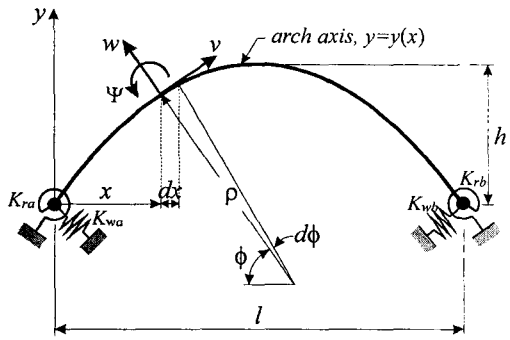

Fig 1. Arch Geometry

수직 스프링상수이며, K_{ra}, K_{rb}는 각각 부재의 좌단과 우단에서의 회전 스프링상수이다.

Fig. 2는 진동시 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로 M, N 및 Q는 휨모멘트, 축방향력 및 전단력이고, P_t, P_r 및 T는 접선방향 관성력, 곡률방향 관성력 및 회전관성우력이다. 부재미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력 사이의 동적 평형방정식을 세우면 다음의 식 (1)~(3)과 같다.

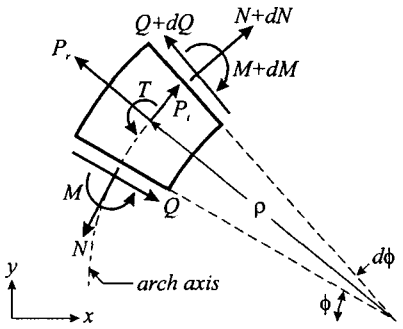

Fig 2. Loads on an arch element

$$\frac{dN}{d\phi}+Q+\rho P_t=0 \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{d\phi}-N+\rho P_r=0 \tag{2}$$

$$\frac{dM}{d\phi}-\rho Q-\rho T=0 \tag{3}$$

축방향력 N, 휨 모멘트 M 및 단면회전각 Ψ는 다음과 같이 나타낼 수 있다.[2]

$$N=\frac{EA}{\rho}\left[(v'+w)+\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right)(w''+w)\right] \tag{4}$$

$$M=-\frac{EAr^2}{\rho^2}(w''+w) \tag{5}$$

$$\Psi=\frac{1}{\rho}(w'-v) \tag{6}$$

여기서 $(')=d/d\phi$이며, E는 탄성계수, A는 단면적, r은 단면회전반경이다.

아치의 진동을 조화진동으로 가정하면 곡률방향 관성력 P_r, 접선방향 관성력 P_t 및 회전관성우력 T는 다음과 같이 나타낼 수 있다.[5]

$$P_r=m\omega^2 w \tag{7}$$

$$P_t=m\omega^2 v \tag{8}$$

$$T=m\omega^2 r^2\Psi=\frac{m\omega^2 r^2}{\rho}(w'-v) \tag{9}$$

여기서 m은 부재재료의 단위길이당 질량이며, ω는 고유각진동수(rad/sec)이다.

식 (4), (5)로부터 $dN/d\phi$와 $dM/d\phi$를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi}=EA\left[\frac{1}{\rho}(v''+w')+\frac{r^2}{\rho^3}(w'''+w')-\frac{\rho'}{\rho^2}(v'-w)-\frac{3r^2\rho'}{\rho^4}(w''+w)\right] \tag{10}$$

$$\frac{dM}{d\phi}=-EAr^2\left[\frac{1}{\rho^2}(w'''+w')-\frac{2\rho'}{\rho^3}(w''+w)\right] \tag{11}$$

식 (9), (11)을 식 (3)에 대입하고 정리하면 전단력 Q는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q=-EAr^2\left[\frac{1}{\rho^3}(w'''+w')-\frac{2\rho'}{\rho^4}(w''-w)\right]-\frac{Rm\omega^2 r^2}{\rho}(w'-v) \tag{12}$$

여기서, R은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표로서 R=1이면 회전관성을 고려하는 경우, R=0이면 회전관성을 무시하는 경우이다.

식 (12)로부터 $dQ/d\phi$를 구하면 다음 식과 같다.

$$\frac{dQ}{d\phi}=-EAr^2\left[\frac{1}{\rho^3}(w''''+w'')-\frac{5\rho'}{\rho^4}(w'''-w')-2\left(\frac{4\rho'^2}{\rho^5}-\frac{\rho''}{\rho^4}\right)(w''+w)\right]-Rm\omega^2 r^2\left[\frac{1}{\rho}(w''-v')-\frac{\rho'}{\rho^2}(w'-v)\right] \tag{13}$$

본 연구에서는 수치해석 과정의 효율성을 높이기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi=\frac{x}{l},\quad \delta=\frac{y}{l},\quad \eta=\frac{w}{l} \tag{14-16}$$

$$\mu=\frac{v}{l},\quad f=\frac{h}{l},\quad \zeta=\frac{\rho}{l},\quad s=\frac{l}{r} \tag{17-20}$$

$$c_i=\omega_i(l^2/r)\sqrt{m/(EA)},\quad i=1,2,3,\cdots \tag{21}$$

$$k_{wa}=\frac{K_{wa}l^3}{EI},\quad k_{wb}=\frac{K_{wb}l^3}{EI} \tag{22, 23}$$

$$k_{ra}=\frac{K_{ra}l}{EI},\quad k_{rb}=\frac{K_{rb}l}{EI} \tag{24, 25}$$

위의 식에서 (ξ, δ)는 무차원 직교좌표계, η, μ, f는 w, v, h를 지간길이 l로 정규화 한 것이고, ζ는 무차원 곡률반경, s는 세장비, c_i는 무차원 고유진동수, i는 모드번호이다. 또한 k_{wa}, k_{wb}는 무차원 수직스프링상수, k_{ra}, k_{rb}는 무차원 회전스프링상수이다.

식 (13), (4) 및 식 (7)을 식 (2)에, 식 (10), (12) 및 식 (8)을 식 (1)에 대입하고, 식 (14)~(21)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음의 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned}\eta'''' = {} & a_1\eta''' + (a_2 + R a_3 s^{-4} c_i^{\,2})\eta'' \\ & + (a_1 - R a_4 s^{-4} c_i^{\,2})\eta' \\ & + (a_5 + a_6 s^{-4} c_i^{\,2})\eta \\ & + (1 - R s^{-4} c_i^{\,2}) a_3 \mu' + R a_4 s^{-4} c_i^{\,2}\mu\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\mu'' = {} & a_7\eta'' + (R s^{-4} c_i^{\,2} - 1)\eta' + a_8\eta \\ & + a_9\mu' + (a_3 - R) s^{-4} c_i^{\,2}\mu\end{aligned} \tag{27}$$

여기서, 미분방정식 식 (26), (27)에 포함된 계수 a_1~a_9는 다음과 같다.

$$a_1 = 5\frac{\zeta'}{\zeta},\quad a_2 = 2\frac{\zeta''}{\zeta} - 8\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - 2 \tag{28.a, 28.b}$$

$$a_3 = -s^2\zeta^2,\quad a_4 = -s^2\zeta\zeta' \tag{28.c, 28.d}$$

$$a_5 = 2\frac{\zeta''}{\zeta} - 8\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - s^2\zeta^2 - 1 \tag{28.e}$$

$$a_6 = s^4\zeta^4,\quad a_7 = \frac{\zeta'}{s^2\zeta^3} \tag{28.f, 28.g}$$

$$a_8 = \frac{\zeta'}{\zeta}\left(1 + \frac{1}{s^2\zeta^2}\right),\quad a_9 = \frac{\zeta'}{\zeta} \tag{28.h, 28.i}$$

식 (14)~(25)의 무차원 변수들을 이용하여 본 연구에서의 경계조건을 유도하면 다음과 같다.

$$\mu = 0,\ \xi = 0 \text{ 에서} \tag{29}$$

$$\eta''' + k_{wa}\eta = 0,\ \xi = 0 \text{ 에서} \tag{30}$$

$$\eta'' - k_{ra}\eta' = 0,\ \xi = 0 \text{ 에서} \tag{31}$$

$$\mu = 0,\ \xi = 1 \text{ 에서} \tag{32}$$

$$\eta''' - k_{wb}\eta = 0,\ \xi = 1 \text{ 에서} \tag{33}$$

$$\eta'' + k_{rb}\eta' = 0,\ \xi = 1 \text{ 에서} \tag{34}$$

3. 형상 함수

앞에서 유도한 무차원 미분방정식 식(26), (27)을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수 a_1~a_9에 포함되어 있는 형상함수 ζ', ζ''이 정의되어야한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. Fig. 1에 주어진 $y=y(x)$의 선형식은 무차원 변수인 식 (14), (15)에 의하여 다음과 같이 무차원 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \tag{35}$$

아치축상 임의점에서 x축과 곡률중심방향이 이루는 각도 ϕ와 곡률 $1/\zeta$은 다음 식들과 같다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{d\delta}{d\xi}\right) \tag{36}$$

$$\frac{1}{\zeta} = \left(\frac{d^2\delta}{d\xi^2}\right)\left[1 - \left(\frac{d\delta}{d\xi}\right)^2\right]^{-3/2} \tag{37}$$

나머지 곡률변화계수 ζ'과 ζ''은 다음 식들로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\phi} \tag{38}$$

$$\zeta'' = \frac{d\zeta'}{d\xi}\frac{d\xi}{d\phi} \tag{39}$$

이상의 식 (35)~(39)를 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화곡률항인 ζ', ζ''을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선부재의 선형으로 포물선형의 곡선부재를 채택하였다.

4. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 유도한 상미분방정식 식 (26), (27)에 경계조건식 식 (29)~(34) 및 형상 함수식 식 (35)~(39)를 대입하면 대상 아치의 무차원 고유진동수 c_i를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법[3]을 이용하였고, 고유치인 c_i값은 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi 법[3]을 이용하여 산출하였다.

수치해석을 실시하기 전에 먼저 Runge-Kutta법에서 단계길이 $\Delta\xi$의 결정을 위하여 수렴해석을 실시하였으며, $1/\Delta\xi$=20 즉 $\Delta\xi$=0.05이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\xi$=200으로 수치해석하였다.

Table 1은 본 연구의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 타 문헌의 무차원 고유진동수값을 비교한 것이다. 비교문헌과 본 연구의 단부조건을 일치시키기 위하여 회전단은 $k_w=1\times10^{20}$, $k_r=1\times10^{-20}$을 적용하고, 고정단은 $k_w=k_r=1\times10^{20}$을 적용하였으며, 표의 하단에 c_i값 계산에 사용한 아치부재의 무차원 변수 값들을 표기하였다. 이 표에서 나타나듯이 본 연구결과와 문헌의 결과는 그 오차가 0.6% 이내로 매우 우수하게 일치하고 있어 본 연구의 이론적, 수치적 해석방법이 모두 타당함을 입증할 수 있었다.

Table 1. Comparison of c_i* between this study and reference

End const-raint	Reference	Natural frequency, c_i			
		i=1	i=2	i=3	i=4
Hinged	This study	26.7	64.7	117.7	183.4
-	Reference[5]	26.6	64.6	117.0	183.0
Hinged	Error(%)**	0.37	0.15	0.59	0.22
Hinged	This study	33.1	74.6	131.8	200.0
-	Reference[5]	33.0	74.4	132.0	200.0
Clamped	Error(%)**	0.30	0.27	0.15	0
Clamped	This study	40.9	85.2	147.0	216.4
-	Reference[5]	40.8	85.0	147.0	216.0
Clamped	Error(%)**	0.24	0.23	0	0.18

* f=0.25, s=200

** Error(%)= $|1-\text{Reference/This study}|\times100$

Fig. 3~6은 아치부재의 변수변화에 따른 연구를 시행하고 이를 그림에 나타낸 것이다. 이 연구에서 채택한 부재의 선형은 앞에서 설명한 바와 같이 포물선형 부재이며, 수치해석에 사용한 스프링상수 및 변수 값들을 그림 상단에 표시하였다. Fig. 3은 무차원 고유진동수와 아치높이 대 지간길이비의 관계를 나타낸 것이다. f값의 변화에 따른 c_i값의 변화는 저차모드보다 고차모드에서 그 영향이 크며, 제 1모드의 경우 f=0.3 이상에서는 무차원 고유진동수에 미치는 영향이 거의 없음을 알 수 있다. 또한 이 그림에서 f값이 증가함에 따라 c_i값은 증가하다가 일정값에 도달하면 감소하게 된다. 따라서 곡선이 정점에 도달했을 때의 아치높이가 최대의 고유진동수값을 갖는 최적형상임을 알 수 있다.

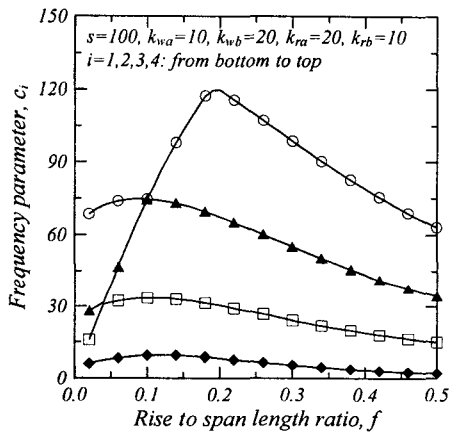

Fig 3. c_i versus f curves

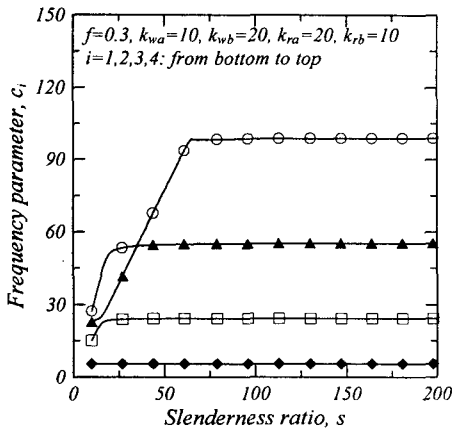

Fig 4. c_i versus s curves

Fig. 4는 무차원 고유진동수와 세장비와의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 세장비가 증가하면 무차원 고유진동수는 항상 증가하며, 세장비가 일정값 이상이 되면 고유진동수에 거의 영향을 미치지 못하고 수렴해감을 알 수 있다. 또한 고차모드보다 저차모드에서 그 영향이 더욱 작게 나타나며, 특히 제 1모드의 경우 세장비는 무차원 고유진동수에 거의 영향을 미치지 못하고, 제 2모드의 경우에도 s=20 정도의 작은 값에서 일정값으로 수렴함을 알 수 있다.

Fig. 5, 6은 무차원 고유진동수와 수직 스프링상수, 무차원 고유진동수와 회전 스프링상수와의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 5에서 회전 스프링상수값과 Fig. 6에서 수직 스프링상수값은 '0'이다. 이 그림들에서 수직 스프링상수 및 회전 스프링상수는 무차원 고유진동수를 증가시키는 요인으로 작용하며, 그 영향은 고차모드보다 저차모드에서 더 크게 작용함을 알 수 있다. 또한 수직 스프링상수와 회전 스프링상수의 증가에 따라 무차원 고유진동수는 일정값으로 수렴하게됨을 알 수 있다.

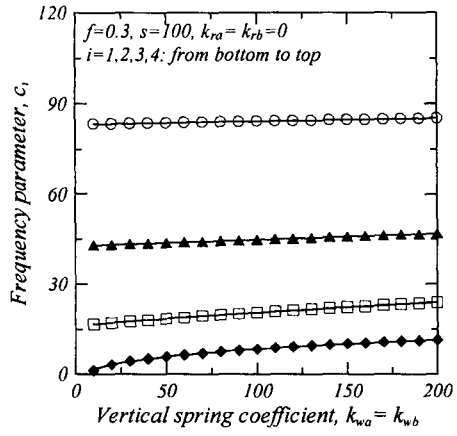

Fig 5. c_i versus k_w curves

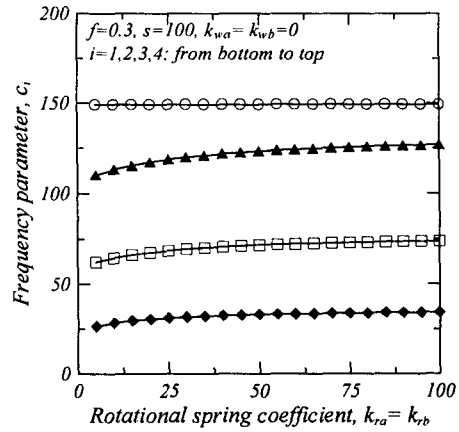

Fig 6. c_i versus k_w curves

5. 결 론

이 논문은 일반적인 경계조건을 갖는 아치의 자유진동해석에 관한 연구이다. 이를 위하여 부재 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적평형 방정식을 이용하여 대상부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 부재의 선형은 포물선형으로 채택하였으며, 수치해석과정의 효율성을 높이기 위하여 미분방정식을 무차원화하였다. 무차원 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 타 문헌과 본 연구의 고유진동수를 서로 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 입증하였으며, 실제의 수치해석 예에서 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 아치부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과는 동하중이 작용하는 경우의 구조공학 및 진동제어 분야에서 그 유용성을 기대할 수 있다.

참고문헌

1. Hikami, Y., 1982, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation," IHI Report, Vol. 6, pp.47-52
2. Borg, S.F. and Gennaro, J.J., 1959, Advanced Structural Analysis, New Jersey: Van Nostrand.
3. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
4. Sakiyama, T., 1986, "Free Vibration of Three-Hinged Arches," Journal of Sound and Vibration, Vol. 111, No. 2, pp.343~348.
5. Lee, B.K. and Wilson, J.F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp.75-89.
6. 오상진, 1997, 변단면 아치의 자유진동에 관한 연구, 원광대학교, 박사학위논문.