

폐환 제어를 이용한 시스템 규명

°정훈상*, 박영진*

System identification using the feedback loop

°HUNSANG JUNG* AND YOUNGJIN PARK*

Abstracts : Identification of systems operating in closed loop has long been of prime interest in industrial applications. The fundamental problem with closed-loop data is the correlation between the unmeasurable noise and the input. This is the reason why several methods that work in open loop fail when applied to closed-loop data. The prediction error based approaches to the closed-loop system are divided to direct method and indirect method. Both of direct and indirect methods are known to be applied to the closed-loop data without critical modification. But the direct method induces the bias error in the experimental frequency response function and this bias error may deteriorates the parameter estimation performance

Keywords : system identification, closed loop system, prediction error method

1. 서론

폐환 제어 루프가 내재해 있는 시스템의 특성 파악은 시스템 규명(system identification)의 한 갈래로 많은 연구가 수행되어 왔다⁽¹⁾⁻⁽²⁾. 실제로 불안정한 시스템의 특성을 파악하기 위해서는 폐환 제어를 달아서 일단 시스템을 안정하게 할 필요가 있고 전체 시스템의 특성상 제어기만을 제거할 수 없는 경우도 있으며 최근에는 인위적인 제어 루프를 통해 시스템 규명을 하는 연구도 진행되고 있다. 폐환 루프가 걸린 시스템에서 얻어지는 데이터의 가장 큰 문제점은 측정할 수 없는 출력 쪽의 잡음 혹은 외란과 입력 사이에 생기는 상관값(correlation)에 있다. 시스템 규명의 방법론은 대략 예측 오차 방법(prediction error method)⁽³⁾, 부분 구조법(subspace approaches)⁽⁴⁾ 그리고 spectral analysis⁽⁵⁾로 나누어지게 되는데 이 상관값 문제로 subspace approach와 spectral analysis는 직접적으로 사용할 수 없고 수정이 필요하다고 알려져 있다. 시스템의 모델 계수를 얻기 위해 일반적으로 널리 사용되는 예측 오차 방법을 제어 루프가 걸려 있는 시스템에 적용하는 데는 직접 방법(direct method)과 간접 방법(indirect method)으로 나누어진다. 직접 방법은 그림 1에서 실제 시스템에 들어가는 입력 u 와 시스템 출력 y 를 데이터로 사용하는 것으로 제어 루프를 제외한 원래 시스템이 대상이 된다. 때문에 이 방법은 제어 루프를 정확하게 몰라도 사용이 가능하다는 장점이 있다. 간접 방법은 기준 입력 r 과 시스템 출력 y 를 데이터로 사용하는 것으로 대

상 시스템은 제어기를 포함한 폐루프 시스템이 된다. 때문에 기준 입력 r 에 대한 정보가 필요하고 구해진 폐루프 시스템과 제어기 정보로부터 원래 시스템을 복원하는 과정이 필요하다.

기존의 연구⁽⁶⁾에 의하면 예측 오차 방법은 제어 루프가 걸려 있는 시스템에 대해서도 사용될 수 있다고 알려져 있다. 하지만 예측 오차 방법을 직접 방법을 통해 사용할 경우 입 출력 사이에 출력 잡음 및 외란에 의한 상관성이 생기고 이 때문에 개루프 시스템에 대한 모델 계수 예측에는 존재하지 않는 편향 오차(bias error)가 생기게 된다. 본 논문에서는 예측 오차 방법에서 사용되는 시간 영역 성능 지수의 주파수 영역 변환을 통해 직접 방법을 적용할 때 측정 잡음이나 외란에 의해 주파수 응답 함수(frequency response function)에 추가적인 편향 오차가 발생함을 유도하고 이로 인해 추정된 모델 계수들에 편향 오차가 더욱 커져서 시스템 규명 성능이 떨어질 수 있음을 시뮬레이션을 통해 검증하도록 한다.

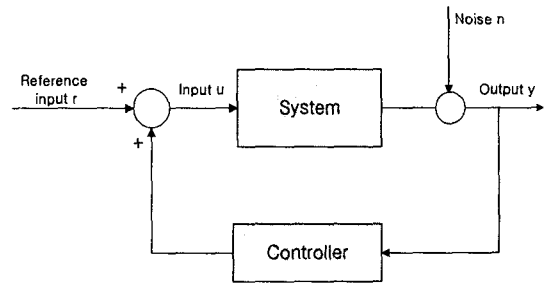


Figure 1 System configuration

* Member, Dept. of Mechanical Engineering, KAIST, Taejon, 305-701, Korea

2. 본론

2.1 예측 오차 방법

시스템 규명을 위한 데이터를 다음과 같이 표현한다.

$$Z^N = \{u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)\} \quad (1)$$

$u(t)$ 와 $y(t)$ 는 각각 시스템 입력과 출력을 의미한다. 이 데이터가 만들어진 실제 시스템은 선형의 시불변으로 causality 를 만족한다고 가정하고 다음과 같이 표현된다.

$$y(t) = G_o(q)u(t) + v(t), \quad v(t) = H_o(q)e(t). \quad (2)$$

$G_o(q)$ 와 $H_o(q)$ 는 각각 대상 시스템과 노이즈 특성을 나타내고 $e(t)$ 는 평균이 0 인 백색 잡음이고 q 는 전환 연산자(shift operator)이다. 우리가 잡은 모델 구조는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t). \quad (3)$$

$G(q, \theta)$ 와 $H(q, \theta)$ 는 각각 시스템 모델과 노이즈 모델을 나타내고 θ 는 구하고자 하는 모델 계수의 벡터이다. 이 모델 구조에 대해 1 스텝 예측값은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{y}(t|\theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + (1 - H^{-1}(q, \theta))y(t) \quad (4)$$

이 때, 예측 오차는 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) = H^{-1}(q, \theta)(y(t) - G(q, \theta)u(t)). \quad (5)$$

식 (3)과 같이 주어진 모델과 데이터 Z^N 으로 부터 모델 계수 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in D_M} V_N(\theta, Z^N), \quad (6)$$

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_F^T(t, \theta) \Lambda \varepsilon_F(t, \theta), \quad (7)$$

$$\varepsilon_F(t, \theta) = L(q, \theta) \varepsilon(t, \theta). \quad (8)$$

구해지는 모델 계수는 주어진 시간 영역 성능 지수를 최소화시키는 값으로 결정된다. 여기서 Λ 와 $L(q, \theta)$ 는 각각 정정값의 가중치 행렬이고 오차 필터로 특정 주파수 영역을 강조하기 위해 사용될 수 있다.

2.2 성능 지수 주파수 영역 변환

위의 식 (6)에서 가중치 행렬이 단위 행렬이고 오차 필터가 없는 경우에 대해 주파수 영역으로 변환하도록 한다.

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^T(t, \theta) \varepsilon(t, \theta), \quad (9)$$

$E_N(2\pi k/N, \theta), k=0, \dots, N-1$ 를 $\varepsilon(t, \theta)$ 의 이산 푸리에 변환(Discrete Fourier Transform)이라고 하면 식 (9)는 parseval 의 관계에 따라 다음과 같이 변환된다.

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} |E_N(2\pi k/N, \theta)|^2 \quad (10)$$

$w(t, \theta)$ 를 다음과 같이 정의하면 $w(t, \theta)$ 의 DFT 는 식 (12)와 같다.

$$w(t, \theta) = G(q, \theta)u(t) \quad (11)$$

$$W_N(\omega, \theta) = G(\omega, \theta)U_N(\omega) + R_N(\omega), \quad |R_N(\omega)| < \frac{C}{\sqrt{N}} \quad (12)$$

이 관계를 이용하면

$$E_N(\omega) = H^{-1}(\omega, \theta)(Y_N(\omega) - W_N(\omega, \theta)) + \tilde{R}_N(\omega), \quad (13)$$

$$|\tilde{R}_N(\omega)| < \frac{C}{\sqrt{N}}$$

식 (10)은 다음과 같이 변화된다.

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} |\hat{G}_N(\omega_k) - G(\omega_k, \theta)|^2 \times Q_N(\omega_k, \theta) + \bar{R}_N \right\} \quad (14)$$

$$Q_N(\omega_k, \theta) = \frac{|U_N(\omega_k)|^2}{|H(\omega_k, \theta)|^2} \quad (15)$$

$$\hat{G}_N(\omega_k) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \quad (16)$$

$\hat{G}_N(\omega_k)$ 는 측정 주파수 응답 함수이고 $Q_N(\omega_k, \theta)$ 은 각 주파수에서의 가중치 함수로 입력치와 측정 잡음 사이의 비로서 정의되어 있다. 결국 예측 오차 성능 지수는 시스템 모델과 측정 주파수 응답 특성의 차이를 줄이도록 모델 계수들을 정해주는 방법임을 알 수 있다. 측정 주파수 응답 함수는 기본적으로 편향 오차가 없는 측정값이기 때문에 데이터의 개수가 충분히 많다면 \bar{R}_N 이 0 으로 가면서 구해진 모델 계수들에 포함된 편향 오차는 매우 작게 된다.

2.3 주파수 응답 함수의 편향 오차

그림 1 에서 궤환 루프가 작동하는 경우 측정 주파수 응답 함수의 변화에 대해 살펴보자. 궤환 루프가 걸린 경우 시스템 입력과 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{1 + K(\omega)G_o(\omega)} R_N(\omega) - \frac{K(\omega)}{1 + (\omega)G_o(\omega)} N(\omega) \quad (17)$$

$$Y_N(\omega) = \frac{G_o(\omega)}{1 + K(\omega)G_o(\omega)} R_N(\omega) + \frac{1}{1 + K(\omega)G_o(\omega)} N(\omega) \quad (18)$$

$$\hat{G}_N(\omega_k) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} = \frac{G_o(\omega)R_N(\omega) + N(\omega)}{R_N(\omega) - K(\omega)N(\omega)} \quad (19)$$

개루프 시스템의 경우 $\hat{G}_N(\omega_k)$ 은 출력쪽에만 측정 잡음의 영향이 포함되어 있기 때문에 측정 잡음의 평균값이 0 일 경우 편향 오차는 발생하지 않는다. 하지만 폐환 루프가 걸린 경우에 $\hat{G}_N(\omega_k)$ 은 개루프 시스템의 경우와 달리 입출력 양쪽에 측정 잡음의 영향이 포함되어 있다. 측정 잡음의 크기가 기준 신호의 크기에 비해 상대적으로 작을 경우 Taylor 전개가 가능하다.

$$\hat{G}_N(\omega_k) = \frac{G_o R_N + N}{R_N - KN} \cong \frac{G_o R_N + N}{R_N} \left(1 + \frac{KN}{R_N} - \frac{1}{2} \left(\frac{KN}{R_N} \right)^2 + \dots \right) \quad (20)$$

$$\cong \frac{G_o R_N + N}{R_N} \left(1 + \frac{KN}{R_N} \right) = G_o + \frac{(1 + KG_o)N}{R_N} + \frac{KN^2}{R_N^2}$$

$$E(\hat{G}_N(\omega_k)) = G_o(\omega_k) + E\left(\frac{K(\omega_k)N^2(\omega_k)}{R_N^2(\omega_k)} \right) \quad (21)$$

식 (21)에 의하면 폐환 루프가 걸려 있는 경우 측정 주파수 응답 함수는 항상 편향 오차를 포함하게 됨을 확인할 수 있다. 식 (14)에서 측정 주파수 응답 함수가 편향 오차를 포함할 경우 모델 계수의 추정값에도 편향 오차의 특성이 포함되게 될 것이다.

3. 시뮬레이션 결과

다음과 같이 전달 함수 형태로 정의되어 있는 시스템에 대해 살펴보도록 하자. 이 시스템은 2.306Hz, 3.261Hz, 4.853Hz 에 공진 주파수를 가진다.

$$G_o(s) = \frac{1000s^3}{s^6 + 183s^5 + 1561s^4 + 1794s^3 + 6.75e^5s^2 + 3.71e^5s + 8.2e^7} \quad (22)$$

이 시스템을 20Hz 의 샘플링으로 z 영역으로 변환시키면 다음과 같다.

$$G_o(z) = 0.001 \frac{1.66z^5 + 0.39z^4 - 9.56z^3 + 9.7z^2 - 612.6z - 1.59}{z^6 - 2.59z^5 + 4.65z^4 - 5.16z^3 + 4.5z^2 - 2.43z + 0.91} \quad (23)$$

출력쪽에 신호대 잡음비 10dB 인 백색 잡음이 포함될 경우에 대해 시뮬레이션을 수행하였다. 이 경우 모든 주파수영역에 대해 같은 크기의 잡음이

들어가기 때문에 $H_o(q)=1$ 이고 구해야 하는 모델 계수는 식 (23)의 분모 및 분자의 모든 계수들로 총 12 개가 된다. 제어 루프가 없는 경우와 있는 경우에 대해 같은 기준 입력과 측정 잡음을 사용하였다. 폐환 제어기는 다음과 같은 임의의 FIR 형태의 제어기를 달아주고 직접 방법(direct method) 관점에서 같은 출력 잡음에 대해 시뮬레이션을 수행한다. 샘플의 개수는 50000 개로 충분히 많은 경우이고 40 번의 반복 실험을 통해 모델 계수 오차의 평균과 분산을 계산하였다.

$$K(z) = -3.845z^{-1} - 0.261z^{-2} + 0.068z^{-3} \quad (24)$$

그림 (2)와 (3)은 개루프 시스템과 폐루프 시스템의 데이터를 이용하여 주파수 응답 함수의 평균값을 구한 것이다. 개루프 시스템의 결과에 비해 폐루프 시스템의 경우 주파수 응답 함수의 편향 오차가 크음을 확인할 수 있다. 그림 (4)는 각 모델 계수들의 편향 오차를 도시한 것이다. 1 번부터 6 번까지는 식 (27)의 분모의 계수들에 해당하고 7 번부터 12 번까지는 분자의 계수들에 해당한다. 개루프 시스템에 비해 폐루프 시스템인 경우가 더 큰 편향 오차를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 그림 (5)는 식 (23)의 분모의 z^5 항의 모델 계수를 추정할 때 매 실험시 나타나는 오차를 도시한 것이다. 역시 폐루프 시스템의 경우가 편향 오차뿐만 아니라 분산도 더 커짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 직접 방법을 사용할 때 측정 잡음과 입력의 상관성 때문에 편향된 주파수 응답 함수가 나타나고 이를 이용하여 구해진 모델 계수들은 개루프 시스템에 비해 큰 오차를 가지게 되어 시스템 규명 성능이 떨어지게 된다.

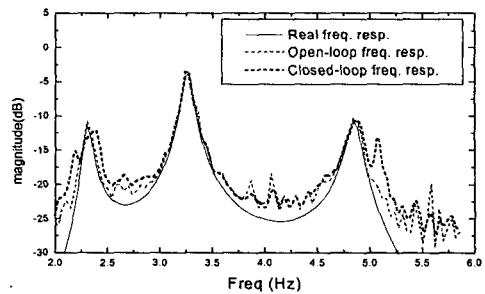


Figure 2 Frequency response function

시스템의 특성이 변화하게 된다. 이 때 케환 이득 값을 통해 시스템을 어떻게 변형시켜 주는 것이 모델 계수의 추정에 유리한 것인지에 대한 연구가 수행되어야 할 것이다.

5. 참고 문헌

- (1) L. Ljung, I. Gustavsson, and T. Söderström, 1974, "Identification of linear multivariable systems under linear feedback control" IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-19, pp.836-841.
- (2) P. E. Wellstead and J. M. Edmunds, 1975, "Least-square identification of closed-loop systems", Int. J. Contr., vol. 21, no. 4, pp. 689-699
- (3) Ljung, L., 1987, System identification : theory for the user. Eaglewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall.
- (4) Van Overschee, P., & De Moor, B., 1996, Subspace identification for linear systems. Dordrecht: Kluwer
- (5) Brillinger, D. R., 1981, Time series: Data analysis and theory. San-Francisco, CA:Holden-Day
- (6) Söderström, T., & Stoica, P., 1989, System identification. Eaglewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall

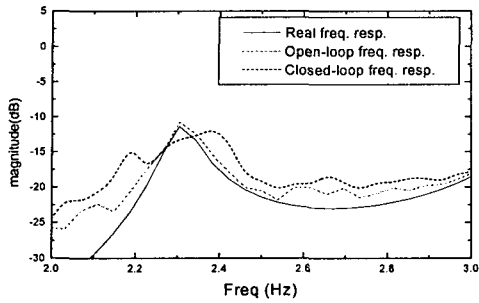


Figure 3 Frequency response function

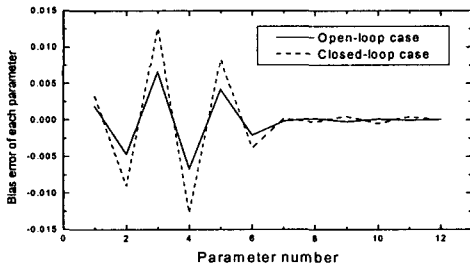


Figure 4 Bias error of each parameter

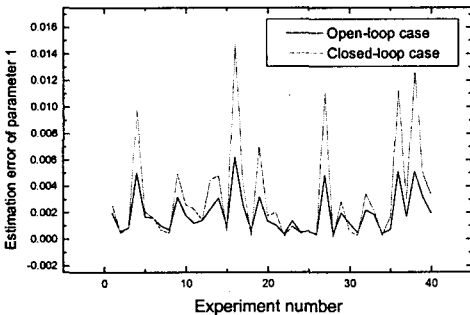


Figure 5 Estimation error of parameter 1

4. 결론 및 향후 연구

페루프 시스템의 모델 계수를 추정하기 위해 예측 오차를 직접 방법을 통해 적용할 경우 측정 주파수 응답 함수에 편향 오차가 발생함을 확인하였다. 이 편향 오차에 의해 페루프 시스템의 시스템 규명을 위해서 직접 방법을 사용할 경우 모델 계수의 편향 오차가 증가할 수 있다. 간접 방법을 사용할 경우 이 문제는 피할 수 있는데 이 경우