

## 불균일 원형 봉의 비틀림 진동 특성

### Torsional Vibration Characteristics of Nonuniform Circular Rods

○정 형 곤\* · 김 진 오\*\*

Hyung Gon Jeong and Jin Oh Kim

**Key Words** : Torsional Vibration(비틀림 진동), Stepped Circular Rod(2단 원형 봉), Conically-Tapered Rod(원추형 테이퍼 봉), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형상)

#### ABSTRACT

The vibrational characteristics of nonuniform circular rods have been studied theoretically and experimentally in this paper. The differential equation of torsional motion expressed in terms of the angular displacement has been solved exactly and approximately for a stepped circular rod and for a conically-tapered rod. Solutions of the boundary-value problem have yielded the natural frequencies, mode shapes and forced responses of the rods. The theoretical solutions of forced response have been verified by comparing them with experimental ones.

#### 1. 서론

불균일 봉은 초음파 용접기에서는 진동변환기에 의해 발생된 진동을 증폭하여 팁(tip)에 전달하는 역할을 한다.<sup>(1)</sup> 본 논문에서 다루는 원형 봉은 비틀림 진동자형 초음파 점도계에서 유체에 담기는 센서부분이다. 이는 압전 비틀림 변환기<sup>(2)</sup>와 결합되어, 변환기에서 발생한 비틀림 진동을 증폭하고 인접 점성 유체와의 상호작용<sup>(3)</sup>으로 점도를 측정한다. 봉의 진동에 있어서 가진력이 일정하더라도 가진부 반대쪽의 자유단으로 갈수록 단면 크기가 작아지면 진동 응답이 더 커지는 현상이 종진동에 대해서 보고되어 있다.<sup>(4)</sup> 본 논문에서는 비틀림 진동을 하는 봉의 단면 크기를 변화시켜 진동 응답을 비교함으로써 비틀림 진동이 증폭되는 현상을 규명한다.

이러한 점도 센서에 있어서 원형 봉의 단면 크기가 변화하는 경우 불균일 원형 봉에서의 비틀림 진동은 원형 봉의 형상에 따라 다른 고유진동수와 모드형상을 가지므로 연구대

상을 2단 원형 봉, 원추형 테이퍼 봉으로 정하고, 균일 봉에 대한 결과와 비교한다. 선정된 불균일 원형 봉의 비틀림 진동 특성을 이론적으로 해석함에 있어서 엄밀해법<sup>(5)</sup>과 근사해법인 Rayleigh-Ritz방법<sup>(6)</sup>을 적용한다. 또한 특정한 진동수로 가진되는 경우의 응답을 엄밀해법으로 구하여 실제 센서로서 사용될 때의 진동의 형상을 예측한다.

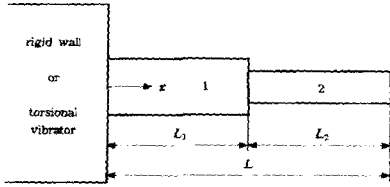
이와 같은 이론적인 가진응답과 비교하기 위하여 비접촉식 레이저 면내 진동 측정장비로 원형 봉의 면내에서 발생하는 비틀림 진동의 변위를 측정한다. 측정된 가진응답과 이론적인 해석에 의한 응답을 비교하여 이론을 검증한다. 이를 통해 센서 효율을 증대시키는 봉의 형상을 선정할 연구자료를 얻는 것이 이 연구의 목적이다.

#### 2. 비틀림 진동의 정식화

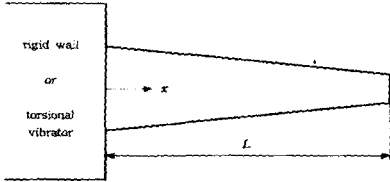
Fig. 1에 보인 바와 같이 단면이 원형이고 단면적이 길이 방향 좌표  $x$ 에 따라 변화하는 불균일 봉의 비틀림 진동을 모델링한다. 원형 단면의 불균일 봉이 비틀릴 때, 원주방향 변위  $u_\theta(r, x, t)$ 는 반경방향 좌표  $r$ 에 정확하게 비례하지는 않는다.<sup>(7)</sup> 그렇지만 근사적으로 거의 비례하며, 특히 동적 비틀림 운동의 경우 단면의 기본 모드에서는 다음과 같이  $u_\theta$ 가  $r$ 에 비례하는 것으로 간주할 만하다.<sup>(5,8)</sup>

\* 숭실대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정희원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과  
E-mail : jokim@saint.soongsil.ac.kr  
Tel : (02) 820-0362, Fax : (02) 820-0368



(a)



(b)

Fig. 1 Schematic diagrams of three-types of nonuniform rods: (a) a stepped rod, (b) a conically-tapered rod.

$$u_\theta(r, x, t) = r\theta(x, t) \quad (1)$$

여기서  $\theta(x, t)$ 는 위치  $x$ 와 시간  $t$ 에서 단면의 비틀림 각, 즉 각변위를 의미한다.

비틀림 진동을 하는 봉의 운동방정식을 각변위  $\theta(x, t)$ 로 표현하면 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

여기서  $G$ 는 전단탄성계수(shear modulus)이고,  $J(x)$ 는 단면의 극모멘트(polar moment)로서  $GJ(x)$ 는 비틀림 강성(torsional stiffness)이라고 불린다. 또한  $I(x)$ 는 단위 길이당 극관성모멘트이며, 원형 단면의 경우  $I(x) = \rho J(x)$ 이고, 여기서  $\rho$ 는 질량 밀도이다. 식(2)의 좌변에서 괄호 안의 부분은 비틀림 모멘트, 즉 토크를 의미한다.

식 (2)를 전개하고 정리하면 다음과 같다.

$$J(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dJ(x)}{dx} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2} J(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

여기서  $c = [G/\rho]^{1/2}$ 는 비틀림 파의 전파속도이다.

각변위  $\theta(x, t)$ 가 각진동수  $\omega (= 2\pi f, f$ 는 진동수)로 시간  $t$ 에 따라 조화함수 형태로 변화한다면, 다음과 같이 좌표  $x$ 에 대한 각변위  $\theta(x)$ 와 시간  $t$ 의 함수의 곱으로 변수분리 할 수 있다.

$$\theta(x, t) = \theta(x) e^{j\omega t} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 각변위  $\theta(x)$ 로 표현된 비틀림 진동의 지배방정식을 얻는다.

$$J(x) \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{dJ(x)}{dx} \frac{d\theta(x)}{dx} + k^2 J(x) \theta(x) = 0 \quad (5)$$

여기서  $k (= \omega/c)$ 는 일명 파동수(wavenumber)이다. 참고로, 변수분리된 비틀림 모멘트  $M(x)$ 는  $GJ(x) \cdot d\theta(x)/dx$ 이다. 식 (5)의 해는 불균일 원형 봉의 단면 변화에 따른 함수  $J(x)$ 와 경계조건에 의해 결정된다.

균일한 원형 봉, 즉  $J(x) = J(\text{상수})$ 이고  $I(x) = I(\text{상수})$ 인 봉의 비틀림 진동에 대해서는 식 (5)의 해가 잘 알려져 있다. 봉의 한쪽 끝 ( $x = 0$ )이 고정되고 다른 쪽 끝 ( $x = L$ )이 자유로운 경우, 고유진동 모드는 다음과 같다.<sup>(5)</sup>

$$\theta^{(r)}(x) = A^{(r)} \sin \frac{(2r-1)\pi}{2L} x \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

봉의 한쪽 끝 ( $x = 0$ )에서 각진동수  $\omega$ 와 회전각 진폭  $\theta_0$ 의 회전 진동이 가해지는 경우, 진동응답은 다음과 같다.

$$\theta(x) = \theta_0 \frac{\cos k(L-x)}{\cos kL} \quad (7)$$

$kL$ 의 값, 즉 봉의 재질 및 길이와 가진 진동수의 관계에 따라서 진동응답의 진폭이 달라지며,  $\cos kL$ 이 0이 되는 때에 응답이 최대로 되는 공진이 발생한다.

단면이 균일하지 않은 봉, 즉  $J(x)$ 가 상수가 아닌 봉의 비틀림 진동에 대한 식 (5)의 해를 다음 두 절에서 다룬다. 제3절에서는 균일한 봉이 2개 이상 결합된 다단 봉을 대상으로 하되, 그 중 가장 간단한 2단 원형 봉의 비틀림 진동을 해석한다. 제4절에서는 봉의 단면 크기가 연속적으로 변화하는 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동을 해석한다.

### 3. 2단 원형 봉의 비틀림 진동

원형 단면의 균일한 봉이 2개 이상 결합된 다단 봉 중에서 Fig. 1(a)와 같이 단순한 2단 봉의 비틀림 진동을 해석한다. 자유진동응답, 즉 고유진동 특성을 엄밀해법과 근사해법으로 유도하여 고유진동수와 모드 형상을 구하고, 1차 고유진동수 부근의 진동수로 가진될 때의 응답을 엄밀해로 구한다.

#### 3.1 고유진동 엄밀해

2단 원형 봉을 구성하는 2개의 동일 매질의 균일 봉 1과 2의 비틀림 진동의 지배 방정식은 식 (5)로부터 단순화하여 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^2 \theta_i(x)}{dx^2} + k^2 \theta_i(x) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

여기서 첨자 1과 2는 각각 균일 봉 1과 2를 의미한다.

Fig. 1(a)와 같이 2단 원형 봉의 한쪽 면 ( $x = 0$ )이 고정되고 다른 쪽 면 ( $x = L$ )이 자유로운 경우 양단에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta_1(0) = 0 \quad (9a)$$

$$M_2(L) = GJ_2 \frac{d\theta_2}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (9b)$$

한편 단면이 불연속인 경계면 ( $x = L_1$ )에서의 조건으로, 각

변위의 연속조건은 다음과 같다.

$$\theta_1(L_1) = \theta_2(L_1) \quad (9c)$$

또한 비틀림 모멘트의 연속조건은 다음과 같다.

$$GJ_1 \frac{d\theta_1}{dx} \Big|_{x=L_1} = GJ_2 \frac{d\theta_2}{dx} \Big|_{x=L_1} \quad (9d)$$

식 (8)과 4개의 경계조건 (9a~d)를 만족하는 해는 다음과 같다.

$$\theta_1^{(r)}(x) = A^{(r)} \frac{\sin k_r x}{\sin k_r L_1} \quad 0 < x < L_1 \quad (10a)$$

$$\theta_2^{(r)}(x) = A^{(r)} \frac{\cos k_r(L-x)}{\cos k_r L_2} \quad L_1 < x < L \quad (10b)$$

여기서  $r$ 은 정수로서 고유 모드의 차수를 의미한다.

경계조건 (9a~d)를 적용하는 과정에서 0이 아닌 해가 존재하기 위한 조건으로부터 공진을 나타내는 특성방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$J_1 \cos k_r L_1 \cos k_r L_2 - J_2 \sin k_r L_1 \sin k_r L_2 = 0 \quad (11)$$

식 (11)에서 미지수  $k_r$ 값은 Mathematica<sup>(9)</sup>의 FindRoot 기능을 이용하여 계산할 수 있다. 또한  $k_r$ 값을 식 (10)에 대입하여  $r$ 번째 모드  $\theta_1^{(r)}(x)$ 와  $\theta_2^{(r)}(x)$ 를 계산한다.

재질이 스테인레스 강(SUS-302)인 봉 1, 2의 단면의 직경이 각각 8mm와 7mm이고 길이는 동일하게 25mm인 2단 원형 봉의 고유진동 모드를 3차 모드까지 계산하였다. 계산에 사용한 물성치<sup>(10)</sup>는 Table 1에 기재되어 있다. 식 (11)로부터 구해진  $k_r$ 값으로부터 고유진동수를 계산하여 Table 2에 기재하고, 다음절에서 근사해와 비교한다. 식 (10)으로부터 계산한 모드 형상을 Fig. 2에 실선으로 나타내었다. Fig. 2에서 점선은 단면의 직경이 7.5mm이고 길이가 50mm인 균일한 봉의 모드 형상이다. Fig. 2에서 알 수 있듯이 2단 봉의 모드 형상은 단면 크기가 작은 부분에서 더 큰 진동이 나타난다.

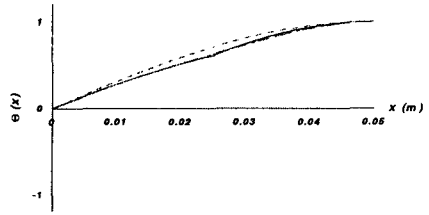
그런데 불연속면에서의 연속조건을 적용한 엄밀해가 타당한지 검증하기 위하여 근사해를 구하여 비교한다.

Table 1 Material properties of stainless steel (SUS-302)

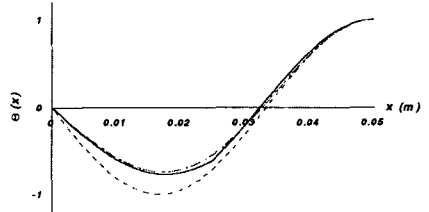
Properties	Values
mass density, $\rho$	7920 kg/m <sup>3</sup>
shear modulus, $G$	75 GPa

Table 2 Comparison of the exact and approximate solutions for the natural frequencies of the stepped circular rod.

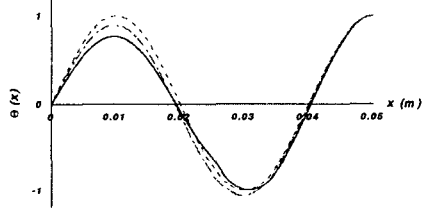
mode	natural frequency (kHz)		
	stepped rod		uniform rod
	exact	approximate	
1	18.0	18.0	15.4
2	43.6	43.8	46.2
3	79.5	80.0	76.9



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 2 Comparison of the exact and approximate solutions for the mode shapes of the stepped circular rod. (- : exact solution, - - - : approximate solution, . . . : uniform rod)

### 3.2 고유진동 근사해

2단 원형 봉의 경우 불연속적인 질량 분포 혹은 강성 분포 때문에 엄밀해가 국부적으로 타당하지 않을 수 있으므로, 이를 보완하기 위하여 근사적인 해석 방법을 적용한다. 근사해 방법들 중에서 Rayleigh-Ritz법<sup>(5,6)</sup>을 택하여 고유진동수와 모드 형상을 구한다.

먼저 경계조건은 한쪽 면 ( $x=0$ )이 고정되고 다른 쪽 면 ( $x=L$ )이 자유로운 경우로 식 (9a, d)와 같다. 이러한 경계조건에 대한 admissible 함수를 다음과 같이 설정한다.

$$\phi_i(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2L} x \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

구하고자 하는 고유 모드의 차수를 3차 ( $n=3$ )까지로 한정하고, 이에 따른 강성 행렬과 질량 행렬의 원소를 다음과 같이 구한다.

$$k_{ij} = \int_0^{L_1} GJ_1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx + \int_{L_1}^L GJ_2 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad (13)$$

$$m_{ij} = \int_0^{L_1} I_1 \phi_i \phi_j dx + \int_{L_1}^L I_2 \phi_i \phi_j dx \quad (14)$$

여기서  $i, j$ 는 각각 행렬의 행과 열을 의미한다.

이에 따라  $3 \times 3$ 의 질량 행렬  $M$ 과 강성행렬  $K$ 가 얻어진다. 3.1절에서 제시된 봉의 재질 물성치와 형상치수를 대입하여 고유치 문제의 해를 구한다. 이러한 과정으로 구한 고유진동수를 Table 2에 기재하고, 앞절에서 구한 엄밀해와 비교한다. 그리고, 근사해로 구한 모드 형상은 다음과 같다.

$$\theta^{(1)}(x) = A^{(1)} \left( 0.9989 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.0441 \sin \frac{3\pi x}{2L} + 0.0185 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (15a)$$

$$\theta^{(2)}(x) = A^{(2)} \left( -0.1408 \sin \frac{\pi x}{2L} + 0.9877 \sin \frac{3\pi x}{2L} - 0.0686 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (15b)$$

$$\theta^{(3)}(x) = A^{(3)} \left( 0.0664 \sin \frac{\pi x}{2L} + 0.0859 \sin \frac{3\pi x}{2L} - 0.9941 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (15c)$$

여기서  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ 는 진폭의 계수이다.

근사해로 구한 모드 형상을 Fig. 2에 일점쇄선으로 나타내어 엄밀해의 모드 형상 및 균일봉의 모드 형상과 비교한다.

### 3.3 가진응답

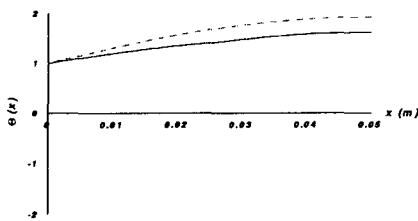
Fig. 1(a)의 2단 원형 봉의 왼쪽 끝에 비틀림 변환기<sup>(2)</sup>로써 가진할 경우 2단 봉의 응답을 구한다. 가진 진동수가  $f$ 이면  $\omega (= 2\pi f)$ 로써 가진 부분 ( $x = 0$ )의 경계조건을 다음과 같이 설정한다.

$$x = 0 \text{에서} \quad \theta_1 = \theta_0 e^{j\omega t} \quad (16)$$

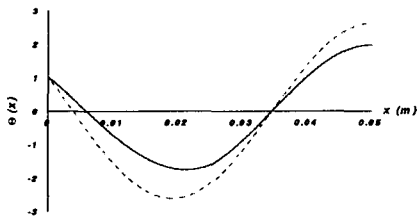
따라서 식 (4)와 같이 변수분리한 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (17)$$

다른 부분의 경계조건은 (9b-d)와 동일하다.



(a) frequency 10 kHz



(b) frequency 50 kHz

Fig. 3 Forced response of the uniform and stepped circular rods.

식 (8)과 경계조건 (17) 및 (9b-d)를 만족하는 응답을 구하면 다음과 같다.

$$\theta_1(x) = \theta_0 \times \frac{J_1 \cos kL_2 \cos k(L_1 - x) - J_2 \sin kL_2 \sin k(L_1 - x)}{J_1 \cos kL_1 \cos kL_2 - J_2 \sin kL_1 \sin kL_2} \quad 0 < x < L_1 \quad (18a)$$

$$\theta_2(x) = \theta_0 \times \frac{J_1 \cos k(L - x)}{J_1 \cos kL_1 \cos kL_2 - J_2 \sin kL_1 \sin kL_2} \quad L_1 < x < L \quad (18b)$$

3.1절에서 고유진동 특성 계산의 대상으로 삼은 2단 원형 봉에 대하여 가진 응답을 계산한다. 여기서 가진 진동수  $f$ 는 10 kHz와 50 kHz로 선정하고, 가진 진폭  $\theta_0$ 는 1로 가정한다. 계산된 비틀림 진동 응답을 Fig. 3에 나타내었다.

이와 같은 2단 원형 봉에 대한 해석 방법을 연장하여 적용하면 다단 봉의 진동을 해석할 수 있다.

## 4. 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동

단면 크기가 연속적으로 변하는 원형 봉 중에서 Fig. 1(b)와 같은 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동을 해석한다. 원추형 테이퍼 봉의 경우에 종진동에 관해 해석된 사례<sup>(11)</sup>는 있으나 비틀림 진동에 관해 해석된 사례는 없다. 본 절에서는 종진동 해석 과정을 상사적으로 적용하여 비틀림 진동을 해석한다. 2단 원형 봉에서와 같이 엄밀해법과 근사해법으로 고유진동수와 모드 형상을 구하고, 1차 고유진동수로 가진될 때의 응답을 엄밀해로 구한다.

### 4.1 고유진동 엄밀해

비틀림 진동 해석 대상인 원추형 테이퍼 봉의  $x$ 방향의 단면 변화를 나타내는 반지름 함수  $r(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$r(x) = R \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right) \quad (19)$$

여기서  $R$ 은 원추형에서 고정단 ( $x = 0$ )의 반지름을 의미하며,  $\beta = [R_1/R] - 1$ 는 반지름 함수의 기울기이고  $R_1$ 은 자유단 ( $x = L$ )의 반지름을 나타낸다. 단면이 불균일하므로 단면의 극모멘트  $J(x)$ 는 다음과 같이  $x$ 의 함수로 표현된다.

$$J(x) = \frac{\pi R^4}{2} \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right)^4 \quad (20)$$

$J(x)$ 를 식 (5)에 적용하여 정리하면 베셀방정식이 얻어지며<sup>(11)</sup>, 이 식의 일반해는 다음과 같이 베셀함수를 포함하여 표현된다.

$$\theta(x) = \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \left\{ C_1 J_{-\frac{3}{2}} \left[ \lambda \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right) \right] + C_2 J_{\frac{3}{2}} \left[ \lambda \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right) \right] \right\} \quad (21)$$

여기서  $C_1, C_2$ 는 경계 조건에 의해 결정되는 미지수이며,  $\lambda = \omega L / (|\beta| \sqrt{G/\rho})$ 이다.

Fig. 1(b)와 같이 원추형 테이퍼 봉의 한쪽 끝 ( $x = 0$ )이 고정되고 다른 쪽 끝 ( $x = L$ )이 자유로운 경우 양단에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta(0) = 0 \quad (22a)$$

$$M(L) = GJ(L) \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (22b)$$

식 (21)에 경계조건 (22a, b)를 적용하여 구한 해는 다음과 같다.

$$\theta^{(n)}(x) = C^{(n)} \left(1 + \beta \frac{x}{L}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left\{ J_{-\frac{3}{2}} \left[ \lambda_r \left(1 + \beta \frac{x}{L}\right) \right] - \frac{J_{-\frac{3}{2}}[\lambda_r]}{J_{\frac{3}{2}}[\lambda_r]} J_{\frac{3}{2}} \left[ \lambda_r \left(1 + \beta \frac{x}{L}\right) \right] \right\} \quad (23a)$$

$$\lambda_r = \omega_r L / (|\beta| \sqrt{G/\rho}) \quad (23b)$$

여기서 미지수  $C^{(n)}$ 의 값을 결정하기 위하여 자유단에서의 진폭을 1로 가정하여 정규화한다.

경계조건을 적용하는 과정에서 0이 아닌 해가 존재하기 위한 조건으로부터 다음과 같은 특성 방정식을 얻게 된다.

$$J_{-\frac{3}{2}}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}[\lambda(1+\beta)] = -J_{\frac{3}{2}}(\lambda) J_{-\frac{3}{2}}[\lambda(1+\beta)] \quad (24)$$

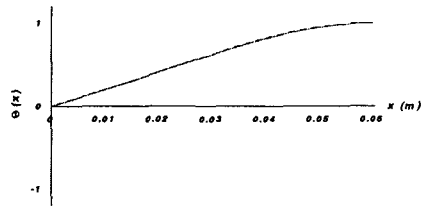
식 (24)에 포함된 베셀함수들은 홀수 정수의 1/2배 계수를 가지므로, 기본함수들로 표현하여 정리하면 다음과 같은 초월함수를 얻는다.<sup>(12)</sup>

$$\tan(\lambda\beta) = -\frac{\lambda^3(1+\beta)^2 + 3\lambda(1+\beta) - 3\lambda}{\lambda^2(1+\beta)^2 - 3\lambda^2(1+\beta) - 3} \quad (25)$$

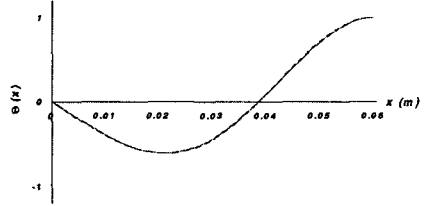
식 (25)에서 미지수  $\lambda_r$ 의 값을 Mathematica의 FindRoot 기능을 이용하여 계산할 수 있다.  $\lambda_r$  값을 식 (23b)와 (23a)에 대입하여  $r$ 번째 모드의 고유진동수  $\omega_r$ 과 모드 형상  $\theta^{(n)}(x)$ 를 계산한다. 재질이 스텐레스 강(SUS-302)이며 고정단과 자유단의 직경이 각각 7.5mm와 5.2mm이고 길이가 60mm인 원추형 테이퍼 봉의 고유 진동모드를 3차 모드까지 계산하였다. 구해진 고유진동수는 Table 3에 기재하고 다음절에서 근사해와 비교한다. 식 (23a)로부터 계산한 모드 형상을 Fig. 4에 실선으로 나타낸다. Fig. 4에서 알 수 있듯이 원추형 테이퍼 봉의 모드 형상은 단면의 크기가 작은 부분에서 더 큰 진동이 나타난다.

Table 3 Comparison of the exact and approximate solutions for the natural frequencies of the conically-tapered rod.

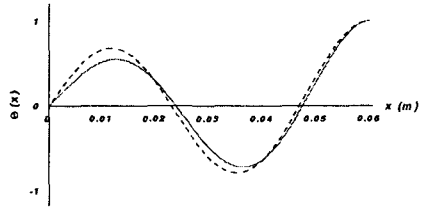
mode	natural frequency (kHz)	
	exact	approximate
1	16.8	16.9
2	40.2	40.2
3	65.2	65.6



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 4 Comparison of the exact and approximate solutions for the mode shapes of the conically-tapered rod. (— : exact solution, --- : approximate solution)

모드 형상을 엄밀해로 구하는 과정에는 초월함수로 표현된 식 (25)의 근을 구하는 작업이 필요해 번거롭다. 이를 보완하기 위하여 근사해를 구한다.

#### 4.2 고유진동 근사해

원추형 테이퍼 봉의 경우 질량 분포 혹은 강성 분포가 연속적으로 변하므로 엄밀해를 구하는 과정의 초월함수로 표현된 식이 매우 복잡하다. 그러므로, 해를 구하는 과정을 더욱 용이하게 하기 위하여 근사해법을 적용한다. 근사해법은 3.2절에서 2단 원형 봉의 근사해에서 적용한 바 있는 Rayleigh-Ritz법을 이용한다.

그렇게 구한 고유진동수는 Table 3에서 엄밀해의 고유진동수와 비교한다. 그리고, 이러한 과정을 통해 3차까지의 admissible 함수를 이용하여 다음과 같은 모드 형상을 구한다.

$$\theta^{(1)}(x) = A^{(1)} \left( 0.9977 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.0681 \sin \frac{3\pi x}{2L} - 0.0035 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (26a)$$

$$\theta^{(2)}(x) = A^{(2)} \left( -0.2442 \sin \frac{\pi x}{2L} + 0.9646 \sin \frac{3\pi x}{2L} - 0.0995 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (26b)$$

$$\theta^{(3)}(x) = A^{(3)} \left( 0.0727 \sin \frac{\pi x}{2L} - 0.1926 \sin \frac{3\pi x}{2L} + 0.9786 \sin \frac{5\pi x}{2L} \right) \quad (26c)$$

여기서  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $A^{(3)}$ 는 진폭의 계수이다. 근사해로 구한 모드 형상은 Fig. 4에 점선으로 나타내어 엄밀해로 구한 모드 형상과 비교한다.

### 4.3 가진응답

Fig. 1(b)와 같이 원추형 테이퍼 원형 봉의 한쪽 끝에 설치된 진동자가 비틀림 진동을 가하는 경우에 원추형 테이퍼 봉의 진동 응답을 구한다. 가진 진동수가  $f$ 라 하여, 3.3절에서와 같이 변수 분리한 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (27a)$$

$$M(L) = GJ(L) \frac{d\theta(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (27b)$$

식 (21)에 경계조건 (27a, b)를 적용하여 응답을 구하면 다음과 같다.

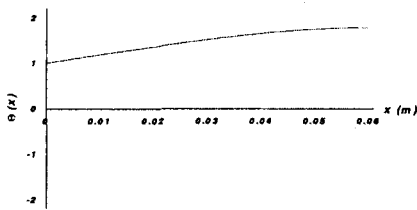
$$\theta(x) = \theta_0 \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right)^{-3/2} \times \frac{A + B}{J_{-5/2}[\lambda(1 + \beta)]J_{3/2}(\lambda) + J_{5/2}[\lambda(1 + \beta)]J_{-3/2}(\lambda)} \quad (28)$$

$$A = J_{5/2}[\lambda(1 + \beta)]J_{-3/2} \left[ \lambda \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right) \right]$$

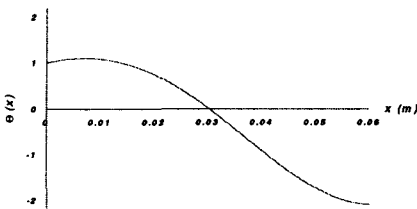
$$B = J_{-5/2}[\lambda(1 + \beta)]J_{3/2} \left[ \lambda \left( 1 + \beta \frac{x}{L} \right) \right]$$

여기서  $\lambda$ 는  $\omega L / (|\beta| \sqrt{G\rho})$ 을 의미한다.

앞서 4.1절에서 고유진동 특성을 구한 원추형 테이퍼 원형



(a) frequency 10 kHz



(b) frequency 30 kHz

Fig. 5 Forced response of the conically-tapered rod.

봉에 대한 가진 응답을 Fig. 5에 나타내었다. 여기서 원추형 테이퍼 원형 봉에 가해진 진동수  $f$ 는 10 kHz와 30 kHz로 적용하였다. 그리고 초기의 가진 진폭  $\theta_0$ 는 1로 가정한다.

## 5. 실험

앞에서 해석한 결과를 검증하기 위하여 고유진동수와 가진 응답을 측정하는 실험을 행하였다.

### 5.1 고유진동수 측정

봉에 진동을 가해주는 압전 비틀림 변환기의 임피던스를 주파수의 함수로 측정하여 봉의 고유진동수를 알아낸다. 임피던스 측정에는 Impedance Gain/Phase Analyzer (HP4194A)를 사용하였다.

해석 대상인 균일 원형 봉, 2단 원형 봉, 또는 원추형 테이퍼 봉이 결합된 변환기의 임피던스를 측정하였다. 임피던스가 극소값을 나타내는 주파수가 고유진동수이며, 봉에 외부에서 저항을 가할 경우 임피던스가 보다 크게 증가하는 주파수를 봉의 고유주파수로 간주한다. 이와 같이 측정된 1차 고유진동수를 Table 4에 기재하고, 앞 절에서 계산된 고유진동수와 비교한다.

### 5.2 가진응답 측정

불균일 원형 봉의 비틀림 진동 모드의 측정은 레이저 간섭 방식의 In-plane Vibrometer (Polytec OFV-3320, LSV065-306F)를 사용하여 면내 진동인 비틀림 진동의 속도를 측정한다. 측정 원리는 Differential Laser Doppler방법<sup>(13)</sup>으로서, 레이저 다이오드로 발생되어 두 부분으로 분리된 레이저 빔이 움직이는 물체에 입사하는 경우  $\Delta s$ 간격의 간섭무늬와 함께 주파수 변이  $f_D$ 가 발생하고 이를 통해서 물체의 면내 속도  $v_b$ 를 다음 관계로 측정하는 것이다.

$$v_b = f_D \cdot \Delta s \quad (29)$$

이러한 In-plane vibrometer의 Differential Laser Doppler 방법을 이용하여 측정할 전체 실험 장비의 간략화한 구성도는 Fig. 6과 같다. 그리고, 비틀림 진동을 측정하기 위하여 In-plane vibrometer로 불균일 원형 봉의  $x$ 좌표 방향의 각 점에서 속도를 측정한다.  $x$ 방향의 좌표점은  $xy$ -table을 이용하여 5mm단위로 측정지점을 이동시킨다. 측정된 신호는

Table 4 Comparison of the calculated and measured 1st natural frequencies of nonuniform circular rods.

shape	natural frequency (kHz)	
	calculated	measured
uniform	12.8	10.9
stepped	18.0	14.6
conical	16.8	13.7

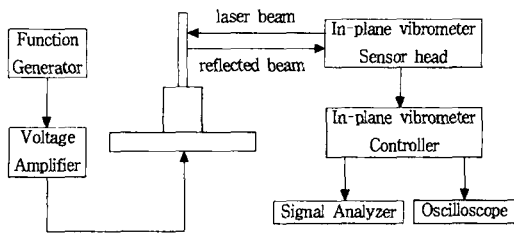


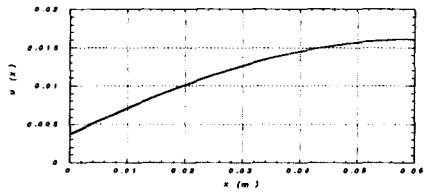
Fig. 6 Schematic diagram of the experimental measurement system.

교류신호로 측정되므로 신호 분석기를 통하여 가진 진동수에서의 속도를 측정하여 다양한 원형 봉의 가진 응답을 측정할 수 있다.

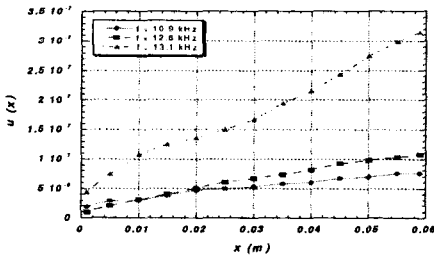
가진 진동수는 제작된 원형 봉이 결합된 랑주방향 비틀림 압전 변환기의 임피던스 측정에서 고유진동수를 측정하여 결정한다. 각 원형 봉에 대한 1차 고유진동수는 Table 4에 나타내었으며, 봉의 형상치수는 균일한 원형 봉의 경우 직경 7.5mm, 길이 60mm로 선정하였으며, 2단 원형 봉과 원추형 테이퍼 봉은 해석과 동일하다.

가진 응답의 변위 측정은 측정된 속도를 시간에 대해 적분하여 얻는다. 균일한 원형 봉은 가진 응답의  $x$ 방향 각 점에서의 속도 측정값과 그 원주방향 변위  $u$ 는 Fig. 7에 그래프로 제시하였다. 균일봉의 측정된 변위의 그래프는 이론적인 해석에 의한 가진응답과 정성적으로 유사한 양상을 보인다.

2단 원형 봉의 측정값은 Fig. 8에 나타내었다. 이론적인 해

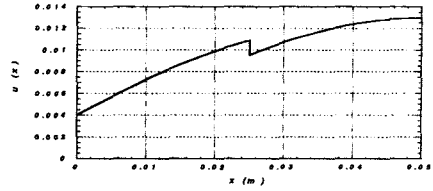


(a) calculated response( $f = 10.9$  kHz)

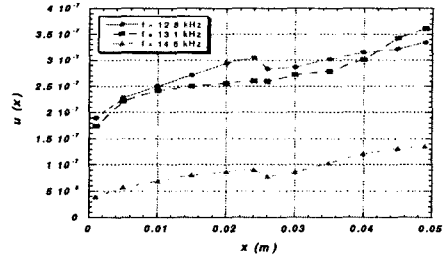


(b) measured response

Fig. 7 Measured and calculated responses of the uniform circular rod.



(a) calculated response( $f = 10.6$  kHz)

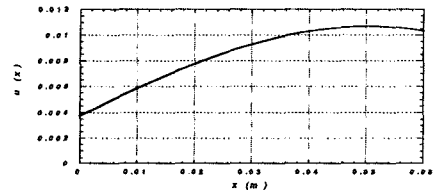


(b) measured response

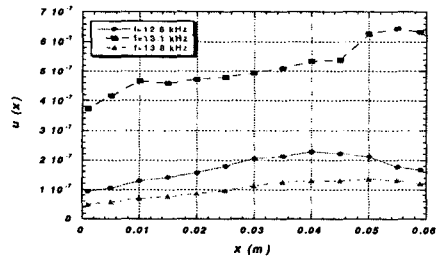
Fig. 8 Measured and calculated responses of the stepped circular rod.

석에 따르면 2단 원형 봉의 경우에 직경의 불연속면인 25mm지점에서 원주방향 변위가 불연속적으로 감소하는 것이 나타난다. 실험에서도 역시 24mm지점과 26mm지점사이에서 원주방향 변위가 감소하는 경향을 보이고 있다.

원추형 테이퍼 봉의 측정값은 Fig. 9에 나타내었다. 이론적으로 해석된 원주방향 변위는 자유로운 끝단에서 직경이 감소하는 영향 때문에 감소한다. 이러한 변위 감소 역시 측정된 원주방향 변위에서도 나타나고 있다.



(a) calculated response ( $f = 13.8$  kHz)



(b) measured response

Fig. 9 Measured and calculated responses of the conically-tapered rod.

## 6. 결 론

2단 원형 봉과 원추형 테이퍼 봉의 비틀림 진동에 대하여, 고유진동 특성과 가진응답을 해석하였다. 여기서 봉의 한쪽은 가진용 변환기가 부착되어 있어 강체에 고정되어 있는 조건으로 간주하고 다른 쪽 끝은 자유로운 상태에서, 엄밀해법과 Rayleigh-Ritz 근사해법으로 고유진동수와 모드형상을 구하였다. 또한 가진될 때의 응답을 엄밀해법으로 구하였다.

해석 결과를 검증하기 위하여, 고유진동수를 측정하는 실험과 가진응답을 측정하는 실험을 행하였다. 해석 모델에서는 봉의 한쪽이 강체에 고정되어 있는 조건이지만, 실험 대상은 변환기에 부착되어 있어 완전히 고정된 상황이 아니므로 고유진동수에 있어서 차이가 크게 나타났다. 그렇지만, 변환기에 의해 한쪽 끝에서 일정한 진폭으로 가진되는 경우의 비틀림 진동응답 측정 결과는 계산 결과와 잘 일치하였다.

해석과 실험을 통해 확인한 바에 따르면, 가진부에서 멀어질수록 봉의 굵기가 가늘어지는 불균일 봉의 비틀림 진동은 균일한 봉의 진동에 비해 더 큰 진폭을 갖는다. 또한 굵은 쪽보다 가는 쪽의 진폭이 더 크다.

## 후 기

본 논문은 ISTEC(주)(구, (주)신창)이 주관한 산업기반기술개발사업의 위탁기술개발 과제를 수행하며 얻은 연구결과임.

## 참 고 문 헌

- (1) Rozenberg, L. D., 1969, *Sources of High-Intensity Ultrasound*, Plenum Press, New York, Vol. 2, p. 125.
- (2) 권오수, 김진오, 2001, "량주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성", 대한기계학회논문집(A), 제25권, 제8호, pp. 1197~1205.

(3) 전한용, 김진오, 2001, "원형 봉의 비틀림 진동과 인접 점성유체의 상호작용", 대한기계학회논문집(A), 심사중.

(4) 이진복, 김희수, 1996, "초음파 트랜스듀서의 종진동을 이용한 알루미늄 와이어 용접", 한국정밀공학회지, 제13권, 제11호, pp. 38~45.

(5) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., New York, pp. 156~161, pp. 211~233.

(6) Meirovitch, L., 1986, *Elements of Vibration Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, Ch. 7.

(7) Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 341~349.

(8) Kim, J. O., Bau, H. H., 1991, "Torsional stress waves in a circular cylinder with a modulated surface," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, No. 3, pp. 710~715.

(9) Wolfram, S., 1988, *Mathematica-A System Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, New York.

(10) Beer, F. P., Johnston, E. R. Jr., 1992, *Mechanics of Materials 2nd ed. in SI units*, McGraw-Hill Book Co., New York, Appendix B.

(11) Li, Q. S., 2000, "Exact Solutions for Longitudinal Vibration of Multi-Step Bars with Varying Cross-Section," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 2, pp. 183~187.

(12) Hildebrand, F. B., 1976, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p. 150.

(13) Drain, L. E., 1980, *The Laser Doppler Technique*, John Wiley & Sons, Chichester, Ch. 5, 7.