

비균질 탄성지반 위에 놓인 곡선보의 자유진동

이 병 구* · ○이 태 은**

Free Vibrations of Curved Beams on Non-homogeneous Elastic Foundation

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of horizontally curved beams supported by non-homogeneous elastic foundation. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing the free vibrations of such beams are derived, in which the linear elastic foundation is considered as the non-homogeneous foundation. Differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies. In numerical examples, the parabolic curved member is considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in tables and figures as the non-dimensional forms.

1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련된 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로 모형화 될 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 터미널 기초 등을 들 수 있다.

최근까지 여러 가지 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 정·동적 거동에 관한 연구⁽¹⁻⁵⁾가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구들에서 다루어지고 있는 대상 구조는 대부분 직선 부재이다. 실제 구조인 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부가 존재하며, 원형 터미널, 유체 저장조 등은 주요 구조물의 기초로서 이용되고 있어 탄성지반 위에 놓인 곡선 보의 거동특성에 대한 활발한 연구가 수행되어 많은 설계자료가 제시되어야 한다.

Laura와 Maurizi⁽¹⁾가 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재에 대한 유용한 연구결과들이 매우 부족한 실정이다. 탄성지반 위에 놓인 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 구조 동역학 분야에서 기초적인 연구일 뿐만 아니라 곡선 보를 이용한 토목구조물의 설계자료를 제공할 수 있는 실질적인 연구이다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler가 제안한 Winkler 지반모형이다. 이 모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 지반 문제들에서 이용되고 있다.

실제의 지반에서 Winkler 지반계수는 균일하지 않으며 즉 비균질 탄성지반이며 따라서 구조물의 거동해석에서 비균질성을 고려하여야 한다.

이와 같은 연구배경으로 본 연구에서는 비균질 탄성지반으로 지지된 수평 곡선보의 면외 자유진동에 대한 수학적 모형을 전개하고, 해석모형으로부터 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 본 연구와 타문헌과의 결과를 비교하여 본

* 정희원 · 원광대학교 교수

** 정희원 · 원광대학교 대학원 박사과정

연구방법의 타당성을 검증하고, 실제적인 공학문제에서 필요한 선형 및 단부조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 지간길이 l , 수평높이 h , $y=y(x)$ 의 임의선형을 갖는 곡선 보의 기하학적 형상을 나타낸다. 이 곡선 보의 비균질 탄성지반으로 전구간이 지지되어 있다. 이 보가 자유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다. 이 그림에서 (x, y) 는 곡선 보의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며, ρ 및 θ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이며, v , Ψ , β 및 ϕ 는 각각 수직방향 변위, 휨에 의한 단면 회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이다. 한편 R_v 와 R_t 는 지반반력 성분으로 각각 단위길이당 수직반력과 비틀림반력이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 단면 회전각 Ψ 와 β 를 수학적 모형에 고려함으로써 지배미분방정식에 회전관성과 전단변형 효과를 포함한다.

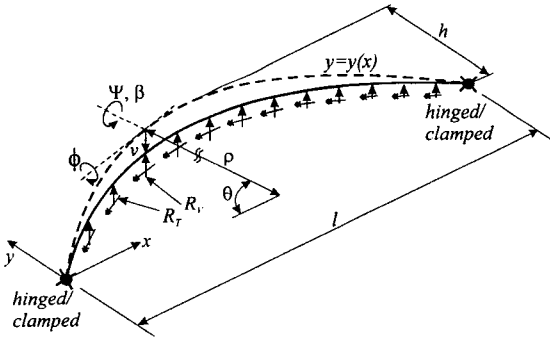


Fig 1. Geometry of curved beam on elastic foundation

Fig. 2는 진동시 부재 미소요소에 작용하는 힘을 나타낸 것으로 M, T 및 Q 는 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고, F_v, C_Ψ 및 C_ϕ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이다. 부재미소요소에 작용하는 합응력과 관성력 및 반력 R_v, R_t 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho R_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi + \rho R_t = 0 \quad (3)$$

여기서 ($'$)은 $d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

부재단면에 발생하는 합응력 M, T 및 Q 는 식 (4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.⁽³⁾

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi') \quad (4)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\Psi + \phi') \quad (5)$$

$$Q = \alpha AG\beta = \alpha AG(\rho^{-1}v' - \Psi) \quad (6)$$

여기서 A 는 단면적, I 와 J 는 부재단면의 단면 2차모멘트 및 비틀림상수, E 와 G 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수, α 는 단면형상에 따른 상수이다.

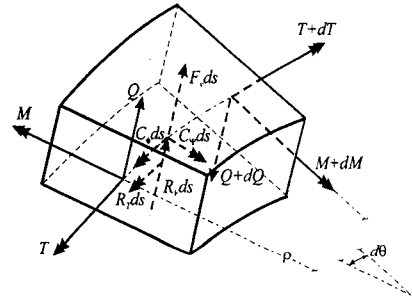


Fig 2. Loads on a beam element

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향관성력 F_v , 회전관성우력 C_Ψ 및 비틀림 관성우력 C_ϕ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -\eta A \omega^2 v \quad (7)$$

$$C_\Psi = -m I \omega^2 \Psi \quad (8)$$

$$C_\phi = -m I_P \omega^2 \phi \quad (9)$$

여기서 m 은 부재재료의 밀도, ω 는 고유각진동수 (rad/sec)이다.

이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식 (6)이 전단변형효과이고, 식 (8)이 회전관성효과이다. 식 (1)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 면의 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있으며, 단위길이당 수직

반력 R_v 와 회전반력 R_r 는 지반모형의 선택에 따라서 결정된다. 본 연구에서는 서론에서 언급한 바와 같이 Winkler 지반모형을 채택하였다.

Fig. 3은 Winkler 지반 위에 놓인 곡선부재의 단면과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로 B 는 지반과 접하는 단면폭, k 는 Winkler 지반계수, r 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

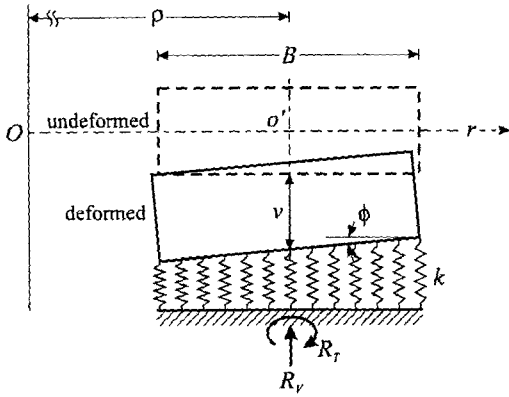


Fig 3. Reaction acting on elastic foundation

부재와 지반이 접하는 면에서 압력과 처짐의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁴⁾

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta) \quad (10)$$

위의 식에서 $p(r, \theta)$ 는 곡선보축상 임의점(θ)의 단면에서 곡률중심방향의 압력변화이고 $z(r, \theta)$ 는 곡선보 단면을 따라 변화하는 면의방향 수직변위이다.

곡선보축상 임의점의 중심축에서 수직방향변위는 v 이고, ϕ 는 미소각이므로 $z(r, \theta)$ 는 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 이용하면 부재와 지반이 접하는 면에서 압력분포를 얻을 수 있으며, 이로부터 곡선부재 중심축에 대한 단위길이당 수직반력 R_v 와 회전반력 R_r 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = kBv \quad (12)$$

$$R_r = (1/12)B^3 k\phi \quad (13)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l \quad (14,15)$$

$$f = h/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (16,17)$$

$$\eta = v/l \quad (18)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (19,20)$$

$$\varepsilon = GJ/(EI), \quad \mu = aG/E \quad (21,22)$$

$$\lambda = kl^5/(\pi^4 EI), \quad b = B/l \quad (23,24)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{mA/(EI)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (25)$$

여기서 (ξ, δ)는 무차원 직교좌표계, f, ζ, η 는 h, ρ, v , 를 지간길이 l 로 정규화한 것으로 f 는 수평높이대 지간길이 비로 정의 한다. s 와 s_p 는 세장비 관련 변수, ε 과 μ 는 강성변수와 전단변수, λ 및 b 는 무차원 Winkler 지반계수 및 접촉면의 폭 비이며, c_i 는 무차원 고유진동수이고 i 는 모드 번호이다.

식 (4), (5), (6)에서 M', T', Q' 을 구하고 이들 식과 합응력식 (4)~(6), 관성력식 (7)~(9), 및 지반반력식 (12), (13)을 동적 평형방정식 (1)~(3)에 대입하고 무차원 변수들인 식 (14)~(25)를 이용하면 Winkler지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1 \eta' + (a_2 + a_3 c_i^2) \eta + a_4 \Psi' \quad (26)$$

$$\Psi'' = a_5 \Psi' + (a_6 + a_7 c_i^2) \Psi + a_8 \phi' + a_9 \eta' \quad (27)$$

$$\phi'' = a_{10} \phi' + (a_{11} + a_{12} c_i^2) \phi + a_{13} \Psi' + a_{10} \Psi \quad (28)$$

여기서,

$$a_1 = \zeta^{-1} \zeta, \quad a_2 = \pi^4 \lambda b \zeta^2 / \mu s^2 \quad (29.1, 29.2)$$

$$a_3 = -\zeta^2 / \mu s^2, \quad a_4 = \zeta \quad (29.3, 29.4)$$

$$a_5 = \zeta^{-1} \zeta', \quad a_6 = \zeta^2 \mu s^2 + \varepsilon \quad (29.5, 29.6)$$

$$a_7 = -\zeta^2 s^{-2}, \quad a_8 = 1 + \varepsilon \quad (29.7, 29.8)$$

$$a_9 = -\zeta \mu s^2, \quad a_{10} = \zeta^{-1} \zeta' \quad (29.9, 29.10)$$

$$a_{11} = (1 + \pi^4 \zeta^2 \lambda b^3 / 12) / \varepsilon \quad (29.11)$$

$$a_{12} = -\zeta^2 s_p^{-2} / \epsilon, \quad a_{13} = -(1 + 1/\epsilon) \quad (29.12, 29.13)$$

본 연구에서 곡선부재의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (30)~(32) 및 (33)~(35)과 같다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi' = 0 \quad (30 \sim 32)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi = 0 \quad (33 \sim 35)$$

3. 형상 함수

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_{13}$ 에 포함되어 있는 형상함수 ζ, ζ' 가 정의되어야 한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. Fig. 1에 주어진 $y = y(x)$ 의 선형식은 무차원 변수인 식 (16)에 의하여 무차원 선형식 δ 및 무차원 곡률반경 ξ 를 다음 식들과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \quad (36)$$

$$\zeta = \left(\frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (37)$$

곡선보축상 임의점에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도 θ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right) \quad (38)$$

나머지 곡률변화계수 ζ' 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \quad (39)$$

이상의 식 (36)~(39)를 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화곡률항인 ζ, ζ' 를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선부재의 선형으로 포물

선형의 곡선부재를 채택하였다.

본 연구에서 비균질 탄성지반으로 Fig 4와 같은 선형 탄성지반을 택하였다. 이 그림에서 k_a, k_b 및 k 는 각각 곡선 부재의 좌단부($x=0$), 우단부($x=l$) 및 보의 축상 임의 x 좌표에서의 Winkler 지반계수이다. 비균질 지반은 선형 탄성지반으로 가정하였으므로 k 를 k_a, k_b 를 이용하여 x 의 1차 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$k = (k_b - k_a)x/l + k_a \quad (40)$$

위의 식을 식 (23)에 적용시키면 다음과 같은 비균질의 선형 무차원 Winkler 지반계수식을 얻을 수 있다.

$$\lambda = (\lambda_b - \lambda_a)\xi + \lambda_a \quad (41)$$

여기서 λ_a, λ_b 는 식 (23)에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_a = k_a l^5 / (\pi^4 EI), \quad \lambda_b = k_b l^5 / (\pi^4 EI) \quad (42, 43)$$

위의 식 (41)을 식 (29.1) ~ (29.13)에 대입하면 선형 Winkler 지반위에 놓인 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식의 계수를 계산할 수 있다.

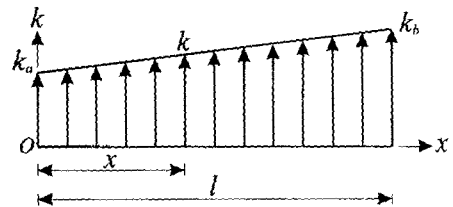


Fig 4. Linear elastic foundation

4. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 상미분방정식, 경계조건 및 형상 함수식이 유도되었으므로 주어진 곡선부재의 선형, 단부조건 및 $f, s, s_p, \epsilon, \mu, \lambda_a, \lambda_b$ 및 b 가 정의되면 무차원 고유진동수 c_i 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고 c_i 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법

을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 이미 다수의 문헌들⁽⁵⁾에 의하여 그 타당성이 입증되었다.

이 연구의 수치해석 예에서 단면의 성질 및 재료의 성질로부터 결정되는 $s_p=0.32s$, $\epsilon=1.25$, $\mu=0.3$ 로 결정하여 수치해석하였고, 나머지 무차원 변수 f , s , λ_a , λ_b , b 는 곡선부재의 변수연구에 이용하였다.

수치해석을 실시하기 전에 먼저 Runge-Kutta법에서 단계길이 $\Delta\xi$ 의 결정을 위하여 수렴해석을 실시하였으며, $1/\Delta\xi=20$ 즉 $\Delta\xi=0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\xi=100$ 으로 수치해석하였다.

이 연구결과의 타당성을 검증하기 위하여 SAP 2000의 결과와 본 연구의 결과를 Table 1에서 비교하였다. 이 표의 하단에 c_i 값 계산에 사용한 곡선부재의 무차원 변수 값들을 표기하였다. 이 표에서와 같이 두 결과들은 서로 매우 근접한 값들을 보이고 있어 본 연구의 이론적, 수치적 방법이 모두 타당함을 알 수 있다. 또한 Table 1로부터 c_i 값은 고정-고정, 고정-회전, 회전-고정, 회전-회전의 단부조건 순서로 c_i 값이 큰 경향이 있음을 알 수 있다.

Table 1. Comparison of c_i * between this study and SAP 2000.

End Constraint	Data Source	Natural frequency, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged	This study	16.71	34.23	71.85	112.32
Hinged	SAP 2000	16.92	35.01	72.57	113.54
Hinged	This study	18.49	41.98	83.72	112.33
Clamped	SAP 2000	18.32	41.04	84.94	113.94
Clamped	This study	19.90	42.02	83.73	112.33
Hinged	SAP 2000	19.54	42.96	85.07	111.86
Clamped	This study	23.20	50.85	96.37	112.38
Clamped	SAP 2000	23.46	51.46	98.46	112.54

* $f=0.2$, $s=100$, $\lambda_a=50$, $\lambda_b=200$, $b=0.02$

Fig. 5~8은 곡선부재의 변수연구를 시행하고 이를 그림에 나타낸 것이다. 이 연구에서 채택한 곡선부재의 선형은 앞에서 설명한 바와 같이 포물선형이며, 수치해석에 사용한 단부조건 및 변수 값들을 그림 상단에 표시하였다. Fig. 5는 c_i 와 f 의 관계를 나타낸 것으로 f 값이 증가함에 따라 c_i 값은 감소함을 알 수 있다. f 값이 0이면 직선 보의

므로 □로 표시된 c_i 값들은 직선 보의 c_i 값들임을 알 수 있다. 이 그림에서 ○로 표시된 곡선은 비틀림모드, △로 표시된 곡선은 휨모드이다. 따라서 이 논문에서 비틀림모드를 고려하지 않으면 즉 상미분방정식 식 (28)에서 c_i 의 계수 $a_{12}=0$ 이면 비틀림모드는 나타나지 않는다. 이 그림에서 ▲로 표시한 (f, c_i) 점에서 c_i 값이 중복근을 갖게되어 두 개의 서로 다른 진동형 즉 비틀림모드와 휨모드가 존재한다.

Fig. 6은 c_i 와 s 의 관계를 나타낸 것이며 s 값이 증가함에 따라서 c_i 값도 증가함을 알 수 있다. 특히 s 값이 증가함에 따라 c_i 값은 수평선에 수렴하며, 제 1, 2모드의 경우에는 s 값이 40이상에서는 c_i 값에 미치는 영향이 매우 작은 것을 알 수 있다.

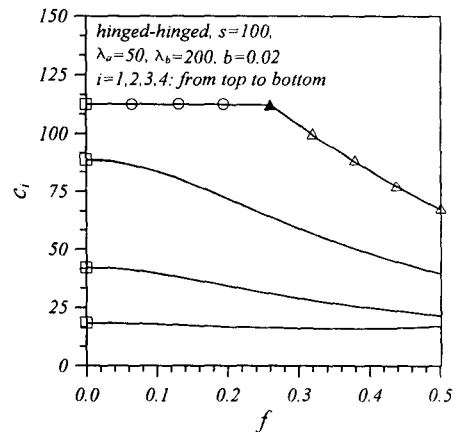


Fig 5. c_i versus f curves

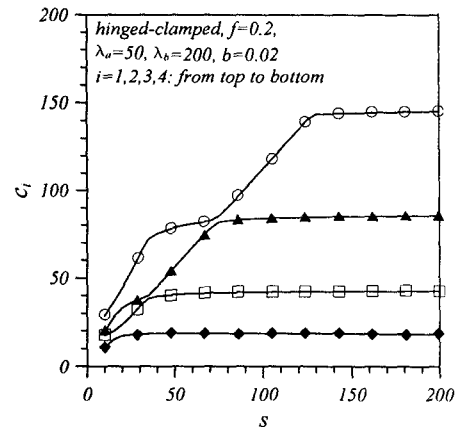


Fig 6. c_i versus s curves

Fig. 7은 c_i 와 λ_b 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이 λ_b 값이 증가함에 따라 c_i 값은 증가하지만 그 영향력은 매우 작다. 그러나 c_i 값의 증가율은 고차 모드에서 보다 저차 모드에서 더 커서 λ_b 값의 영향은 상대적으로 저차 모드에서 더 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 8은 c_i 와 b 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이 b 값이 증가한다. 제 4모드의 경우에 c_i 값의 증가율은 1, 2, 3모드에 비하여 $0.15 \leq b \leq 0.25$ 의 구간에서 b 값의 영향이 상대적으로 큰 것을 알 수 있다.

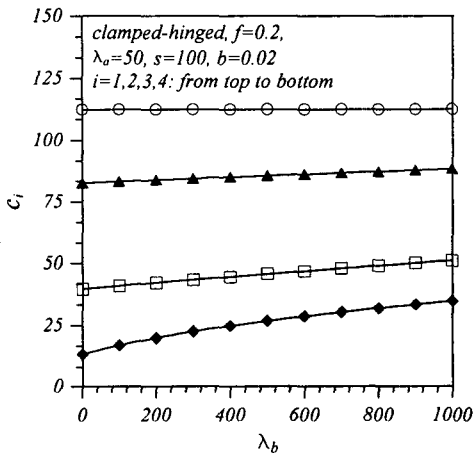


Fig 7. c_i versus λ_b curves

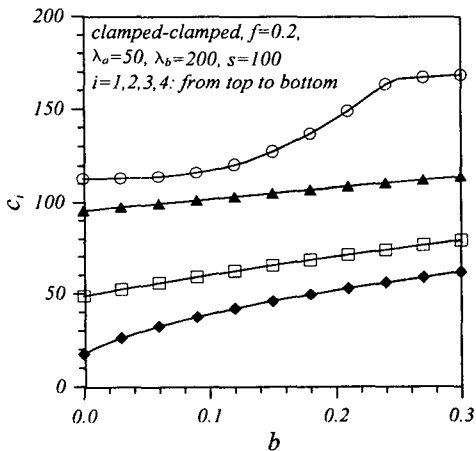


Fig 8. c_i versus b curves

5. 결론

이 논문은 비균질 탄성지반으로 지지된 곡선 보의 자유진동에 관한 연구이다. 탄성지반을 Winkler지반으로 모형화하여 곡선 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였다. 비균질 탄성지반을 선형 탄성지반으로 채택하였으며, 곡선 보의 선형은 포물선형으로 채택하였다. 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 상미분방정식을 적분하기 위하여 Runge-Kutta 법을 이용하고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. SAP 2000과 본 연구의 고유진동수를 서로 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 입증하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 곡선부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계 및 진동형을 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과는 동하중이 작용하는 구조공학 및 기초공학 분야에서 그 유용성을 기대할 수 있다.

참고문헌

1. Laura, P.A.A. and Maurizi, M.J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, pp.6-9.
2. Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 149, pp.259-265.
3. Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beam on Two Parameter Elastic Soil," Computer & Structures, Vol. 47, pp.419-426.
4. De Rosa, M.A., 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 19, pp.1-4.
5. Sang Jin Oh, Byoung Koo Lee and In Won Lee, 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," Vol. 37, No. 6, pp.4871-4891.