

시변하는 간단한 유체기계의 덕트 내 음원 특성에 대한 해석적 연구

이정권*, 장승호**

On the in-duct acoustical source characteristics of a simplified time-varying fluid machine

Jeong-Guon Ih, Seung-Ho Jang

ABSTRACT

Measurement techniques for the in-duct source characteristics of fluid machines can be classified into direct method and load method, according to whether the technique employs an external acoustic source or not. It has been known that the two methods yield different results and the load method used to come up with a negative source resistance, in spite of the fact that a very accurate prediction of radiated noise can be obtained by using any result. This paper is focused to the effect of time-varying nature of fluid machines on the output result. For this purpose, a simplified fluid machine consisting of a reservoir, a valve and a pipe is considered as representing a typical linear, periodic, time-varying system and the measurement techniques are simulated by utilizing the Hill equation and its steady-state forced response. In the load method, the source impedance turns out being dependent on the valve impedance at the calculation frequency and the valve and load impedances at other frequencies as well.

1. 서론

유체 기계의 흡배기계에 대한 소음 해석에는 주파수 영역에서의 선형 음향 이론이 흔히 이용된다. 이때 음원은 선형 시불변 가정을 이용하여 두개의 복소 인자인 음원 강도와 음원 임피던스로 특성화된다. 일반적으로 음원 특성은 실험적인 방법으로 얻어지며, 이들 방법은 외부 음원을 이용하는 여부에 따라서 직접법 (direct method)과 간접법 (indirect method, 또는 부하법 (load method))으로 나누어 진다. 스피커와 송풍기와 같은 간단한 선형 음원인 경우에 매우 정확한 음원 특성을 얻을 수 있음이 알려져 있다 [1-2]. 그러나 압축기와 내연 기관의 흡배기 계에 대한 적용에서는 부하법이 부의 음원 저항을 냄이 보고 되었다 [2-4]. Albertson [5]은 간단한 비선형 계에 대한 연구를 통하여 부의 저항이 쉽게 얻어짐을 보인 바 있고, Peat [6]는 부의 저항에 대한 원인들에 대하여 논의하였다. Peat와 Ih [7]는 비교적 간단한 음원-부하 계에 대한 연구를

통하여 부의 저항이 음원의 시변하는 특성에 기인할 수 있음을 지적하였다.

본 논문에서는 전기-음향 상사를 이용한 해석적인 방법으로 음원의 시변하는 특성이 음원 인자들에 주는 영향에 대하여 살펴본다. 이를 위하여 저장계-밸브-직관 계를 이용하여 선형, 주기적으로 시변하는 (linear, periodically time-varying) 간단한 유체 기계를 구성한다. 이에 대한 등가 회로를 이용하여 음원 특성에 대한 측정 기법들을 해석적으로 모사한다.

2. 전기-음향 모델링

Fig. 1(a)은 저장계-밸브-직관으로 구성된 간단한 선형 음향 계이다. 음원은 압축기나 내연 기관에서 실린더에 흡기관이나 배기관이 연결된 간단한 단일구 계 (one-port system)를 나타낸다. 밸브를 통한 가스 출입으로 인한 실린더 내 질량 변화를 무시할 경우, 실린더는 상수의 내부 압력 P_0 를 가지는 저장계로 고려될 수 있다.

* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과 교수

** 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

2.1a) 부하법의 모사

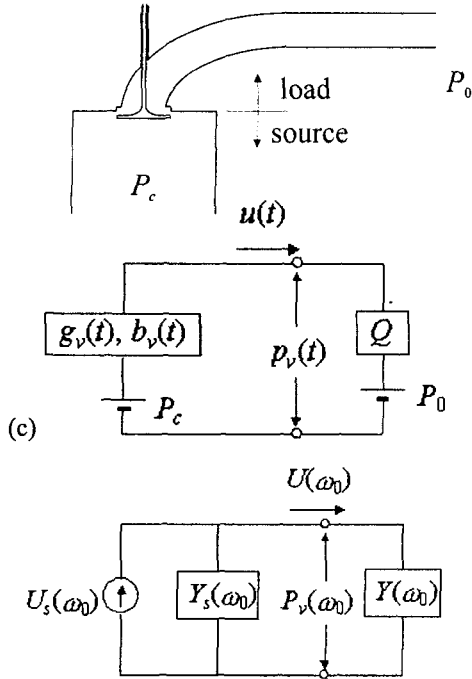


Fig. 1. The reservoir-valve-pipe system for the simulation of load method. (a) Actual system, (b) time domain circuit, (c) source-load representation in frequency domain.

전기-음향 상사로부터 부하법의 모사를 위한 계는 Fig. 1(b)와 같은 등가 회로로 표현될 수 있다. 실린더 압력이 매우 낮은 경우에 전체 계는 선형 계로 근사될 수 있고 밸브를 지나는 유동은 선형 시변 식들로 표현될 수 있다. 즉, 밸브를 지나는 유동은 주기적으로 시변하는 컨덕턴스 (conductance) $g_v(t)$ 와 서셉턴스 (susceptance) $b_v(t)$ 를 이용하여 모델링 될 수 있다. 어드미턴스는 푸리에 시리즈로 다음과 같이 표현된다.

$$g_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_v(n\omega_0) \cos n\omega_0 t, \quad (1a)$$

$$b_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_v(n\omega_0) \cos n\omega_0 t. \quad (1b)$$

여기서, $\omega_0 (=2\pi f_0)$ 는 시변하는 주기에 관련된 기본 각 주파수이다. 밸브를 지나 직관 방향으로의 체적 속도 $u(t)$ 는

$$u(t) = g_v(t)p(t) + \frac{d}{dt}[b_v(t)p(t)] \quad (2)$$

이다. 여기서, $p(t) \equiv P_c - p_v(t)$ 이고, $p_v(t)$ 는 밸브 구 바로 지난 지점에서의 압력이다. 실제 작동하는 내연

기관에서 $g_v(t)$ 와 $b_v(t)$ 의 정확한 값은 해석적으로나 실험적으로 얻기가 매우 어렵다. 만약 밸브가 시불변이고 맥동류가 조화 함수적 ($e^{j\omega t}$)으로 변한다면, 연산자 d/dt 는 $j\omega_n$ 로 되어서, g_v 와 b_v 는 주파수 영역에서 실수부와 허수부에 연관되는 값이 된다. 일반적으로 밸브는 한 주기 중 일부에서 완전히 닫히게 되어 $u(t)$ 는 0이고 밸브 임피던스는 무한 값이 된다. 이러한 이유로 임피던스보다는 어드미턴스 계를 표현하는데 더 적합하다. 부하 어드미턴스 $Y(\omega)$ 가 직관과 끝단을 표현한다면, 음원-부하 접점에서의 압력과 체적 속도는

$$u(t) = Q(t)(p_v(t) - P_0) = Q(t)(P_c - p(t) - P_0). \quad (3)$$

의 관계를 가진다. 여기서, $Q(t)$ 는 시변하는 계수로서 주파수 ω_n 에 대한 부하 어드미턴스 $Y(\omega_n)$ 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$Q(t)\hat{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(\omega_n)\hat{P}(\omega_n)\exp(j\omega_n t). \quad (4)$$

여기서,

$$\hat{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{P}(\omega_n)\exp(j\omega_n t) \quad (n=\text{integer}). \quad (5)$$

식 (2)는

$$b_v(t)\frac{dp(t)}{dt} + \left[g_v(t) + \frac{db_v(t)}{dt} + Q(t) \right] p(t) = Y(0)(P_c - P_0) \quad (6)$$

로 다시 쓰여진다. 식 (6)의 주기적으로 시변하는 계수와 상수 강제 항 (constant forcing term)을 가지는 계는 다음과 같은 정상 상태 해 $p(t)$ 를 가진다 [8].

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n\omega_0)\exp(jn\omega_0 t). \quad (7)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하고 각 주파수 성분별로 정리하면, 양변을 비교하여 $e^{jn\omega_0 t}$ 의 각 계수들을 얻을 수 있다. 상수 항 (영의 주파수)에 대해서는

$$Y(0)(P_c - P_0) = \dots + \frac{1}{2}G_v(\omega_0)P(-\omega_0) + [Y(0) + G_v(0)]P(0) + \frac{1}{2}G_v(\omega_0)P(\omega_0) + \dots \quad (8)$$

이고 $n\omega_0 (n \geq 1)$ 의 주파수에 대해서는

$$0 = [Y(n\omega_0) + G_v(0) + jn\omega_0 B_v(0)]P(n\omega_0) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [G_v(m\omega_0) + jn\omega_0 B_v(m\omega_0)]P((n-m)\omega_0) + P((n+m)\omega_0) \quad (9)$$

이다.

부하법을 이용한 실제 측정에서는 다수의 부하를 음원에 적용하여 각 부하 적용에 따른 음압들을 측정된 후 과결정 역 문제 (overdetermined equation of the inverse problem)을 만들어 해를 구한다.

선형 시불변 음원 모델의 어드미턴스 표현은 음원 강도 $U_s(\omega)$ 와 음원 어드미턴스 $Y_s(\omega)$ 를 이용하여 Fig. 1(c)와 같이 나타낼 수 있다.

$$U_s(\omega) - Y_s(\omega)P_v(\omega) = Y(\omega)P_v(\omega), \quad (10)$$

또는

$$-U_s(\omega) - Y_s(\omega)P(\omega) = Y(\omega)P(\omega). \quad (11)$$

여기서, $P_v(\omega)$ 는 $p_v(t)$ 의 스펙트럼이고, $U_s(\omega) = P_s(\omega)/Z_s(\omega)$, $Y_s(\omega) = 1/Z_s(\omega)$ 이다.

식 (8)과 (9)는 무한개의 항을 가지는 무한개의 수식이므로 음원 인자들을 닫힌 형태 (explicit form)로 얻어내기가 일반적으로 불가능하다. 그러나 몇몇 제한 조건 또는 근사를 통하여 음원 인자들을 해석적으로 유도하는 것이 가능하다. 가장 간단한 제한 조건은 정상 성분 (영의 주파수 성분)이 가장 주요하고 다른 주파수 성분은 무시할 만큼 작다고 하는 것이다. 그러나 이 경우는 어느 고조파 성분도 음원 강도를 영으로 만든다.

영과 ω_0 의 두 주파수 성분이 다른 성분에 비하여 주요하다고 하면, 식 (8), (9)와 (11)로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} -U_s(\omega_0) - Y_s(\omega_0)P(\omega_0) &= Y(\omega_0)P(\omega_0) \\ &= -\frac{1}{2}[G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]P(0) - [G_v(0) + j\omega_0 B_v(0)]P(\omega_0) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{Y(0)(P_c - P_0)[G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]}{Y(0) + G_v(0)} \\ &\quad - \left\{ G_v(0) + j\omega_0 B_v(0) - \frac{G_v(\omega_0)[G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]}{4[Y(0) + G_v(0)]} \right\} P(\omega_0). \end{aligned} \quad (12)$$

영의 주파수에서 부하 어드미턴스를 $Y(0) = G(0) - jB(0)$ 로 표시하면, 음원 인자들은

$$J_s(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{Y(0)(P_c - P_0)[G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]}{G(0) + G_v(0) + jB(0)}, \quad (13)$$

$$G_s(\omega_0) = G_v(0)$$

$$= \frac{[G_v(\omega_0)]^2 [G(0) + G_v(0)] + \omega_0 G_v(\omega_0) B_v(\omega_0) B(0)}{4\{[G(0) + G_v(0)]^2 + [B(0)]^2\}}, \quad (14)$$

$$B_s(\omega_0) = \omega_0 B_v(0)$$

$$= \frac{\omega_0 G_v(\omega_0) B_v(\omega_0) [G(0) + G_v(0)] - [G_v(\omega_0)]^2 B(0)}{4\{[G(0) + G_v(0)]^2 + [B(0)]^2\}} \quad (15)$$

이 된다. 여기서, $G_s(\omega_0)$ 와 $B_s(\omega_0)$ 는 음원 어드미턴스의 실수부와 허수부이다. 식 (13)에서 음원 강도는 실린더 압력과 대기압의 차이에 비례한다. 음원 인자들은 계산되는 주파수의 벨브 임피던스 뿐만 아니라 다른 주파수의 벨브와 부하 임피던스와 상관한다. 식 (14)에서 우변의 두 번째 항이 첫 번째 항보다 더 크다면 음원 어드미턴스 (혹은 그 역인 음원 임피던스)의 실수부가 음수가 된다. 세 개의 주파수 0, ω_0 과 $2\omega_0$ 에서의 압력 성분이 주요하다면,

음원 인자들은 식 (8), (9)와 (11)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$U_s(\omega_0) = \frac{(1-2A_2)}{2(1-A_1A_2)} \times \frac{Y(0)(P_c - P_0)[G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]}{Y(0) + G_v(0)}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y_s(\omega_0) &= [G_v(0) + j\omega_0 B_v(0)] \\ &\quad - \frac{(1-2A_2)}{4(1-A_1A_2)} \times \frac{[G_v(\omega_0) - G_v(2\omega_0)A_2][G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)]}{[Y(0) + G_v(0)]} \\ &\quad - \frac{A_2}{2} [G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)] \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$A_1 = \frac{G_v(2\omega_0)}{Y(0) + G_v(0)}, \quad (18a)$$

$$A_2 = \frac{G_v(2\omega_0) + j2\omega_0 B_v(2\omega_0)}{4[Y(2\omega_0) + G_v(0) + j2\omega_0 B_v(0)]}, \quad (18b)$$

$$A_3 = \frac{G_v(\omega_0) + j2\omega_0 B_v(\omega_0)}{2[Y(2\omega_0) + G_v(0) + j2\omega_0 B_v(0)]}. \quad (18c)$$

무시할 수 없는 다른 주파수 성분을 더 추가하고자 한다면 유사한 방법으로 음원 인자들을 구할 수 있다. 또한 주파수 $n\omega_0$ 에서의 음원 특성들을 식 (8), (9)와 (11)을 이용하여 같은 방법으로 구할 수 있다. 본 절에서 구한 음원 인자들은 음원-부하 접점이 벨브 구 바로 지난 지점일 때의 값들이다. 관 내 다른 지점을 음원-부하 접점으로 하였다면, 두 지점 사이에 대한 4단자정수를 이용하여 벨브 구의 음원 인자 값들로부터 새로운 지점의 음원 인자 값들을 계산할 수 있다. 그러나 앞에서 언급한 음원 저항의 경향은 직관 다른 부분에서도 같게 적용된다.

2.2. 직접법의 모사

직접법 모사를 위한 Fig. 2(a)와 같은 음향 계의 등가 회로를 Fig. 2(b)에 보였다. 직접법에서 필요로 하는 추가적인 외부 음원은 강도 U_e 이고 작동 각주파수는 ω_e 이다. 앞의 부하법에 대한 해석 방법이 직접법의 해석에도 같은 방법으로 적용된다. 이 때 체적 속도 $u(t)$ 의 방향은 부하법에서와 반대로 정의되는데, 이것은 음원 방향으로 수동적인 특성인 어드미턴스 또는 임피던스가 측정되기 때문이다. $p(t)$ 를 $p_c(t)P_c$ 로 정의하면 식 (2)가 여전히 성립한다. 식 (3)의 수식은 다음과 같이 다시 쓰여진다.

$$-u(t) = -U_e \exp(j\omega_e t) + Q(t)(p(t) + P_c - P_0). \quad (19)$$

식 (2)와 (19)로부터 다음의 관계를 쉽게 유도할 수 있다:

$$\begin{aligned} b_v(t) \frac{dp(t)}{dt} + \left[g_v(t) + \frac{db_v(t)}{dt} + Q(t) \right] p(t) \\ = U_e \exp(j\omega_e t) - Y(0)(P_c - P_0) \end{aligned} \quad (20)$$

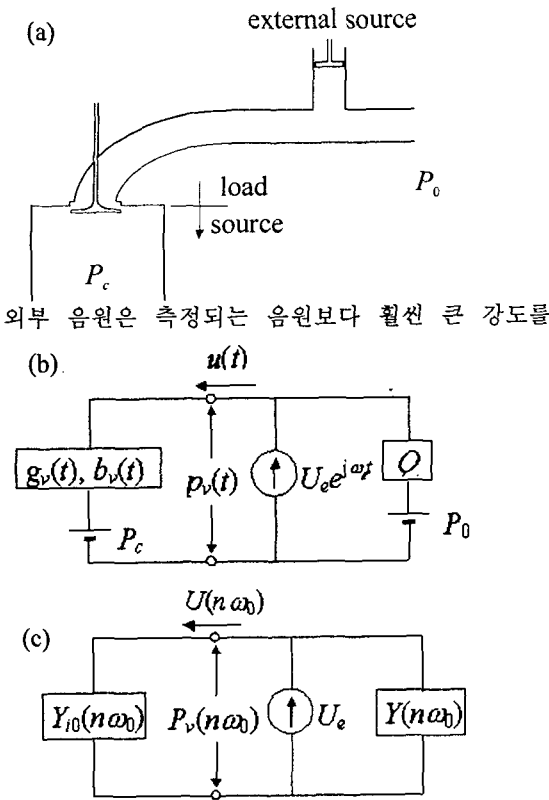


Fig. 2. The reservoir-valve-pipe system for the simulation of direct method. (a) Acutal system, (b) time domain circuit, (c) frequency domain circuit.

가지므로 ($U_e \gg Y(0)(P_c - P_0)$), 식 (20)은 주기적으로 시변하는 계수와 조화함수를 강제 함수로 가지는 계가 된다. 그 정상상태 해 $p(t)$ 는

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\omega_e + n\omega_0) \exp[j(\omega_e + n\omega_0)t]. \quad (21)$$

로 주어진다 [8]. 식 (21)을 식 (20)에 대입하고 각 주파수 별로 확장하면, 주파수 ω_e 에 대하여 다음의 관계를 얻는다:

$$U_e = \dots + \frac{1}{2} [G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)] P(\omega_e - \omega_0) + [Y(\omega_e) + G_v(0) + j\omega_e B_v(0)] P(\omega_e) + \frac{1}{2} [G_v(\omega_0) + j\omega_0 B_v(\omega_0)] P(\omega_e + \omega_0) + \dots \quad (22)$$

ω_e 의 주파수로 작동하는 외부 음원에 의한 음장이 주요하므로, 다른 주파수 성분들은 무시할 수 있고, 식 (22)는 근사적으로

$$U_e \approx [Y(\omega_e) + G_v(0) + j\omega_e B_v(0)] P(\omega_e). \quad (23)$$

이 된다. 주파수 $n\omega_0$ 에 대한 음원 인자들을 결정하기 위하여, 외부 음원의 작동 주파수 ω_e 를 관심 주파수로 변화시키게 된다. Fig. 2(c)에 보인 바와 같은 주파수 영역 해석을 위한 등가 회로를 고려하여, 입력 어드미턴스 Y_{in} 가 음원 어드미턴스가 된다:

$$Y_s(n\omega_0) = Y_{in}(n\omega_0) = \frac{U_e - P_v(n\omega_0)Y(n\omega_0)}{P_v(n\omega_0)} \quad (24) \\ = \frac{U_e - P(n\omega_0)Y(n\omega_0)}{P(n\omega_0)} \approx G_v(0) + jn\omega_0 B_v(0).$$

음원 어드미턴스는 0차의 밸브 어드미턴스에 주로 상관하고, 실린더 압력과는 관계하지 않는다. 식 (24)에서 음원 컨덕턴스 (또는 음원 저항)는 항상 양의 값을 가진다.

만일 밸브가 시간에 따라 거의 변하지 않는다면, 식 (14), (15), (17)과 (24)에서 부하법과 직접법으로 얻어지는 음원 어드미턴스는 $Y_s(\omega_0) \approx G_v(0) + j\omega_0 B_v(0)$ 로 동일하게 된다. 이것은 $n \geq 1$ 에 대하여 $G_v(n\omega_0) \approx 0$, $B_v(n\omega_0) \approx 0$ 이고 $g_v(t) \approx G_v(0)$, $b_v(t) \approx B_v(0)$ 이 되기 때문이다. 그러나 본 절에서 다루는 간단한 음원 계의 경우에는 식 (13)과 (16)에서 음원 강도 $U_s(\omega_0)$ 가 거의 0이 된다. 즉, 밸브 운동에 의한 맥동류가 발생하지 않으며, 이것은 논의의 여지가 없는 경우 (trivial case)이다.

3. 결론

덕트 내 음원 특성의 주요 측정 기법인 직접법 및 부하법을 선형이고 주기적으로 시변하는 밸브 요소를 가지는 간단한 배기계에 대하여 전기-음향 유사 회로 모델링을 통하여 모사하였다. 부하법의 결과는 음원 강도가 실린더 내외 대기 압력 차이에 비례하게 나타나고, 음원 인자들은 계산되는 주파수의 밸브 임피던스 뿐만 아니라 다른 주파수의 밸브 및 부하 임피던스에 의존한다. 부하법은 부의 음원 저항을 낼 수 있으나, 직접법은 항상 양의 음원 저항을 낸다. 직접법의 음원 임피던스는 주로 0차 밸브 임피던스에 의존한다. 이러한 모사 결과들은 여러 압축기 및 내연 기관 엔진의 흡배기 계에 대한 측정 결과들의 경향과 같다. 부하법과 직접법의 결과들의 차이는 음원의 시변적인 특성이 주요 원인이라고 할 수 있다.

참고문헌

- (1) M. L. Munjal, 1987, *Acoustics of ducts and mufflers*, Wiley-Interscience.
- (2) S.-H. Jang and J.-G. Ih, 2000, "Refined multi-load method for measuring acoustical source characteristics of an intake or exhaust system," *Journal of the*

- Acoustical Society of America*, Vol. 107, pp. 3217-3225.
- (3) F. Albertson and H. Bodén, 1999, "Method for prediction of sound generation from the IC-engine exhaust," *Proc. of 6th International Congress on Sound and Vibration*, pp. 1961–1966.
 - (4) V. H. Gupta and M. L. Munjal, 1992, "On numerical prediction of the acoustic source characteristics of an engine exhaust system," *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 92, pp. 2716–2725.
 - (5) F. Albertson, 1999, "On impedances of a simple harmonic oscillator and acoustic impedances in pipes with mean flow," Report TRITA-FKT 1999:21, Department of Technical Acoustics, Royal Institute of Technology, Stockholm.
 - (6) J.-G. Ih and K. S. Peat," On the causes of negative impedance in the measurement of intake and exhaust noise sources," To appear in *Applied Acoustics* (2001).
 - (7) K. S. Peat and J.-G. Ih, 2001, "An analytical investigation of the indirect measurement method of estimating the acoustic impedance of a time-varying source," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 244, pp. 821-835.
 - (8) D. G. Tucker, 1964, *Circuits with periodically-varying parameters, including modulators and parametric amplifiers*, Van Nostrand, Princeton.