

회전하는 얇은 링의 진동해석을 위한 비선형 모델링

Non-linear Modelling for the Vibration Analysis of a Rotating Thin Ring

°김원석* · 정진태**

Wonsuk Kim, Jintai Chung

Key Words : Rotating Ring (회전링), Geometric Non-linearity (기하학적 비선형성),
Out-of-plane Flexural Vibration (면외 굽힘 진동)

ABSTRACT

Free non-linear vibration of a rotating thin ring with a constant speed is analyzed when the ring has both the in-plane and out-of-plane motions. The geometric non-linearity of displacements is considered by adopting the Lagrange strain theory for the circumferential strain. By using Hamilton's principle, the coupled non-linear partial differential equations are derived, which describe the out-of-plane and in-plane bending, extensional and torsional motions. The natural frequencies are calculated from the linearized equations at various rotational speeds. Finally, the computation results from three non-linear models are compared with those from a linear model. Based on the comparison, this study recommends which model is appropriate to describe the non-linear behavior more precisely.

1. 서론

링(ring)은 자동차 또는 비행기의 타이어, 기어, 회전속도계 (rate-sensors) 그리고 환형의 보강재 등과 같은 축대칭 기계요소 및 장치들의 기본적인 동특성을 매우 잘 표현해주기 때문에 관심의 대상이 되어 왔다. 정지 또는 회전하는 링의 진동 특성에 대한 많은 연구 결과들이 발표 되었는데, 예를 들어 Rao와 Sundararajan⁽¹⁾ 그리고 Kirkhope⁽²⁾는 권형의 선형성을 가정한 후 정지된 링의 면내진동을 연구하였다. 이에 반하여 정지된 링의 비선형

면내 진동은 Evensen⁽³⁾에 의해서 다루어 졌다. 정지된 링의 면내 진동해석과 더불어, 회전하는 링의 면내진동에 관한 연구들도 활발히 이루어 졌다. Carrier⁽⁴⁾는 회전하는 링의 선형 진동을 연구하였고, Huang과 Soedel⁽⁵⁾, Natsiavas⁽⁶⁾ 그리고 Bickford와 Reddy⁽⁷⁾는 비선형 진동에 대한 연구 결과들을 발표하였다. 다른 한편, 면외방향 진동에 대한 연구들도 수행 되었는데, 대부분은 정지된 링을 대상으로 하였다. Kirkhope⁽⁸⁾, Lee와 Chao⁽⁹⁾는 선형 모델들을 이용한 연구결과를 발표하였고, Maganty와 Bickford⁽¹⁰⁾는 비선형 모델을 이용하여 정지된 링에 대한 연구를 수행하였다. 회전하는 링의 면외방향 진동에 관해서는 Eley 등⁽¹¹⁾의 연구가 발표 되었는데, 그들의 연구에서는 다축 속도 센서(multi-axis rate sensor)에 대한 코리올리 (Coriolis) 연성 효과가 검토 되었다. 그러나, 회전

* 한양대학교 BK21 기계분야 사업단
E-mail : wonsuk@hanyang.ac.kr
Tell : (02)2291-2135, Fax : (02) 2299-1485

** 정회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

하는 링의 비선형 면의진동에 대한 연구는 지금까지 발표된 바가 없다.

면내 및 면외방향 변위간의 연성에 의해서 야기되는 비선형성은 회전하는 링의 면의진동 해석에 있어서 반드시 고려되어야 한다. 이는 비선형성이 회전에 의한 링의 강성효과(stiffening effect)와 관련이 있기 때문이다. 본 논문에서는 일정한 속도로 회전하는 얇은 링의 자유진동 특성에 대한 연구가, 면내 및 면외방향 변위의 연성과 비선형성을 고려하여 수행 되었다. 변형의 기하학적 비선형성을 고려하기 위해 원주방향에 대하여 Lagrange 변형률 이론이 사용되었고, Hamilton의 원리를 이용하여 면내 및 면외 굽힘, 인장 및 비틀림 운동에 대한 비선형 방정식이 유도되었다. 또한 섭동법(perturbation method)을 사용하여 평형위치와 선형화된 방정식을 구한 후, 이를 바탕으로 회전 속도에 따른 고유 진동수의 변화가 계산 되었다. 최종적으로 몇몇 비선형 모델들에 기초한 계산 결과와 선형모델의 결과가 비교되었고, 이들 사이의 차이점들이 논의 되었다.

2. 운동 방정식

Figure 1(a)는 Z 축에 대하여 일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있는 구속되지 않은 링이다. 여기서, XYZ 는 공간상에 고정된 관성 좌표계이고, $r\theta z$ 는 원통 좌표계이다. θ 는 X 축으로 부터 반시계 방향으로 측정되었고, R 은 변형되지 않은 링의 평균 반경이다. Figure 1(b)는 링의 단면을 나타내며, h와 b는 각각 링의 높이와 폭이다. 여기서, xyz는 링에 고정된 회전 좌표계이다.

굽힘 진동의 해석을 위해서는 Euler-Bernoulli 보이론이 사용되었다. y 축에 수직인 링의 단면은 변형 후에도 평면이라 가정하였고, 링의 높이와 폭이 반지름에 비해서 매우 작기 때문에 전단 변형에 의한 굽힘은 무시하였다. 이로부터, 임의의 한 점의 변위는 r, θ , z 방향에 대해 각각 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_r &= u(\theta, t) + z\phi(\theta, t) \\ u_\theta &= v(\theta, t) + x\phi_1(\theta, t) - z\phi_2(\theta, t) \\ u_z &= w(\theta, t) - x\phi(\theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

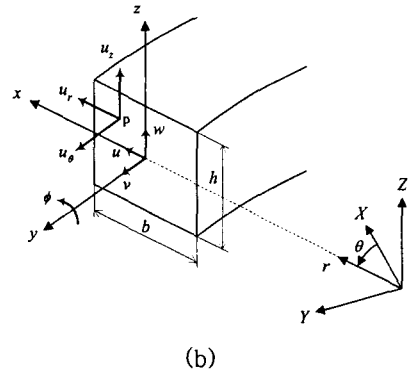
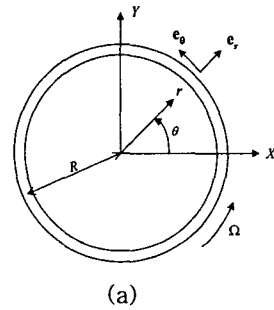


Figure 1. Unconstrained thin ring rotating at constant speed Ω : (a) top view and (b) the cross-section.

여기서 t는 시간을 나타내고, u, v, w는 도심선(centroidal line) 상의 한 점에 대해 각각 반경방향(radial), 원주방향(circumferential) 그리고 면외방향(out-of-plane) 변위들이다. ϕ 는 y 축에 대한 비틀림각(twist angle)이고, ϕ_1 는 면내방향(in-plane) 굽힘에 의한 z 축에 대한 회전각, ϕ_2 는 면외방향 굽힘에 의한 x 축에 대한 회전각이다. 회전각 ϕ_1 와 ϕ_2 는 다음과 같이 표현될 수 있다.^(1,6,11)

$$\phi_1 = (v - u')/R, \quad \phi_2 = w'/R \quad (2)$$

여기서 프라임(prime)은 θ 에 대한 편미분을 의미한다.

기하학적 비선형성은 일반적으로 Lagrange 변형률 이론을 사용하여 표현할 수 있다. 원통좌표계(cylindrical coordinates)에 대한 Lagrange 변형률 이론을 토대로, 도심선(centroidal line) 상에 위치한 한 점의 원주방향 수직 변형률은 다음과 같이 표현되어 진다.

$$\bar{\epsilon}_\theta = \bar{\epsilon}_\theta^L + \frac{1}{2}[(\bar{\epsilon}_\theta^L)^2 + (\phi_\theta)^2 + (\phi_\theta^L)^2] \quad (3)$$

여기서,

$$\bar{\epsilon}_\theta^L = (v' + u)/R \quad (4)$$

이다. 식(3)의 우변의 첫 번째 항은 선형이고, 괄호 안의 항들은 비선형이다. 마지막 비선형 항에 의해, 면의방향 변위에 대한 운동방정식은 반경방향과 원주방향 변위에 대한 운동방정식들과 연성되어진다. 링이 얇고 단면이 변형 후에도 평면으로 유지된다는 가정하에, 임의의 한점에 대한 원주방향 수직 변형률은 다음과 같이 근사화 될 수 있다.^(5,6,9)

$$\epsilon_\theta = \bar{\epsilon}_\theta + \frac{x}{R} \phi_\theta' - \frac{z}{R} (\phi_\theta' - \phi_\theta) \quad (5)$$

원주방향 수직 변형률과 변위들 사이의 관계를 나타내는 식(5)는 비선형 임을 유념하기 바란다. 그러나, 비틀림에 기인하는 전단 변형의 비선형성은 무시할 수 있다는 가정하에, 식(6)과 같은 선형의 전단변형률과 변위의 관계⁽⁹⁾가 사용되었다.

$$\gamma_{r\theta} = \frac{z}{R} \left(\frac{w'}{R} + \phi' \right), \quad \gamma_{\theta z} = -\frac{x}{R} \left(\frac{w'}{R} + \phi' \right) \quad (6)$$

다음에는 얻어진 변형률을 이용하여 링의 변형 에너지를 구하고자 한다. 링의 재료는 균질성(homogeneous), 등방성(isotropic)이며, 또한 Hooke 법칙을 만족하는 탄성체로 가정한다. 링의 높이 h 와 반경방향의 폭 b 가 링의 반지름에 비해 매우 작기 때문에, σ_r , σ_z , τ_{rz} 의 영향은 무시되어질 수 있다. 이런 경우에, 링의 변형에너지는 다음과 같이 표현되어진다.

$$U = \frac{ER}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \epsilon_\theta^2 dAd\theta + \frac{GR}{2} \int_0^{2\pi} \int_A (\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2) dAd\theta \quad (7)$$

여기서, A 는 링의 단면적이고 E 와 G 는 각각 영률과 전단 탄성계수이다.

운동에너지를 구하기 위해, 회전하는 링에 위치한 임의의 한점의 속도를 변위 u, v, w 로 나타낼 필요가 있다. 먼저, 변형된 링의 임의의 질점에 대한 위치 벡터는 다음같이 표현된다.

$$r_p = (r + u_r) e_r + u_\theta e_\theta + (z + u_z) e_z \quad (8)$$

여기서, e_r, e_θ 와 e_z 는 원통 좌표계의 단위 벡터를 의미하며, $r = R + x$ 이다. 식(1)을 식(8)에 대입한 후 시간에 대하여 미분하여 속도를 구하면, 이로부터 운동에너지를 얻을 수 있다. 링이 얇다고 가정하였기 때문에 비틀림에 의한 회전관성을 제외한 나머지 회전관성의 영향을 무시하면⁽¹²⁾, 링의 운동에너지는 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$T = \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} \int_A [\bar{v}_p \cdot \bar{v}_p + (x^2 + z^2)(\dot{\phi} + \Omega \phi')^2 + z^2 \Omega^2 \phi'^2] dAd\theta \quad (9)$$

여기서

$$\bar{v}_p = (\dot{u} + \Omega u' - \Omega v) e_r + (\dot{v} + \Omega v' + \Omega u + \Omega R) e_\theta + (\dot{w} + \Omega w') e_z, \quad (10)$$

ρ 는 밀도, (*)는 시간에 대한 편미분을 의미한다.

식(7)과 (9)에 Hamilton원리를 적용하여 운동방정식을 구하면, 아래와 같이 연성된 비선형 편미분 방정식이 얻어진다.

$$\ddot{u} + 2\Omega(\dot{u}' - \dot{v}) + \Omega^2(u'' - 2v' - u) - \frac{EI_i}{\rho AR^4}(v'''' - u''''') + \frac{E}{\rho R} [\bar{\epsilon}_\theta + \bar{\epsilon}_\theta \bar{\epsilon}_\theta^L + (\bar{\epsilon}_\theta \phi_\theta)'] = R\Omega^2 \quad (11)$$

$$\ddot{v} + 2\Omega(\dot{v}' + \dot{u}) + \Omega^2(v'' + 2u' - v) - \frac{EI_i}{\rho AR^4}(v'''' - u''''') - \frac{E}{\rho R} [(\bar{\epsilon}_\theta)'] - \bar{\epsilon}_\theta \phi_\theta' + (\bar{\epsilon}_\theta \bar{\epsilon}_\theta^L)'] = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{w}' + \Omega^2 w'' + \frac{EI_o}{\rho AR^4}(w'''' - R\phi''') - \frac{GI_p}{\rho AR^4}(w'' + R\phi'') - \frac{E}{\rho R} (\bar{\epsilon}_\theta \phi_\theta)' = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} + 2\Omega\dot{\phi}' + \Omega^2 \left(\phi'' - \frac{I_o}{I_p} \phi \right) - \frac{EI_o}{\rho I_p R^2} (w'' - R\phi) - \frac{G}{\rho R^2} (w'' + R\phi'') = 0 \quad (14)$$

여기서

$$I_i = \int_A x^2 dA, \quad I_o = \int_A z^2 dA, \quad I_p = \int_A (x^2 + z^2) dA \quad (15)$$

식(11)-(13)에서 알 수 있듯이, 반경 및 원주방향 변위들과 면의방향의 변위는 서로 연성되어 있다. 한편, 식(14)의 비틀림 변위는 단지 면의방향의 변위하고만 연성되어 있다.

3. 고유 진동수

고유진동수를 구하기 위해, 섭동법(perturbation method)을 사용하여 비선형 운동방정식 (11)~(14)로부터 정상상태에 있는 회전링의 평형위치와 선형화된 방정식을 구하였다. 링이 일정속도로 회전할때, 선형화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{u} + 2\Omega(\dot{u}' - \dot{v}') + \Omega^2(u'' - 2v'' - u) - \frac{EI_i}{\rho AR^4}(v'''' - u''''') + \frac{E}{2\rho R^4}[(2R^2 + 6Ru_* + 3u_*^2)(v'' + u) - u_*(2R + u_*)(u'' - v'')] = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{v} + 2\Omega(\dot{v}' + \dot{u}') + \Omega^2(v'' + 2u'' - v) - \frac{EI_i}{\rho AR^4}(v'''' - u''''') - \frac{E}{2\rho R^4}[(2R^2 + 6Ru_* + 3u_*^2)(v'' + u') + u_*(2R + u_*)(u'' - v'')] = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{w}' + \Omega^2 w'' + \frac{EI_o}{\rho AR^4}(w'''' - R\phi''') - \frac{GI_p}{\rho AR^4}(w'' + R\phi'') - \frac{E}{2\rho R^4}u_*(2R + u_*)w'' = 0 \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} + 2\Omega\dot{\phi}' + \Omega^2\left(\phi'' - \frac{I_o}{I_p}\phi\right) - \frac{EI_o}{\rho I_p R^3}(w'' - R\phi) - \frac{G}{\rho R^2}(w'' + R\phi'') = 0 \quad (19)$$

여기서, 평형위치 $u_* = R\left(\sqrt{1 + 2\rho R^2\Omega^2/E} - 1\right)$ 이다.

고유 진동수 ω_n 는 각각의 변위를 식(20)과 같이 가정한 후^(5,7), 특성방정식이 유용해 (non-trivial solution)를 갖는 조건으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= c_1 e^{i(n\theta - \omega_n t)}, & v &= c_2 e^{i(n\theta - \omega_n t)}, \\ w &= c_3 e^{i(n\theta - \omega_n t)}, & \phi &= c_4 e^{i(n\theta - \omega_n t)} \end{aligned} \quad (20)$$

위에서 c_1 , c_2 , c_3 와 c_4 는 임의의 상수들이고, n 은 정수, $i = \sqrt{-1}$ 이다. 면내굽힘과 인장방향의 고유 진동수는 식 (20)의 u 와 v 을 식 (16)과 (17)에 대입한 후 이들 식이 유용해를 갖는 조건으로부터 얻어진다. 일반적으로, 각 n 에 대해서 네개의 고유진동수가 얻어진다. 그 값들 중 두개는 면내 굽힘진동과 관련이 깊고, 나머지 두개는 인장방향 진동과 관련이 깊다. 마찬가지로, 면외 굽힘과 비틀림 진동에 대한 고유 진동수는 식(20)의 w 와 ϕ 를 식(18)과 (19)에 대입한 후 전과 같은 방법으

로 구할 수 있다. 구해진 네개의 고유 진동수는 각각 두개씩 면외 굽힘 및 비틀림 진동과 관련이 깊다.

한예로, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 207 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $R = 100 \text{ mm}$ 그리고 $b = h = 2 \text{ mm}$ 인 강철 링의 고유진동수를 구하였다. $\Omega = 0$ 일 때 각각의 진동모드에 대한 가장 낮은 고유 진동수를 계산하고 이의 검증을 위해 Bleivins⁽¹²⁾로 부터 얻어진 값들과 비교하였다. Table 1에서 알 수 있듯이 이들은 서로 잘 일치하였다. 면내 및 면외 굽힘모드에 있어서, $n=0$ 과 $n=1$ 은 링의 강체운동을 나타내기 때문에, $n=2$ 가 가장 낮은 진동수를 갖는 모드에 대응한다. 한편, 인장과 비틀림 진동에 있어서는 $n=0$ 이 가장 낮은 진동수를 갖는 반경방향 확장(uniform radial expansion) 모드와 비틀림 모드를 의미한다. 또한, Table 1에서 알 수 있듯이 인장 및 비틀림 모드에 관련된 고유진동수는 굽힘모드의 고유진동수에 비해 매우 크기 때문에, 앞으로는 실용적인 측면에서 더 중요한 면내 및 면외 굽힘 모드의 결과만을 대상으로 논의를 전개하고자 한다.

Figure 2(a)와 (b)는 각각 회전속도에 따른 면내 및 면외 굽힘모드의 고유진동수 변화를 보여준다. 실선과 점선들은 각각 $n=2$ 와 $n=3$ 에 대한 결과이다. 링이 회전함에 따라 정지한 링의 고유진동수는 두개로 나누어 짐을 알 수 있다.

Table 1

The lowest natural frequencies (rad/s) of each vibration mode when $\Omega = 0$.

Vibration mode	In this study	Reference (12)
In-plane bending (when $n=2$)	795	796
Out-of-plane bending (when $n=2$)	773	756
Extension (when $n=0$)	51351	51351
Torsion (when $n=0$)	36311	36311

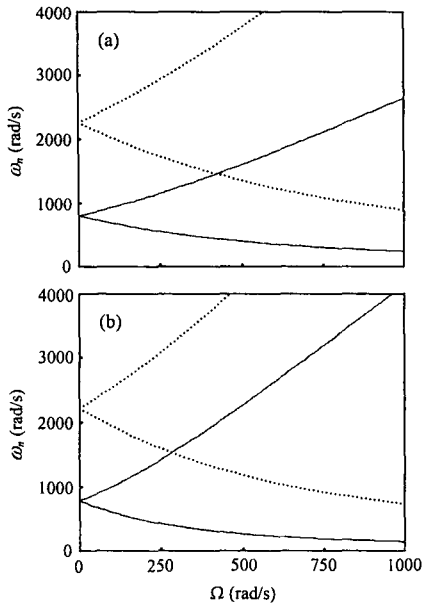


Figure 2. Natural frequencies ω_n of the bending modes versus the rotational speed Ω for (a) the in-plane vibration and (b) the out-of-plane vibration : —, $n=2$; ·····, $n=3$.

또한, 링의 단면이 정사각형이기 때문에 면내와 면외 굽힘 모드에 대한 고유진동수들의 값은 $\Omega=0$ 때 거의 같다. 그러나, Ω 가 증가함에 따라 그 차이가 커짐을 알 수 있다.

Figure 2(b)와 같은 회전하는 링의 비선형 면외 진동에 대한 연구는 저자가 알고 있기에 지금까지 발표된 바가 없다. 이러한 결과는, 링 형태의 회전 기계 요소 및 장치의 설계 및 해석 과정에서, 면내뿐 아니라 면외 진동의 영향 또한 고려되어야 하는 경우에 기초 자료로 사용될 수 있다.

4. 비선형 항들의 영향

비선형 모델링의 필요성과 타당성을 검증하기 위해, 식(3)의 비선형 항들이 굽힘 고유진동수에 미치는 영향들을 살펴보았다. 논의를 명확히 하기 위해 비선형 방정식 (11)-(14)를 얻기 위해 사용되어진 링의 모델을 Model 1이라 지칭하고자 한다. Model 1은 변형 에너지를 구하는 과정에서 비선형 원주방향 변형률과 응력을 사용하였다. Model 2는

식(3)에서 선형 수직 변형률의 제곱 항($\bar{\epsilon}_\theta^L$)이 면내 및 면외 방향의 회전과 관련된 항들의 제곱($(\phi_\theta)^2$ 과 $(\phi_r)^2$) 보다 훨씬 작다는 가정을 바탕으로 $(\bar{\epsilon}_\theta^L)^2$ 을 무시한 것이다. 이는 von-Karman 변형률 이론을 기본으로 한 것으로, 면내 방향 진동에 대한 유사한 모델이 참고문헌(6)에서 사용되었다. Model 2에서 비선형 원주방향 응력은 앞서 구한 변형률에 탄성계수를 곱한 값이다. Model 3의 경우는, 변형률은 Model 1과 같으나, 식(3)의 선형 부분만이 원주방향 응력을 계산하는데 사용되어졌다. 결국, Model 3은 비선형 원주방향 변형률과 선형 원주방향 응력을 사용하여 운동방정식을 구한 것이다. 이런 종류의 모델링 방법은 회전하는 디스크의 진동에 대한 연구(13,14)에서 주로 사용되었다. 마지막 모델인, Model 4는 원주방향 변형률과 응력이 모두 선형인 모델이다.

위에서 기술한 네개의 모델에 대해, 회전속도의 변화에 따른 면내 및 면외 방향의 굽힘 고유진동수를 각각 Figure 3(a)와 (b)에 나타내었다. 면내 및 면외 모두 $n=2$ 인 경우이며, 실선과 쇄선 그리고 점선은 각각 Model 1, Model 3 그리고 Model 4로부터 얻어진 결과들을 나타낸다. Model 2로부터 얻어진 결과는 작은 원으로 표시하였다.

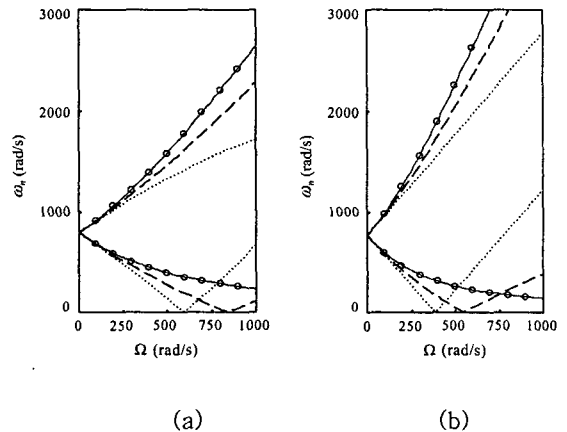


Figure 3. Comparisons of the bending natural frequencies ω_n versus Ω when $n=2$: (a) the in-plane vibration; (b) the out-of-plane vibration; —, Model 1; o o, Model 2; - - -, Model 3; ···, Model 4.

Figure 3에서 알 수 있듯이, 매우 낮은 회전속도에서는 검토된 네 개의 모델들이 모두 비슷한 결과를 보인 반면, 회전속도가 증가함에 따라 몇몇 모델들 사이에서 현저한 차이가 발견된다. 이러한 차이는 링이 고속 회전할 때 발생하는 원심력에 의한 강성효과(stiffening effect)가 각 모델에서 적절히 고려되었는지의 여부에 따른 것으로 해석된다. 따라서, 고속 회전하는 링의 굽힘 고유 진동수를 정확히 예상하기 위해서는 단순화된 Model 3 또는 Model 4 대신에 Model 1 이나 Model 2를 사용하도록 제안 한다. 또한, Model 1과 Model 2로부터 얻어진 결과들 사이에 큰 차이가 없으므로, Model 1 대신에 상대적으로 간단한 Model 2를 사용하는 것이 효과적이다.

5. 결론

일정 각속도로 회전하는 링에 대한 지배 방정식을 유도하였다. 고속회전에 따른 원심력에 의해 발생하는 응력의 영향을 효과적으로 고려하기 위해, 선형의 미소 변형률 이론 대신에 비선형의 원주방향 변형률-변위의 관계를 사용하였다. Hamilton 원리에 의해 유도된 최종 식들은 면내 및 면외 굽힘과 인장 및 비틀림 운동들을 포함하는 연성된 비선형 편미분 방정식이다. 이로부터, 섭동법을 사용하여 평형위치와 선형화된 방정식을 구한 후, 회전 속도에 따른 고유 진동수의 변화를 계산하였다. 마지막으로, 세 종류의 비선형 모델들에 기초한 고유진동수 계산 결과와 선형모델의 결과를 비교하였다. 이를 바탕으로 고속회전하는 얇은 링의 굽힘 고유진동수를 예측하기 위해서는 비선형 변형률-변위의 관계식에 기초하여 변형률과 응력을 구한 Model 2를 사용하는 것이 효과적임을 보였다.

참고 문헌

(1) Rao, S. S., and Sundararajan, V., 1969, "In-plane Flexural Vibrations of Circular Rings" ASME Journal of Applied Mechanics, v.36, pp. 620-625.
 (2) Kirkhope, J., 1976, "Simple Frequency Expression for the In-plane Vibration of Thick Circular Rings," The Journal of the Acoustical Society of America, v.59, pp.86-89.

(3) Evensen, D. A., 1966, "Nonlinear Flexural Vibrations of Circular Rings," ASME Journal of Applied Mechanics, v.33, pp.553-560.
 (4) Carrier, G. F., 1945, "On the Vibrations of the Rotating Ring," Quarterly of Applied Mathematics, v.3, pp.235-245.
 (5) Huang, S. C., and Soedel, W., 1987, "Effects of Coriolis Acceleration on the Free and Forced In-plane Vibrations of Rotating Rings on Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, v.115, pp.253-274.
 (6) Natsiavas, S., 1994, "Dynamics and Stability of Non-linear Free Vibration of Thin Rotating Rings," International Journal of Non-Linear Mechanics, v.29, pp.31-48.
 (7) Bickford, W. B., and Reddy, E. S., 1985, "On the In-plane Vibrations of Rotating Rings," Journal of Sound and Vibration, v.101, pp.13-22.
 (8) Kirkhope, J., 1976, "Out-of-plane Vibration of Thick Circular Ring," Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.102, pp.239-247.
 (9) Lee, S. Y., and Chao, J. C., 2000, "Out-of-plane Vibrations of Curved Non-uniform Beams of Constant Radius," Journal of Sound and Vibration, v. 238, pp.443-458.
 (10) Maganty, S. P., and Bickford, W. B., 1987, "Large Amplitude Oscillations of Thin Circular Rings," ASME Journal of Applied Mechanics, v. 54, pp.315-322.
 (11) Eley, R., Fox, C. H. J., and McWilliam, S., 2000, "Coriolis Coupling Effects on the Vibration of Rotating Rings," Journal of Sound and Vibration, v. 238, pp.459-480.
 (12) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, New York: Van Nostrand Reinhold Co., chapter 9.
 (13) Chung, J., Oh, J.-E., and Yoo, H. H., 2000, "Non-linear Vibration of a Flexible Spinning Disc with Angular Acceleration," Journal of Sound and Vibration, v. 231, pp.375-391.
 (14) Chung, J., Kang, N.-C., and Lee, J. M., 1996, "A Study on Free Vibration of a Spinning Disk," KSME International Journal, v.10, pp.138-145.