

회전축 정렬불량을 가지는 유연 회전디스크의 고유치 해석

Natural Frequencies of a Spinning Disk Misaligned with the Axis of Rotation

°허진욱* · 정진태** 김원석**

Jinwook Heo, Jintai Chung and Wonsuk Kim

Key Words : Spinning Disk (회전디스크), Misalignment (축정렬불량), Galerkin' s Method(갤러킨 법), Eigenvalue (고유치), Critical Speed (위험속도)

ABSTRACT

The natural frequencies of a flexible spinning disk misaligned with the axis of rotation are studied in an analytic manner. The effects of misalignment on the natural frequency need to be investigated, because the misalignment between the axis of symmetry and the axis of rotation cannot be avoided in the removable disks such as CD-R, CD-RW or DVD disks. Assuming that the in-plane displacements are in steady state and the out-of-plane displacement is in dynamic state, the equations of motion are derived for the misaligned spinning disk. After the exact solutions are obtained for the steady-state in-plane displacements, they are plugged into the equation for the dynamic-state out-of-plane motion. The resultant equation is a linear equation for the out-of-plane displacement, which is discretized by the Galerkin method. Based on the discretized equations, the effects of the misalignment are analyzed on the vibration characteristics of the spinning disk, i.e., the natural frequencies and the critical speed

1. 서론

회전디스크는 광디스크 드라이브와 하드디스크 드라이브에서 문자, 음악, 영상 및 동영상 등의 정보를 저장하는 데에 널리 쓰인다. 디스크 드라이브가 점차 고속화/고밀도화 됨에 따라 진동문제가 신뢰성 높은 디스크 드라이브를 생산하는 데에 걸림

돌이 되고 있다. 특히, CD-R, CD-RW, 또는 DVD 드라이브 등의 광디스크 드라이브는 회전축과 도심축의 정렬불량으로 인해 하드디스크 드라이브보다 비교적 많은 진동원을 가진다. 모든 하드디스크 드라이브의 디스크는 영구적으로 스피들축에 단단히 고정되어 있기 때문에, 하드디스크 드라이브에서 정렬불량은 큰 관심 대상이 아니었다. 그러나 광디스크드라이브의 디스크는 일반적으로 탈착식이고 자력에 의해 고정되므로 회전축이 항상 도심축과 일치하지 않는다. 따라서 이에 대한 연구가 필요하다.

회전디스크의 진동에 관한 연구는 Southwell *et al.* [1, 2]에 의해 처음 시작되었으며, 그 후 많은 연구자들이 회전디스크에 관심을 가져왔다. 그들 중,

* 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

E-mail : hjw@ihanyang.ac.kr

Tel : (02)2291-2135, Fax : (02) 2299-1485

** 정희원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

*** 정희원, 한양대학교 BK21사업단 기계분야

일부가 불완전 디스크에 대하여 연구하였는데, Parker and Mote [3]가 연성된 비대칭 디스크-스핀들 시스템에 대해 디스크와 스핀들을 연속적인 유연체(flexible body)로 가정하여 연구하였다. 최근에는, Raman and Mote [4, 5]가 위험속도 부근에서 회전하는 비대칭 유연 회전 디스크의 진동에 대해 해석적 실험적 방법으로 연구하였다. 광디스크에 관련하여, 한편, Chung *et al.* [6]이 각각속도를 가지는 유연 회전디스크의 비선형 응답 해석에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 회전축이 도심축과 일치하지 않는 유연 회전 디스크의 진동 특성을 분석할 것이다. 평면내변위가 정상상태에 있고 평면외변위가 동적 상태에 있다는 가정하에 해밀턴 원리로부터 평면내변위에 대한 선형의 지배방정식과 평면외변위에 대한 비선형의 지배방정식을 유도할 것이다. 또한, 평면내변위의 지배방정식으로부터 엄밀해를 구하고, 이 엄밀해를 평면외 변위의 지배방정식에 대입하여 비선형의 지배방정식을 선형의 지배방정식을 유도할 것이다. 그리고, 이에 갤러킨법(Galerkin's Method)를 적용하여 이산화된 지배방정식, 즉, 시간에 대한 상미분 방정식을 구함으로써 정렬불량이 회전디스크의 고유진동수와 위험속도에 미치는 영향에 대하여 연구할 것이다.

2. 운동 방정식

Figure 1 은 기하중심 C 가 회전중심 O 와 일치하지 않고 등각속도 Ω 를 가지고 회전하는 유연 회전디스크를 나타낸다. 여기서 정렬불량의 양은 C 와 O 의 거리 e 로 나타낸다. 회전디스크는 두께 h , 질량밀도 ρ , 영률 E , 그리고 뻘와송비 ν 가 지며 모든 방향에 대해 균질인 재료로 되어 있어서 무게중심과 도심이 일치한다고 가정한다. 또한 회전디스크는 내경 $r=a$ 에서 축에 단단히 고정되어 있고 외경 $r=b$ 에서는 자유단인 것으로 가정한다. 디스크의 진동현상을 관찰하기 위해, 본 연구에서는, 디스크에 고정되어 디스크와 함께 회전하는 xyz -좌표계에서 디스크의 거동을 표현한다. 그러므로, xyz -좌표축은 회전좌표축 또는 강체에 고정된 좌표축이라고 한다. Figure 1 에서 x 축은 직선 OC 의 연장선과 일치하며 θ 좌표는 x 축에서부터 시작하는 각도를 나타낸다. 단위 벡터 e_r 과 e_θ 는 xyz -좌표계가 디스크에 고정되어 있으므로 디스크와 함께 회전한다.

$$u = u(r, \theta), \quad v = v(r, \theta), \quad w = w(t, r, \theta) \quad (1)$$

정렬불량을 가지는 회전디스크의 지배방정식과 경계조건은 해밀턴원리로부터 유도할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{q_r - q_\theta}{r} = -\rho h \Omega^2 (r + e \cos \theta) \quad (2)$$

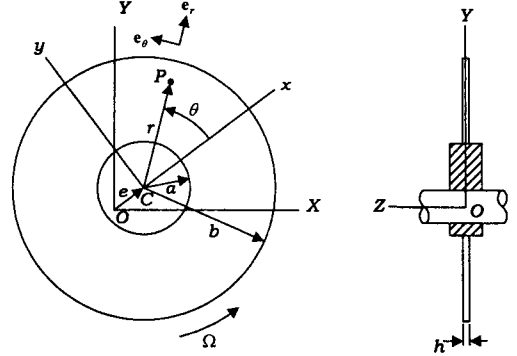


Figure 1. Schematics of a spinning annular disk with misalignment

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = \rho h e \Omega^2 \sin \theta \quad (3)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_\theta \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4)$$

여기서 q_r 과 q_θ 는 디스크의 반경방향과 접선방향의 멤브레인 응력을 나타내고 $q_{r\theta}$ 는 전단멤브레인 응력을 나타내며, D 는 디스크의 굽힘강성이고 ∇^2 바이하모닉 연산자이다.

$$q_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$q_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (5)$$

$$q_{r\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

경계조건은, 회전디스크가 $r=a$ 에서 고정되어 있고 $r=b$ 에서 자유단이라 가정하였으므로 다음과 같이 주어진다.

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (7)$$

$$q_r = q_{r\theta} = m_r = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} + \frac{\partial m_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at } r = b \quad (8)$$

여기서,

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$m_{r\theta} = -(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

정렬불량 $e=0$ 이라 하면, 반경방향 변위 u 는 r 만의 함수가 되며 접선방향 변위 v 는 0 이 된다. 따라서, q_r 과 q_θ 는 r 만의 함수가 되며 $q_{r\theta}$ 는 0 이 된다. 이 경우, 식 (3)은 자동으로 만족이 되며 식 (2)는 다음과 같이 간략화 된다.

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-v^2}{E} \rho \Omega^2 r^3 \quad (10)$$

이 식은 널리 알려진 정상상태에 있는 회전디스크의 평면내변위에 대한 운동방정식[7]과 일치한다. 한편, 식 (4)는 다음과 같은 관계식에 의하여 고정좌표계에서 유도된 디스크의 평면외변위에 대한 운동방정식으로 전환될 수 있다.

$$\phi = \theta - \Omega t \quad (11)$$

여기서, ϕ 는 고정좌표계의 X-축에서부터 반시계방향으로 측정되는 각도이다[8].

3. 평면내 변위에 대한 엄밀해

평면내변위에 대한 엄밀해는 식 (2)와 (3)으로부터 구할 수 있다. 정상상태의 평면내변위에 대한 운동방정식은 시간 t 에는 관계없이 r 과 θ 에만 관계되고 변위 u 와 v 는 θ 에 대하여 주기적이므로, 평면내변위는 삼각함수로 이루어진 기저함수의 무한 조합으로 표현할 수 있다.

$$u(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(r) \cos j\theta, \quad v(r, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(r) \sin j\theta \quad (12)$$

식 (12)를 식 (2)와 식 (3)에 대입하면 식 (12)는 다음과 같이 간략하게 표현됨을 알 수 있다.

$$u(r, \theta) = U_0(r) + U_1(r) \cos \theta, \quad v(r, \theta) = V_1(r) \sin \theta \quad (13)$$

그러므로, 디스크의 평면내거동을 지배하는 식 (2)와 식 (3)은 U_0 와 U_1 , 그리고 V_1 으로 표현할 수 있다. 즉,

$$r^2 \frac{d^2 U_0}{dr^2} + r \frac{dU_0}{dr} - U_0 = -\frac{1-v^2}{E} \rho \Omega^2 r^3 \quad (14)$$

$$r^2 \frac{d^2 U_1}{dr^2} + r \frac{dU_1}{dr} + \frac{1+v}{2} r \frac{dV_1}{dr} - \frac{3-v}{2} U_1 - \frac{3-v}{2} V_1 = -\frac{1-v^2}{E} \rho \Omega^2 r^2 \quad (15)$$

$$\frac{1-v}{2} r^2 \frac{d^2 V_1}{dr^2} - \frac{1+v}{2} r \frac{dU_1}{dr} + \frac{1-v}{2} r \frac{dV_1}{dr} - \frac{3-v}{2} U_1$$

$$-\frac{3-v}{2} V_1 = \frac{1-v^2}{E} \rho \Omega^2 r^2 \quad (16)$$

또한, 식 (14)-(16)의 경계조건도 U_0 와 U_1 , 그리고 V_1 으로 표현할 수 있다.

$$U_0 = U_1 = V_1 = 0 \quad \text{at } r = a, \quad (17)$$

$$\frac{dU_0}{dr} + \nu \frac{U_0}{r} = \frac{dU_1}{dr} + \nu \frac{U_1 + V_1}{r} = \frac{dV_1}{dr} - \frac{U_1 + V_1}{r} = 0 \quad \text{at } r = b \quad (18)$$

여기서, 만약 U_0 가 u 로 치환되면 식 (14)는 식 (10)과 일치하며, 이 식은 정렬불량이 없는 경우 정상상태에 있는 회전디스크의 반경방향변위에 대한 지배방정식이다. 즉, U_0 는 원심력에 의한 반경방향의 변위를 나타낸다. 한편, 식 (15)와 식 (16)은 반경방향과 접선방향의 변위 U_1 과 V_1 을 지배하는 방정식이 되는데, 이는 정렬불량 e 에 의해 나타나는 방정식으로 서로 연성되어 있다. 만약 정렬불량 $e=0$ 이라면, U_1 과 V_1 은 0 이 된다.

식 (14)-(16)의 방정식과 식 (17)과 식 (18)의 경계조건으로부터 U_0 와 U_1 , 그리고 V_1 의 엄밀해를 구할 수 있다. 식 (14)와 이에 관련된 경계조건의 엄밀해 U_0 는 잘 알려져 있다. U_0 의 엄밀해는 다음과 같다.

$$U_0(r) = \frac{1-v^2}{8E} \rho \Omega^2 \left[\frac{(1-v)a^4 + (3+v)b^4}{(1-v)a^2 + (1+v)b^2} r^2 + \frac{(1+v)a^2 - (3+v)b^2}{(1-v)a^2 + (1+v)b^2} \frac{a^2 b^2}{r} - r^3 \right] \quad (19)$$

U_1 과 V_1 은 식 (15)와 식 (16)에서 서로 연성되어 있기 때문에 엄밀해를 구하기 위해 행렬-벡터 형태로 표현하여야 한다.

$$r^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-v \end{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 & 1+v \\ -1-v & 1-v \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} - (3-v) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \frac{2(1-v^2)}{E} \rho \Omega^2 r^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

이 식의 일반해는 제차해(homogeneous solution)과 비제차해(non-homogeneous solution)의 합으로 나타낼 수 있다.

$$U_1(r) = \frac{1+v}{8E} \rho \Omega^2 \left(c_1 r^2 + \frac{c_2}{r^2} + c_3 \ln \frac{r}{a} + c_4 \right)$$

$$V_r(r) = \frac{1+\nu}{8E} \rho \omega^2 \left(d_1 r^2 + \frac{d_2}{r^2} + d_3 \ln \frac{r}{a} + d_4 \right) \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{8(1-\nu)a^4 - (1+\nu)(1-3\nu)a^2b^2 + 3(1-\nu^2)b^4}{(3-\nu)a^4 + (1+\nu)b^4} \\ c_2 &= \frac{(1+\nu)[(1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2]}{(3-\nu)a^4 + (1+\nu)b^4} a^2 b^4 \\ c_3 &= 2(3-\nu)b^2 \\ c_4 &= \frac{8(1-\nu)a^6 - (1+\nu)(1-3\nu)a^4b^2 + 2(1-\nu^2)a^2b^4 - (1+\nu)^2b^6}{(3-\nu)a^4 + (1+\nu)b^4} \\ d_1 &= -c_1 + \frac{2(1+\nu)[(3-\nu)a^2 - (1-\nu)b^2]}{(3-\nu)a^4 + (1+\nu)b^4} b^2 \\ d_2 &= c_2, \quad d_3 = -c_3, \quad d_4 = -c_4 - 2(1+\nu)b^2 \end{aligned} \quad (22)$$

한편, 멤브레인 응력, 즉, 평면내 응력을 U_0 와 U_1 그리고 V_1 을 이용하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_r(r, \theta) &= Q_r^{(0)}(r) + Q_r^{(1)}(r) \cos \theta \\ q_\theta(r, \theta) &= Q_\theta^{(0)}(r) + Q_\theta^{(1)}(r) \cos \theta \\ q_{r\theta}(r, \theta) &= Q_{r\theta}^{(1)}(r) \sin \theta \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $Q_r^{(0)}$ 과 $Q_\theta^{(0)}$ 는 원심력에 의해 발생하는 응력이고, $Q_r^{(1)}$ 과 $Q_\theta^{(1)}$, $Q_{r\theta}^{(1)}$ 는 주어진 각도 θ 에서 정렬불량에 의해 발생하는 응력이다.

$$\begin{aligned} Q_r^{(0)}(r) &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{dU_0}{dr} + \nu \frac{U_0}{r} \right) \\ Q_\theta^{(0)}(r) &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{dU_0}{dr} + \frac{U_0}{r} \right) \\ Q_r^{(1)}(r) &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{dU_1}{dr} + \nu \frac{U_1 + V_1}{r} \right) \\ Q_\theta^{(1)}(r) &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{dU_1}{dr} + \frac{U_1 + V_1}{r} \right) \\ Q_{r\theta}^{(1)}(r) &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{dV_1}{dr} - \frac{U_1 + V_1}{r} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

4. 평면외변위에 대한 이산화된 지배방정식

식 (4)에 표현된 디스크의 평면외방향 거동에

대한 지배방정식으로부터 이산화된 지배방정식을 유도하기 위해 갤러킨법(Galerkin's Method)를 이용한다. 평면외변위 w 는 반경방향과 접선방향의 좌표 r 과 θ 의 함수일 뿐만 아니라 시간 t 의 함수이다. 더욱이, w 는 접선방향 좌표 θ 에 대하여 주기성을 가지므로,

$$w(t, r, \theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N W_{mn}(r) [C_{mn}(t) \cos n\theta + S_{mn}(t) \sin n\theta] \quad (25)$$

와 같이 근사화할 수 있다. 여기서 M 과 N 은 반경방향과 접선방향의 기저함수의 수를 나타내며, W_{mn} 은 반경방향의 기저함수이고, C_{mn} 과 S_{mn} 은 시간의 함수이다.

기저함수 W_{mn} 은 반드시 비교함수(comparison function)이어야 하는데, 비교함수는 기하학적 경계조건(geometric B.C.)과 자연적 경계조건(natural B.C.)을 만족하여야 한다. 디스크 내주의 경계조건 $W_{mn}(a) = 0$ 과 $dW_{mn}(r)/dr|_{r=a} = 0$ 을 자동으로 만족시키기 위해, 반경방향의 기저함수 W_{mn} 을 다음과 같이 가정한다.

$$W_{mn}(r) = (r-a)^{m+2} (a_{mn} + b_{mn}r + c_{mn}r^2) \quad (26)$$

여기서 a_{mn} 과 b_{mn} , c_{mn} 은 자연적 경계조건과 정규화조건에 의해 결정되는 상수이다. W_{mn} 에 대한 정규화조건은 다음과 같이 나타낸다.

$$\tilde{\nabla}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} - \frac{n^2}{r^2}. \quad (27)$$

평면외변위에 대한 이산화된 지배방정식은 평면외변위를 식 (25)와 같이 근사화하고 식 (4)에 갤러킨법(Galerkin's Method)를 적용함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{C}_{mn} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) C_{mn} + k_{lmn}^{p+} C_{m,n+1}] &= 0 \\ \text{for } l=0, 1, \dots, M, \quad n=0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{C}_{mn} + 2k_{lmn}^p C_{m,n-1} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) C_{mn} + k_{lmn}^{p+} C_{m,n+1}] &= 0 \\ \text{for } l=0, 1, \dots, M, \quad n=1 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{C}_{mn} + k_{lmn}^p C_{m,n-1} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) C_{mn} + k_{lmn}^{p+} C_{m,n+1}] &= 0 \\ \text{for } l=0, 1, \dots, M, \quad n=2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{C}_{mn} + k_{lmn}^p C_{m,n-1} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) C_{mn}] = 0$$

for $l=0,1,\dots,M, n=N$ (31)

$$\sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{S}_{mn} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) S_{mn} + k_{lmn}^p S_{m,n+1}] = 0$$

for $l=0,1,\dots,M, n=1$ (32)

$$\sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{S}_{mn} + k_{lmn}^p S_{m,n-1} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) S_{mn} + k_{lmn}^p S_{m,n+1}] = 0$$

for $l=0,1,\dots,M, n=2,3,\dots,N-1$, (33)

$$\sum_{m=0}^M [m_{lmn} \ddot{S}_{mn} + k_{lmn}^p S_{m,n-1} + (k_{lmn}^b + k_{lmn}^p) S_{mn}] = 0$$

for $l=0,1,\dots,M, n=N$, (34)

여기서 m_{lmn} 은 질량 요소, k_{lmn}^b 은 굽힘강성에 의한 강성 요소, k_{lmn}^p 은 멤브레인 응력에 의한 강성요소, k_{lmn}^{p+} 와 k_{lmn}^{p-} 정렬불량에 의한 강성요소를 나타낸다.

$$m_{lmn} = \pi \rho h \int_a^b W_{ln} W_{mn} r dr,$$

$$k_{lmn}^b = \pi D \int_a^b W_{ln} \nabla^4 W_{mn} r dr,$$

$$k_{lmn}^p = -\pi \int_a^b W_{ln} \left[\frac{d}{dr} \left(r Q_r^{(0)} \frac{dW_{mn}}{dr} \right) - n^2 \frac{Q_\theta^{(0)}}{r} W_{mn} \right] dr,$$

$$k_{lmn}^{p+} = -\frac{\pi}{2} \int_a^b W_{ln} \left\{ \frac{d}{dr} \left[r Q_r^{(1)} \frac{dW_{m,n+1}}{dr} - (n+1) Q_\theta^{(1)} W_{m,n+1} \right] \right.$$

$$\left. - n Q_\theta^{(1)} \frac{dW_{m,n+1}}{dr} - n(n+1) \frac{Q_\theta^{(1)}}{r} W_{m,n+1} \right\} dr$$

$$k_{lmn}^{p-} = -\frac{\pi}{2} \int_a^b W_{ln} \left\{ \frac{d}{dr} \left[r Q_r^{(1)} \frac{dW_{m,n-1}}{dr} + (n-1) Q_\theta^{(1)} W_{m,n-1} \right] \right.$$

$$\left. + n Q_\theta^{(1)} \frac{dW_{m,n-1}}{dr} - n(n-1) \frac{Q_\theta^{(1)}}{r} W_{m,n-1} \right\} dr. \quad (35)$$

디스크가 정지해 있는 경우, 강성요소 k_{lmn}^p , k_{lmn}^{p+} and k_{lmn}^{p-} 는 사라진다. 한편, 디스크가 정렬불량 없이 회전하는 경우, k_{lmn}^{p+} and k_{lmn}^{p-} 만 사라지게 되는데, 이 경우 식 (28)-(34)는 정렬불량이 없이 회전하는 디스크의 이산화된 지배방정식이 된다.

식 (28)-(34)을 행렬-벡터 형태로 표현하면 식

(36)과 같다.

$$M\ddot{T} + (K^b + K^p)T = 0 \quad (36)$$

여기서 K^b 와 K^p 는 굽힘강성과 멤브레인 응력에 의한 강성행렬이고 T 는 식 (37)로 정의된 행벡터이다.

$$T = \{C^T, S^T\}^T \quad (37)$$

여기서

$$C = \{C_{00}, C_{10}, \dots, C_{M0}, C_{01}, C_{11}, \dots, C_{M1}, \dots, C_{0N}, C_{1N}, \dots, C_{MN}\}^T$$

$$S = \{S_{01}, S_{11}, \dots, S_{M1}, S_{02}, S_{12}, \dots, S_{M2}, \dots, S_{0N}, S_{1N}, \dots, S_{MN}\}^T \quad (38)$$

K^p 는 멤브레인 응력에 의한 영향뿐 아니라 정렬불량의 영향을 포함하는 행렬이다.

5. 고유치 해석

식 (36)에 대하여 평면외변위 고유진동수의 수렴성을 확인하였다. 본 논문에서 사용된 디스크의 물성치는 아무런 언급이 없다면, $a=15\text{ mm}$, $b=65\text{ mm}$, $h=1.2\text{ mm}$, $\rho=1200\text{ kg/m}^3$, $E=65.5 \times 10^6\text{ N/m}^2$ and $\nu=0.3$ 로 가정한다. 이 물성치는 일반적인 광디스크, 즉 CD-ROM 의 물성치이다. 디스크의 고유진동수는 식 (37)으로부터 계산된다.

$$(K^b + K^p - \omega_n^2 M)X = 0 \quad (37)$$

여기서 ω_n 은 회전좌표계에서의 고유진동수이며 X 는 정규화된 고유벡터이다.

Table 1 은 $a/b=0.5$ 의 반경비를 가지는 정지디스크의 고유진동수가 반경방향의 기저함수의 수 M 이 증가할 때 엄밀해[10]에 수렴함을 나타낸다. 그리고, 여기서 접선방향의 기저함수의 수 N 은 수렴성에는 관련이 없지만 계산되는 모드의 수에 관련이 있음을 알 수 있다. 그러므로, 본 논문에서는, 모든 고유진동수 계산에서 접선방향으로 6 개의 기저함수, 즉 $N=6$ 을 사용한다. Table 1 에서 mode (m,n) 은 m 개의 nodal circle 과 n 개의 nodal diameter 를 나타낸다.

Ω 와 e 를 무시하지 않은 경우의 고유진동수 수렴성에 대하여도 조사하였다. $\Omega=1000\text{ rad/s}$,

$e/b=0.2$, 그리고 $a/b=3/13$ 의 반경비를 가지는 디스크의 고유진동수 수렴성을 Table 2에 정리하였는데, 여기서도 M 이 증가함에 따라 고유진동수가

TABLE 1

Convergence characteristics of the natural frequencies (rad/s) in the rotating frame of reference when $a/b=0.5$, $\Omega=0$ and $e=0$.

M	Mode			
	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
1	261.624	267.119	296.072	374.478
2	261.610	267.094	296.007	374.348
3	261.610	267.094	295.986	374.235
4	261.608	267.076	295.856	373.824
5	261.600	267.035	295.686	373.462
6	261.586	266.996	295.603	373.322
7	261.576	266.983	295.590	373.305
Exact [10]	261.533	266.865	295.259	372.732

TABLE 2

Convergence characteristics of the natural frequencies (rad/s) in the rotating frame of reference when $a/b=3/13$, $\Omega=1000$ rad/s and $e=0.2$.

	Mode				
	(0,0)	(0,1) _s	(0,1) _a	(0,2) _s	(0,2) _a
1	788.054	1260.848	1132.911	1523.828	1524.110
2	773.518	1243.861	1121.035	1515.237	1515.360
3	771.855	1239.174	1118.751	1513.483	1513.717
4	761.454	1239.013	1118.631	1513.410	1513.700
5	768.564	1237.157	1116.963	1512.567	1512.903
6	768.117	1234.892	1116.070	1511.835	1512.214
7	767.822	1234.090	1115.989	1511.689	1512.136

수렴함을 할 수 있다. 여기서 흥미로운 사실은 (0,1) 모드와 (0,2) 모드는 두개의 고유진동수를 가진다는 점이다. 즉, 정렬불량이 없는 디스크의 경우, 회전좌표계에서 모든 모드는 하나의 고유진동수만을 갖는다. 그러나, 디스크에 정렬불량이 포함되는 경우 $n \neq 0$ 인 (m,n) 모드는 두개의 진동수로 갈라지며, 하나는 대칭모드를 나타내고 다른 하나는 비대칭모드를 나타낸다. Table 2의 subscript s 와 a 는 각각 대칭모드와 비대칭모드를 표시하는 것이다. 대칭모드는 Figure 1의 x축에 대한 대칭이고 비대칭모드는 x축에 대해 비대칭으로써, 디스크에서 정렬불량은 축대칭에서부터의 편차 역할을 한다. 이에 대한 자세한 사항은 참고문헌 [11, 12]에서 찾을 수 있다.

본연구에서 제안된 방법은 정렬불량이 없는, 즉 $e=0$ 인 경우의 디스크에 대하여 기수행된 연구의

결과와 본 논문에서 계산된 결과를 비교함으로써 검증할 수 있다. 비교를 위해서 $a/b=0.268$ 의 반경비를 가지는 디스크를 해석하였다. 회전좌표계에서 회전속도에 따른 고유진동수의 변화를 Figure 2(a)에 도시하였는데, 이는 회전좌표계에서의 고유진동수 ω_n 은 회전속도가 증가함에 따라 단조증가함을 증명한다. 또한 λ_n 을 공간상에 고정된 고정좌표계에서 계산되는 고유진동수라 하면, λ_n 과 ω_n 은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\lambda_n = \omega_n \pm n\Omega, \quad (38)$$

여기서, n 은 음수가 아닌 정수이며, 양의 부호와 음의 부호에 해당하는 고유진동수는 각각 고정좌표계에서 forward와 backward 주파수를 나타낸다. 식 (38)에 주어진 관계를 이용하면 고정좌표계에서의 고유진동수를 구할 수 있다.

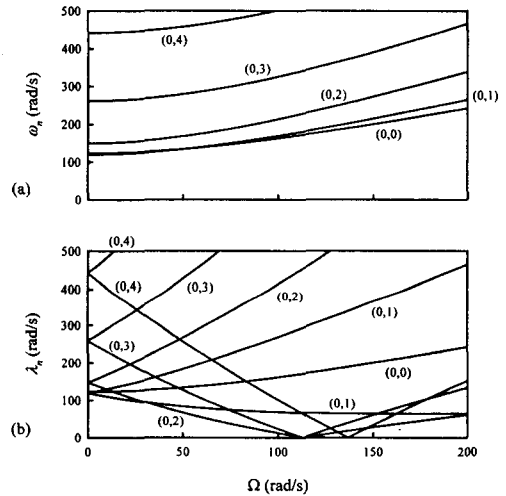


Figure 2. Variation of the natural frequencies for the spinning speed when $a/b=0.268$ and $e=0$: (a) the rotating frame of reference; and (b) the stationary frame of reference.

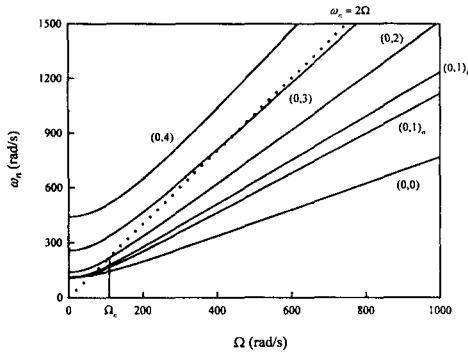


Figure 3. Variation of the natural frequencies for the spinning speed in the rotating frame of reference when $a/b=3/13$ and $e/b=0.2$.

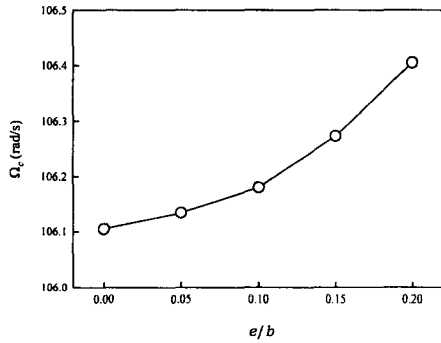


Figure 4. Variation of the critical speed for the misalignment of a spinning disk with $a/b=3/13$.

고정좌표계에서 회전속도에 따른 고유진동수의 변화는 Figure 2 (b)에 도시되어 있는데, 이는 참고문헌 [6]에서 고정좌표계에서 직접 구해진 고유진동수와 일치한다.

다음으로, 정렬불량이 있는 회전 디스크의 고유진동수에 대하여 관찰하였다. Figure 3 은 $a/b=3/13$ 의 반경비와 $e/b=0.2$ 의 정렬불량을 가지는 디스크의 회전속도에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. 정렬불량이 없는 회전디스크의 고유진동수와 비슷하게, 회전속도가 증가함에 따라 모든 고유진동수는 단조증가하는 경향을 보인다. 앞서 언급된 바와 같이, $n \neq 0$ 인 모드 (m,n) 의 고유진동수는 회전속도가 0 이 아닐 때 두개의 고유진동수로

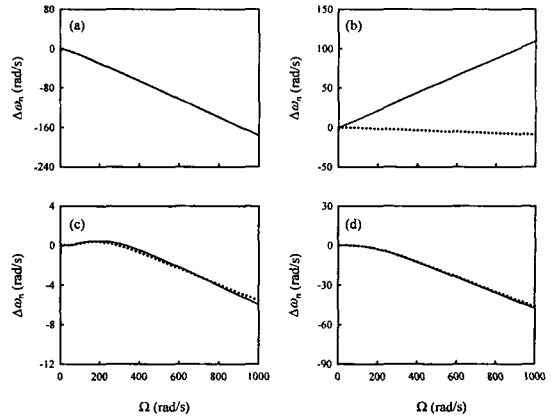


Figure 5. Differences of the natural frequencies for a disk with $a/b=3/13$ between when $e/b=0.2$ and when $e/b=0$: (a) the (0, 0) mode; (b) the (0, 1) modes; (c) the (0, 2) modes; and (d) the (0, 3) modes. —, Symmetric mode; ·····, Asymmetric mode.

갈라진다. Figure 3 에서, (0, 1) 모드에 해당하는 고유진동수는 대칭모드 $(0,1)_s$ 와 비대칭모드 $(0,1)_a$ 로는 회전속도가 0 이 아닐 때 두개의 고유진동수로 갈라진다. Figure 3 에서, (0, 1) 모드에 해당하는 고유진동수는 대칭모드 $(0,1)_s$ 와 비대칭모드 $(0,1)_a$ 로 갈라짐을 확연히 알 수 있다. (0,2), (0,3), (0,4) 모드의 고유진동수 역시 대칭모드와 비대칭모드로 갈라지지만, 그차이가 크지 않아 잘 보이지 않는다. 또한, Figure 3 에서 점선은 $\omega_n=2\Omega$ 에 해당하는 선을 나타내는데, 위험속도는 고정좌표계에서의 고유진동수 λ_n 이 0 이 되는 디스크의 회전속도로 정의하므로, 식 (38)로부터, 위험속도 Ω_c 는 $\omega_n=2\Omega$ 를 나타내는 직선과 (0,2) 모드를 나타내는 고유진동수 곡선이 교차할 때의 디스크의 회전속도라 할 수 있다. $a/b=3/13$ 의 반경비를 가지는 회전디스크의 위험속도는 Figure 4 에 도시된 바와 같이 정렬불량이 증가함에 따라 증가한다. 정렬불량이 $e/b=0$ 에서 $e/b=0.2$ 까지 변화할 때 디스크의 위험속도는 106.105 rad/s 에서 106.405 rad/s 로 변화한다.

정렬불량이 고유진동수에 미치는 영향을 좀 더 자세히 분석하기 위해, 반경비가 $a/b=3/13$ 일 때 정렬불량이 있는 디스크와 정렬불량이 없는 디스크의 고유진동수의 차이를 관찰하였다. 즉, $e/b=0.2$ 일 때의 고유진동수와 $e/b=0$ 일 때의 차이 $\Delta\omega_n$ 은

$$\Delta\omega_n = \omega_n|_{e/b=0.2} - \omega_n|_{e/b=0} \quad (39)$$

6. 결론

회전축이 도심축과 일치하지 않는 회전디스크의 고유진동수를 관찰하였다. 먼저, 디스크의 평면내변위는 정상상태에 있고 평면외변위는 등적 상태에 있다고 가정하면 해밀턴 원리로부터 평면내변위와 평면외변위에 대한 지배방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식은 평면내변위에 대한 2개의 선형 방정식과 평면외변위에 대한 1개의 비선형 방정식으로 이루어져 있다. 평면내변위에 대한 선형의 두 지배방정식은 서로 연성되어 있지만, 본문에서는 이 방정식의 엄밀해를 구하였다. 또한 원래 비선형이었던 평면외변위의 지배방정식에 평면내변위의 엄밀해를 대입함으로써 새로운 선형의 방정식을 구하였다.

평면외변위에 대한 선형의 지배방정식을 바탕으로 정렬불량을 가진 회전디스크의 고유진동수를 관찰하였다. 본 연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 디스크의 정렬불량은 디스크가 회전할 때 고유진동수에 영향을 미친다.
- (2) 디스크에 정렬불량이 존재할 때, $n \neq 0$ 인 (m, n) 모드는 대칭모드를 나타내는 고유진동수와 비대칭모드를 나타내는 고유진동수로 분리된다.
- (3) 회전좌표계에서, 정렬불량을 가진 회전디스크의 모든 고유진동수는 회전속도에 비례하여 단조증가한다.

회전디스크의 위험속도는 정렬불량의 크기가 증가함에 따라 증가한다

참고 문헌

- (1) H. LAMB and R. V. SOUTHWELL 1921 *Proceedings of the Royal Society* **99**, 272-280. The vibration of a spinning disk.
- (2) R. V. SOUTHWELL 1922 *Proceedings of the Royal Society* **101**, 133-153. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre; and on the effects of rotation.
- (3) R. G. PARKER and C. D. MOTE 1996 *ASME Journal of Applied Mechanics* **63**, 953-961. Vibration and coupling phenomena in asymmetric disk-spindle systems.
- (4) A. RAMAN and C. D. MOTE 2001 *International Journal of Non-linear Mechanics* **36**, 261-289. Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed.
- (5) A. RAMAN and C. D. MOTE 2001 *International Journal of Non-linear Mechanics* **36**, 291-305. Experimental studies on the non-linear oscillations of imperfect circular disks spinning near critical speed.

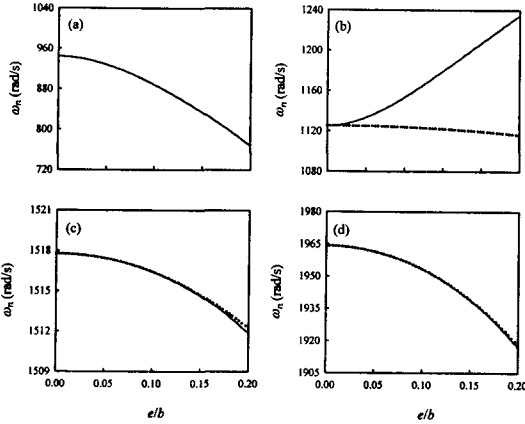


Figure 6. Variation of the natural frequencies for the misalignment e in the rotating frame of reference when $a/b=3/13$ and $\Omega=1000$ rad/s: (a) the (0, 0) mode; (b) the (0, 1) modes; (c) the (0, 2) modes; and (d) the (0, 3) modes. —, Symmetric mode; ·····, Asymmetric mode.

와 같이 나타내며 이는 Figure 5 에 도시되어 있다. 여기서 solid line 은 대칭모드를, 점선은 비대칭모드를 나타내며, Figure 5(a), 5(b), 5(c), 5(d) 는 각각 (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) 모드의 회전속도에 따른 고유진동수의 차이를 나타낸다. Figure 5 에서부터 (0,0)모드와 (0,3) 모드는 정렬불량이 없을 때보다 정렬불량이 있는 경우 더 낮은 고유진동수를 가짐을 알 수 있고, (0,1) 모드에 대하여 대칭모드의 차이는 회전속도가 증가함에 따라 증가하지만 비대칭모드의 차이는 회전속도가 증가함에 따라 감소함을 알 수 있다.

마지막으로, 디스크가 정속으로 회전할 때 정렬 불량 크기의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 관찰하였다. Figure 6 은 반경비가 $a/b=3/13$ 인 디스크가 $\Omega=1000$ rad/s 로 회전할 때 무차원화된 정렬불량의 크기 e/b 가 0~0.2 까지 변화하는 동안의 고유진동수의 변화를 나타낸다. 여기서 고유진동수는 회전좌표계에서 계산하였다. Solid line 과 점선은 Figure 5 에서와 마찬가지로 각각 대칭모드와 비대칭모드를 나타낸다. Figure 6 은 회전속도가 $\Omega=1000$ rad/s 일 때, 비대칭 모드인 $(0,1)_a$ 모드를 제외하면 모든 모드의 고유진동수는 정렬불량의 크기가 증가함에 따라 감소한다. 그러므로, $\Omega=1000$ rad/s 일 때, 정렬불량은 비대칭모드인 $(0,1)_a$ 모드의 고유진동수를 증가시키지만 다른 모드의 고유진동수는 감소시킨다고 할 수 있다.

- (6) J. CHUNG, J.-E. OH and H. H. YOO 2000 *Journal of Sound and Vibration* **231**, 375–391. Non-linear vibration of a flexible spinning disc with angular acceleration.
- (7) S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER 1970 *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill.
- (8) W. D. IWAN and T. L. MOELLER 1976 *ASME Journal of Applied Mechanics* **43**, 485–490. The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system.
- (9) F. B. HILDEBRAND 1976 *Advanced Calculus for Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- (10) C. D. MOTE, JR. 1970 *Journal of The Franklin Institute* **290**, 329–344. Stability of circular plates subjected to moving loads.
- (11) J. CHUNG and J. M. LEE 1999 *Journal of Sound and Vibration* **219**, 35–50. Vibration analysis of an nearly axisymmetric shell structure using a new finite ring element.
- (12) J. CHUNG, M. J. KIM and J. M. LEE 2001 *Journal of Sound and Vibration*. A finite annular plate element with slight deviation for vibration analysis of a nearly axisymmetric disk. (submitted).