

스펙트럴요소법을 이용한 내부유동 포함된 파이프 진동해석 Spectral Element Analysis of the Pipeline Conveying Internal Flow

강 관 호* · 이 우 식**
Kwanho Kang and Usik Lee

Key Words : Pipeline, Vibration analysis(진동해석), Spectral element method(스펙트럴요소법), Finite element method(유한요소법)

ABSTRACT

This paper considers a pipeline conveying one-dimensional unsteady flow inside. The dynamics of the fluid-pipe system is represented by two coupled equations of motion for the transverse and axial displacements, which are linearized from a set of partial differential equations which consists of the axial and transverse equations of motion of the pipeline and the equations of momentum and continuity of the internal flow. Because of the complex nature of fluid-pipe interactive mechanism, a very accurate solution method is required to get sufficiently accurate dynamic characteristics of the pipeline. In the literatures, the finite element models have been popularly used for the problems. However, it has been well recognized that finite element method (FEM) may provide poor solutions especially at high frequency. Thus, in this paper, a spectral element model is developed for the pipeline and its accuracy is evaluated by comparing with the solutions by FEM.

1. 서론

높은 압력을 갖는 유체를 고속으로 전송하는데 사용되는 파이프계는 내부의 유체 특성에 의해 심각한 유체유발진동이 발생하여 파이프나 지지부들이 피로파괴 되거나 파단 되어 위험할 수 있다. 이러한 문제가 발생할 수 있는 예로서 지상에 설치된 각종 산업시설내의 파이프계의 유체유발진동, 증기터빈 내부의 튜브 및 대형 액체추진 로켓의 파이프계 등이다.

그러나, 이러한 파이프계의 설계에 사용되어온 해석과정들은 단순화된 것들이다. 전통적으로 구조물과 유체의 상호작용을 무시한 파이프와 유체의 운동방정식을 풀거나, 유한요소모델이 사용되어 왔다. 유한요소법(FEM)에 의한 해는 특히 고주파 영역에서 정확도가 높지 않으며 많은 시간이 소요되는 것으로 널리 알려져 있다. 본 연구에서는 이런 FEM의 단점을 보완할 수 있는 스펙트럴요소법(SEM)을 이용하여 파이프 모델을 해석하였다.

파이프의 유체유발진동에서 괄목한 만한 연구는 Ashley와 Haviland⁽¹⁾에 의해 Trans-Arabian 파이프 라인의 진동을 규명하기 위해 처음으로 행해졌다. 이후에, Housner⁽²⁾는 해밀턴 원리에 의해 코리올리력의 영향을 포함한 좀더 정확한 식을 개발하였고 유속의 한계 값을 초과할

때 좌굴이 일어날 수 있음을 밝혔다. Long⁽³⁾은 맨 처음으로 유체를 포함하고 있는 외팔보 형태의 파이프를 연구했고, 실험적으로 단순지지된 파이프와는 반대로 외팔보 형태의 파이프는 어떤 유속에서는 내부유동에 의해 감쇠 되어진다는 것을 보였다. 유압의 영향은 가장 먼저 Heinrich⁽⁴⁾에 의해 고려되었다. Gregory와 Paidoussis⁽⁵⁾는 외팔보 형태의 파이프가 좌굴(발산)보다는 플러터(flutter)가 존재함을 증명했다. Chen⁽⁶⁾은 처음으로 정상진동유동에 의해 단순지지보의 안정성을 연구했다. Skalak⁽⁷⁾, Williams⁽⁸⁾, Walker과 Phillips 그리고 Wiggert등⁽⁹⁾은 유체와 파이프의 벽 사이의 연계된 Poisson의 영향을 고려하였다. Wiggert등과 Lesmez등⁽¹⁰⁾은 이전에 개발되었던 운동방정식에 횡방향 진동에 대한 영향을 추가하였다. 이러한 완전히 연계된 유체-구조 상호작용 메커니즘을 포함한 운동방정식이 Lee등^(11, 12)에 의해 유도되었다. Semler등⁽¹³⁾은 파이프의 비선형 방정식을 경계조건에 따라 유도하였으며, Zhang등⁽¹⁴⁾은 초기장력이 있는 단순지지된 파이프를 실험하여, 자신의 유한요소모델과 비교하였다. Gorman등⁽¹⁵⁾은 셀 이론에 기반을 두어 유한차분법을 이용하여 유체의 운동방정식까지 해석하였다. 본 논문의 목적은, (1) Newtonian 방법을 이용하여 연성을 포함하고 있는 운동방정식을 유도하고, SEM을 이용한 일반해를 구하고, (2) SEM의 신뢰성을 확인하기 위해 SEM과 FEM으로 구한 동특성을 비교검토하고자 한다.

* 인하대학교 기계공학과
E-mail : kano95@hanmail.net
Tel : (032) 860-8780, Fax : (032) 866-1434

** 인하대학교 기계공학과

2. 운동방정식 유도

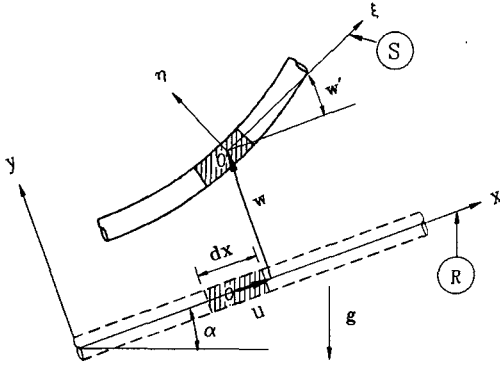


Fig. 1 A typical pipeline under small deformation

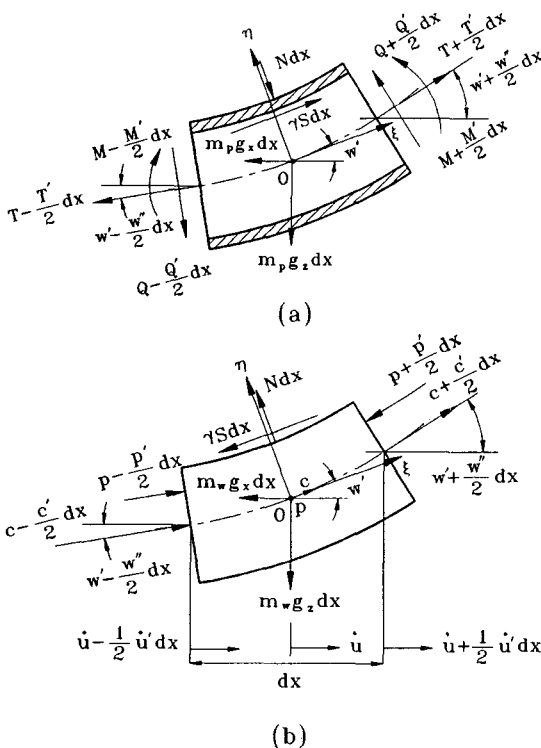


Fig. 2 Free body diagrams for (a) the pipe element and (b) the deformable moving control volume

Fig. 1 에 나타난 것처럼 α 만큼 기울어진 파이프가 미소의 변형을 했다고 하자. 파이프는 횡방향으로 w 만큼, 축방향으로 u 만큼의 변형을 정적 평형상태로부터 갖는다. 내부유체를 포함한 파이프요소를 Fig. 2 와 같이 검사체적으로 표현된 유체요소와 유체를 제거한 파이프의 구조요소로 나눈다. 여기서, T 는 파이프요소에 가해지는 인장력이고, M 은 굽힘 모멘트, Q 는 전단력을 나타낸다.

c 는 유속을 나타내며 p 는 유체의 압력을 말한다. 파이프 내 유동은 비정상 일차원 점성유동으로 가정하고, 유체의 유동에 의해 발생하는 파이프의 변형과 진동의 크기는 작다고 한다.

Fig. 2(a)에 뉴턴의 운동법칙을 적용하면 파이프요소에 대한 힘의 평형식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$T' - Q'w' - Qw'' + Nw' + \tau S - m_p g_x = m_p \ddot{u} \quad (1)$$

$$Q' + T'w' + Tw'' - N + \tau Sw' - m_p g_y = m_p \ddot{w} \quad (2)$$

여기서, m_p 는 파이프의 단위길이당 질량, g_x 와 g_y 는 중력가속도의 x 와 y 성분이다. 마찬가지로 유체요소에 대한 힘의 평형식은 Fig. 2(b)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$(pA)' + Nw' + \tau S + m_w g_x + m_w (\dot{c} + cc' + \ddot{u} + 2c\dot{u}' + c^2 u'' + \dot{c}u' + cc'u') = 0 \quad (3)$$

$$(pA)'w' + (pA)w'' - N + \tau Sw' + m_w g_y + m_w (\ddot{w} + 2c\dot{w}' + c^2 w'' + \dot{c}w' + cc'w') = 0 \quad (4)$$

유체의 연속방정식은 다음과 같이 주어진다⁽²²⁾.

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + \frac{\dot{A}}{A} + c' = 0 \quad (5)$$

여기서 $(\cdot) = \partial/\partial t + c\partial/\partial x$ 는 전체미분을 나타낸다. 파이프의 운동방정식을 유도하기 위해서 다음과 같은 보조식들이 필요하다.

$$T = T_0 + EA_p u', \quad Q = -EI_p w'' \quad (6,7)$$

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{\dot{p}}{Ev}, \quad \frac{\dot{A}}{A} = \frac{D}{Et} \left(\dot{p} - \frac{v}{2A} \dot{T} \right) \quad (8,9)$$

$$\tau S = \frac{f_s}{2D} m_w |c|c \quad (10)$$

여기서, E 는 파이프의 탄성계수, I_p 과 A_p 는 파이프의 단면에 대한 관성모멘트와 단면적, E_v 는 유체의 체적탄성계수이다. D 는 파이프의 내경이며, t 는 파이프의 두께, v 는 포아송비이다. f_s 는 Darch-Weisbach 마찰계수⁽²²⁾이다. 식(3)를 (1)에 대입하고 식(6)와 (7)을 이용하면 다음과 같이 축방향의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$EA_p u'' - m\ddot{u} - mg_x - (p'A) + EI_p (w''w' + w''w'') - m_w (\dot{c} + cc' + 2c\dot{u}' + c^2 u'' + \dot{c}u' + cc'u') = 0 \quad (11)$$

또한, 식(4)를 (2)에 대입하고 식(6)과 (7)을 이용하면 횡방향의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} + mg_y + m_w (2c\dot{w}' + c^2 w'' + \dot{c}w' + cc'w') - (T_0 - pA)w'' + (p'A)w' - EA_p (u''w' + u'w'') = 0 \quad (12)$$

유체의 연속방정식 (5)는 식(8)과 식(9)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\dot{p} + cp')A + m_w a^2 \{c' - 2v(\dot{u}' + cu'')\} = 0 \quad (13)$$

여기서, a 는 유체의 파동속도로서 다음과 같이 주어진다.

$$a^2 = \frac{E_v / \rho_w}{1 + E_v D / Et} \quad (14)$$

식 (3)과 식 (4)로부터 수직력 N 을 소거하면 다음의 유체에 대한 모멘트 평형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (p'A) + \tau S + (pA)w'^2 + (pA)w'w'' + \tau S w'^2 \\ + m_w (g_x + \dot{c} + cc' + \ddot{u} + 2cu' + c^2 u'' + \dot{c}u' + cc'u') \\ + m_w (g_y w' + \ddot{w}w' + 2c\dot{w}'w' + c^2 w''w' + \dot{c}w'^2 + cc'w') = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

파이프의 진동이 작다고 가정하면 식(11~13), (15)에 식 (10)을 대입한 후 작은 항들은 소거하여 근사화할 수 있다.

유속이 일정하며 유체의 압력이 초기압력 p_0 를 갖고 있다고 고려하면 다음과 같다.

$$c = c_0 \quad (16)$$

$$pA = -m_w g_x x + p_0 A + P \quad (17)$$

식(17)에서 $-m_w g_x x$ 는 횡방향으로 서 있는 파이프의 경우 중력효과를 소거하기 위한 항이다. 식 (16), (17)을, 크기가 작은 항을 소거한 네 개의 방정식에 대입한 후, 압력 P' 을 소거하면 다음과 같이 두 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} EA_p u'' - m\ddot{u} - m_w (2c_0 \dot{u}' + c_0^2 u'') + m_w g_y w' \\ + m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} EI_p w'''' + m\ddot{w} + m_w (2c_0 \dot{w}' + c_0^2 w'') \\ - (T_0 - p_0 A)w'' - m_w g_x w' - m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 w' = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18)과 식 (19)는 연성되어 있다. 또한, 정적 변위 u_s, w_s 와 동적변위 u_d, w_d 로 나누면,

$$u(x, t) = u_s(x) + u_d(x, t), \quad w(x, t) = w_s(x) + w_d(x, t) \quad (20, 21)$$

식 (20), (21)을 식 (18)과 식 (19)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 정적 평형방정식과 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} EA_p u_s'' - m_w c_0^2 u_s'' + m_w g_x + m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 \\ + m_w g_y w_s' = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} EI_p w_s'''' + m_w c_0^2 w_s'' - T_0 w_s'' - m_w g_x w_s' \\ - m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 w_s' = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

동적 평형방정식은

$$EA_p u_d'' - m_p \ddot{u}_d - 2m_w c_0 \dot{u}_d' - m_w c_0^2 u_d'' + m_w g_y w_d' = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} EI_p w_d'''' + m\ddot{w}_d + 2m_w c_0 \dot{w}_d' + m_w c_0^2 w_d'' \\ - T_0 w_d'' - m_w g_x w_d' - m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 w_d' = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

동적평형에서 각 변형에 의해 발생하는 내력은 다음과 같다.

$$Q_d = -EI_p w_d''', \quad M_d = EI_p w_d'', \quad T_d = EA_p u_d' \quad (26)$$

3. 스펙트럴요소 유도

연속계에 대한 스펙트럴요소행렬을 유도하기 위해서는 운동방정식에 대한 파동해를 필요로 한다. 이러한 파동해를 구하기 위해서는 파수와 주파수를 관계 짓는 분산 관계를 얻어야 한다. 파이프의 운동방정식은 연성되어 있기 때문에 한 개의 식으로 축약될 수 없다. 따라서 식(24), (25)의 해를 다음과 같이 정의한다.

$$u_d(x, t) = \sum_{n=1}^N U_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad w_d(x, t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (27)$$

여기서 U_n, W_n 는 각각 굽힘, 전단 변형의 스펙트럴 계수이다. 이하에서는 간략한 표현을 위해 아래 첨자 n 을 생략한다. 식 (27)를 식 (24), (25)에 대입하고, 시간에 관련된 항을 모두 소거하면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (EA_p - m_w c_0^2) U'' + \omega^2 m_p U - 2i\omega m_w c_0 U' \\ + m_w g_y W' = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} EI_p W'''' - \omega^2 m W + (m_w c_0^2 - T_0) W'' + 2i\omega m_w c_0 W' \\ - m_w (g_x + \frac{fs}{2D} |c_0| c_0) W' = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

위 두식의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = \alpha e^{kx}, \quad U(x) = \beta e^{kx} \quad (30)$$

여기서, k 는 파수이다. 식 (30)을 식(28), (29)에 대입하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[K] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (31)$$

여기서, 행렬 $[K]$ 의 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{11} &= EI_p k^4 + (m_w c_0^2 - T_0) k^2 + \\ &\quad \left(2i\omega m_w c_0 - m_w g_x - m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 \right) k - \omega^2 m \\ K_{12} &= 0, \quad K_{21} = m_w g_y k \\ K_{22} &= (EA_p - m_w c_0^2) k^2 - 2i\omega m_w c_0 k + \omega^2 m_p \end{aligned}$$

식 (31)이 부정해(trivial solution) 이외의 해를 가지기 위해서는 $[K]$ 의 행렬식이 0 이 되어야 한다. 따라서, 파이프 모델의 분산관계는 다음과 같다.

$$EI_p k^4 + (m_w c_0^2 - T_0) k^2 + \left(2i\alpha m_w c_0 - m_w g_x - m_w \frac{fs}{2D} |c_0| c_0 \right) k - \omega^2 m = 0 \quad (32)$$

$$(EA_p - m_w c_0^2) k^2 - 2i\alpha m_w c_0 k + \omega^2 m_p = 0 \quad (33)$$

식 (32)과 (33)의 해를 이용하면, U, W 의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(x) = [\Phi(x)]\{\alpha\}, \quad U(x) = [\Phi(x)]\{\beta\} \quad (34)$$

여기서,

$$[\Phi(x)] = [e^{k_1 x} \quad e^{k_2 x} \quad \dots \quad e^{k_6 x}]$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_6\}^T$$

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_6\}^T$$

식 (34)은 모두 12 개의 미지수 α_i, β_i ($i=1,2,\dots,6$)를 가진다. 따라서, 식 (34)의 특정한 해를 구하기 위해서는 모두 12 개의 경계조건이 필요하지만, 물리적으로 가능한 경계조건은 모두 6 개이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 식 (28)의 연성을 사용하여 6 개의 미지수로 표현한다. 예를 들어, 미지수 α_i 를 β_i 로 표현하면 다음과 같다.

$$\alpha_i = g_i \beta_i \quad (35)$$

여기서,

$$g_i = \frac{(EA_p - m_w c_0^2) k_i^2 - 2i\alpha m_w c_0 k_i + \omega^2 m_p}{m_w g_y k_i}$$

단일 스펙트럴요소의 1 번 ($x=0$), 2 번 ($x=L$) 절점에서, 힘은 식(34), (35)를 식 (26)에 대입하여, 다음과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\{F_d\} = [FC]\{\beta\} \quad (36)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{F_d\} &= [Q_{d1}, M_{d1}, Q_{d2}, M_{d2}, T_{d1}, T_{d2}]^T \\ Q_{d1} &= EI_p W''(0) & Q_{d2} &= -EI_p W''(L) \\ M_{d1} &= EI_p W'(0) & M_{d2} &= -EI_p W'(L) \\ T_{d1} &= -EA_p U'(0) & T_{d2} &= EA_p U'(L) \end{aligned}$$

식 (36)에서 Q_{di}, M_{di}, T_{di} 는 스펙트럴요소의 절점에 가해지는 전단력, 굽힘모멘트, 축력이다.

스펙트럴요소의 1 번 ($x=0$), 2 번 ($x=L$) 절점에서, 변위는 식 (34)과 식 (35)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{Y_d\} = [YC]\{\beta\} \quad (37)$$

여기서,

$$\{Y_d\} = [W_1, \phi_1, W_2, \phi_2, U_1, U_2]^T$$

W_i, ϕ_i, U_i 는 스펙트럴요소의 절점에서 동적 굽힘 변위, 기울기, 축방향 변위를 나타낸다.

식 (36)과 (37)에서 미지수 β_i 를 제거하면 스펙트럴 요소의 절점에서 힘과 변위의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F_d\} = [FC][YC]^{-1}\{Y_d\} = [S]\{Y_d\} \quad (38)$$

여기서, $[S]$ 는 파이프의 스펙트럴요소행렬이다.

4. 수치예제

양끝이 단순지지된 파이프 모델을 진동해석하였다. 파이프의 외경은 $D_e=9.7 \times 10^{-3}$ m, 내경 $D_i=6.0 \times 10^{-3}$ m, 길이 $L=3.62 \times 10^{-1}$ m, 탄성계수 $E=2.0924 \times 10^6$ Pa, 파이프의 밀도 $\rho_p=1128.56$ kg/m³, 유체의 밀도 $\rho_w=1000.00$ kg/m³, 푸아송비는 $\nu=0.5$ 이다.

본 연구에서 유도된 스펙트럴요소의 신뢰성을 검증하기 위하여 FEM 해석결과와 비교하였다. FEM 모델을 유도하기 위하여 다음의 형상함수를 사용하였다.

$$u_d(x,t) = N_u^T(x)U_d(t), \quad w_d(x,t) = N_w^T(x)W_d(t) \quad (39)$$

여기서,

$$N_u(x) = [1 - \xi, \xi]^T$$

$$N_w(x) = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, -\xi + 2I\xi^2 - I\xi^3, 3\xi^2 - 2\xi^3, I\xi^2 - I\xi^3]^T$$

$$U_d = \{u_{d1}, u_{d2}\}^T, \quad W_d = \{w_{d1}, \phi_{d1}, w_{d2}, \phi_{d2}\}^T$$

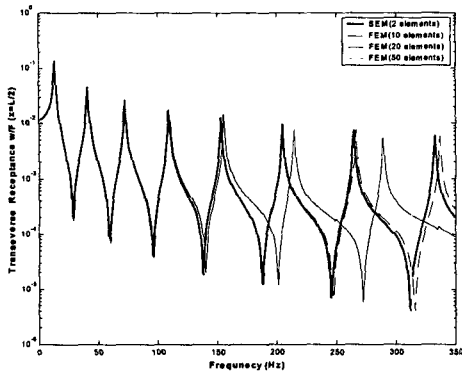
위에서 $\xi=x/l$ 이고 l 은 단위요소 당 파이프의 길이이다. 식 (39)를 이용하여, 식 (24),(25)를 다음과 같이 질량, 강성, 감쇠행렬로 유도할 수 있다.

$$M_d \ddot{Y}_d + C_d \dot{Y}_d + K_d Y_d = F_d \quad (40)$$

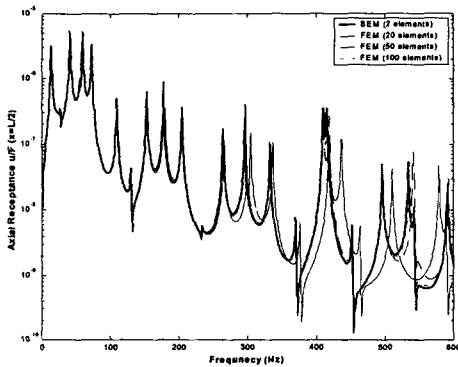
여기서, $Y_d = \{U_d, W_d\}^T$ 이다.

FEM은 SEM의 신뢰성을 확인하기 위한 것이다. 계산에 사용된 유한요소의 개수를 증가 시킴에 따라, FEM 해석결과가 SEM에 의한 결과에 점차 수렴함을 보임으로써 SEM이 거의 정확한 해를 계산할 수 있음을 확인하였다. Fig. 3은 초기인장력 $T_0=7.63$ (N), 유체속도 $c_0=3.04$ (m/s)일 때, 주파수 영역에서의 횡방향(a), 축방향(b)변위의 FRF이다. Fig. 3에서의 주파수 0일 때의 값은 정적 평형방정식 식(22),(23)에서 정적변위를 계산함으로써 얻을 수 있다⁽²⁰⁾.

Fig. 4는 Fig. 3의 시간영역에서의 그래프이다. 이 예제에서는 감쇠율이 매우 작기 때문에, 시간



(a) The transverse receptance (w_d/F) at $x=L/2$



(b) The axial receptance (u_d/F) at $x=L/2$

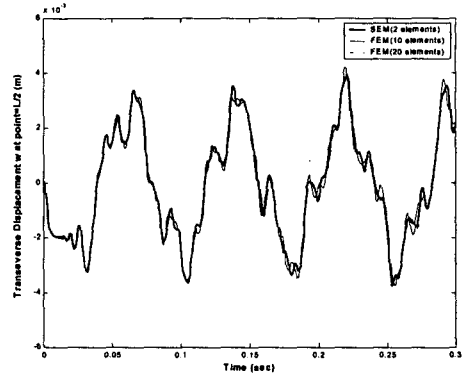
Fig. 3 Comparison of the frequency response functions by SEM and FEM

영역에서의 결과를 얻기 위해 인위감쇠 (artificial damping)⁽¹⁹⁾를 사용하였다.

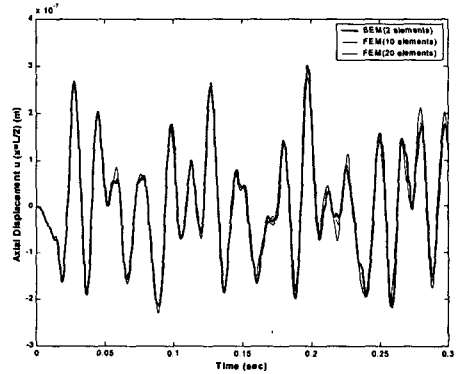
Fig. 3 과 Fig. 4 에서 보듯이 FEM 에서 요소개수를 늘려나갈수록 SEM 의 해석 결과에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 특히 고주파수 영역에서, FEM 의 결과가 SEM 의 해석값과 비교되기 위해서는 많은 요소 개수가 필요하며, 연산 속도 또한 현격한 차이가 있다.

이 모델에 대해 Gorman⁽¹⁴⁾은 초기 인장력(T_0)과 유속(c_0)에 따른 고유진동수를 실험과 FEM 으로 해석하였으며, 이 결과를 본 연구의 결과와 비교했다. Table 1 은 유체가 없을 때, 초기 인장력에 따른 고유진동수를 실험값, SEM 과 FEM 으로 구해 비교한 것이다. 초기 인장력이 증가할수록 고유진동수가 증가함을 볼 수 있으며 초기 인장력이 없을 경우, 매우 작은 첫번째 고유진동수가 나타나 시간영역에서 주기가 큰 현상을 볼 수 있다. Table 2 는 유체가 흐르고 있을 때, 유속에 따른 고유진동수 변화를 Table 1 과 같은 방법으로 나타낸 것이다. 유속이 커질수록 고유진동수가 감소

하는 것을 볼 수 있다, 임계속도보다 큰 유속일 경우 첫 번째 고유진동수는 값을 가지지 않으며, 시간영역에서 발산하는 현상을 볼 수 있다.



(a) The transverse displacement (w_d) at $x=L/2$



(b) The axial displacement (u_d) at $x=L/2$

Fig. 4 Comparison of the time responses by SEM and FEM

5. 결론

SEM 을 이용한 파이프 모델의 진동해석에 관한 본 연구의 결과는 다음과 같다. 먼저 뉴턴의 운동법칙을 적용하여 파이프와 유체의 연성이 포함된 네 개의 운동방정식을 선형화하여, 횡방향과 축방향 운동이 연성된 두 개의 운동방정식을 유도하였다. 유도된 운동방정식에 대한 스펙트럴요소를 유도하였고, 이의 해석결과를 FEM 해석결과와 비교하여 신뢰성과 우수성을 확인하였다. 또한, 같은 예제에 대한 실험값⁽¹⁷⁾과 비교하여, 파이프의 외부 물리적 조건값(T_0 , c_0)에 따른 고유진동수 변화를 확인하였다.

Table 1. Comparison of the natural frequencies of an empty pipe obtained by experiments, SEM and FEM

		$T_0 = 4.95 \text{ (N)}$				$T_0 = 7.63 \text{ (N)}$			
		ω_1	ω_3	ω_5	ω_{10}	ω_1	ω_3	ω_5	ω_{10}
Experimental⁽¹⁷⁾		87.713	310.138	580.378	-	117.181	373.096	670.667	-
SEM (2 elements)		85.592	268.498	484.207	1256.640	106.048	327.677	576.594	1403.980
FEM	50 elements	85.592	268.498	484.208	1256.712	106.048	327.677	576.594	1404.044
	20	85.592	268.499	484.237	1259.433	106.048	327.678	576.619	1406.530
	10	85.592	268.514	484.710	1336.793	106.048	327.692	577.043	1477.907

Table 2. Comparison of the natural frequencies obtained by experiments, SEM and FEM for the pipe conveying internal flow under initial tension $T_0=7.63 \text{ (N)}$

		$C_0 = 1.54 \text{ (m/s)}$			$C_0 = 3.07 \text{ (m/s)}$			$C_0 = 6.43 \text{ (m/s)}$		
		ω_1	ω_3	ω_5	ω_1	ω_3	ω_5	ω_1	ω_3	ω_5
Experimental⁽¹⁷⁾		89.598	278.659	509.064	88.781	276.397	507.179	81.179	263.768	488.455
SEM (2 elements)		84.704	261.904	461.292	83.205	257.814	455.412	76.171	238.785	428.305
FEM	50 elements	84.704	261.904	461.293	83.205	257.814	455.412	76.171	238.785	428.306
	20 elements	84.704	261.905	461.314	83.205	257.815	455.438	76.171	238.788	428.352
	10 elements	84.704	261.917	461.673	83.205	257.832	455.852	76.171	238.828	429.043

참고문헌

(1) Ashley, H. and Haviland G., 1950, "Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid," ASME Journal of Applied Mechanics, 72, pp. 229~232.
 (2) Housner, G. W., 1952, "Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid," ASME Journal of Applied Mechanics, 19, pp. 205~209.
 (3) Long, R. H., Jr., 1995, "Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid," ASME Journal of Applied Mechanics, 22(1), pp. 65~68.
 (4) Heinrich, G., 1956, "Vibrations of tuber with flow," Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 36(11/12), pp.417~429
 (5) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid, - I. Theory and II. Experiments," Proceedings of the Royal Society, 293(A), pp.512~542.
 (6) Chen, S. S. and Rosenberg, G. S., 1971, Argonne National laboratory, Argonne, IL, "Vibration and stability of a tube conveying," USAEC Report ANL-7762.
 (7) Sakalak, R., 1956, "An extension of the theory of water hammer," Transactions of ASME, 78(1), pp.105~116.
 (8) Williams, D. J., 1977, "Water hammer on non-rigid pipes : Precursor waves and mechanical damping," Journal of Mechanical Engineering Science, 19(6), pp.237~242.
 (9) Wiggert, D. C., Otwell, R. S. and Hatfield, F. J., 1985, "The effect of elbow restraint on pressure transients," ASME Journal of Fluids Engineering, 107(3), pp.402~406.
 (10) Lesmez, M. W., Wiggert, D. C. and F. J. Hatfield, 1990, "Modal analysis of vibrations in liquid-filled piping systems," Journal of Fluids Engineering, Vol. 112, pp. 311~318.

(11) Lee, U., Pak, C. H. and Hong, S. C., 1995, "The dynamics of a piping system with internal unsteady flow," J. Sound and Vibration, Vol. 180(2), pp. 297~311.
 (12) Lee, U. and Kim, J., 1999, "Dynamics of branched pipeline systems conveying internal unsteady flow," J. Vibration and Acoustics, Vol.121, pp. 114~122.
 (13) Semler, C., Li, G. X. and Paidoussis, M. P., 1994, "The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid," J. Sound and Vibration, Vol. 169(5), pp. 577~599.
 (14) Zhang, Y. L., Gorman, D. G. and Reese, J. M., 1999, "Analysis of the vibration of pipes conveying fluid," Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 213(C), pp. 849~860.
 (15) Gorman, D. G., Reese, J. M. and Zhang, Y. L., 2000, "Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow," J. Sound and Vibration, Vol. 230(2), pp. 379~392.
 (16) Paidoussis, M. P., Luu, T. P. and Laithier, B. E., 1986, "Dynamics of finite-length tubular beams conveying fluid," Journal of Sound and Vibration, Vol. 106, pp. 311~331.
 (17) Paidoussis, M. P., 1974, "Dynamic stability of pipes conveying fluid," J. Sound and Vibration, Vol.106, pp.267~294.
 (18) Paidoussis, M. P., 1970, "Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid," Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 12, No. 2, pp.85~103.
 (19) Humar, J. L. and Xia, Hong., 1993, "Dynamic response analysis in the frequency domain," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 22, pp. 1~12.
 (20) 김주홍, 이우식, 1998, "동적분포하중을 받는 유연한 구조물을 위한 개량된 스펙트럼요소법," 대한기계학회논문집 A 권, 제 22 권 제 9 호, pp. 1589~1595
 (21) Blevins, Robert D., 1977, "Flow-induced vibration," Van Nostrand Reinhold Co., chap. 10.
 (22) Wjlie, E. Benjamin, Victor L. Streeter, 1993, "Fluid Transients in systems," Prentice-Hall, Inc.