한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회논문집, pp. 173~178

# 주파수 응답함수를 이용한 부분구조 합성법의 문제점에 관한 수치적 연구

[0]김 경 호* • 박 윤 식*

# A Case Study on the Importance of Residual Compensation in FRF-based Substructure Synthesis

[0]Gyeong-Ho Kim* • Youn-Sik Park*

**Abstract**

부분구조 합성법(substructuring or substructure synthesis)은 부분구조(substructure)의 주파수 응답함수(FRFs, frequency response functions)를 이용하여 합성된 전체 구조물의 동특성(dynamic behavior)을 파악하는 기술로서 이에 관한 이론은 명확하며 간단하다. 즉, 역행렬 계산과 같은 기본적인 행렬연산으로 부분구조 합성을 수행한다. 그러나, 여러 가지 요인으로 인하여 계산된 합성 결과는 실제로 결합된 전체 구조물의 동특성과는 차이를 보인다. 현실적인 이유로 고려하지 못하는 회전자유도와 실험에서 수반되는 여러 가지 측정오차는 주요한 요인이며 이에 대한 연구 또한 많이 진행되었다. 본 연구에서는 이러한 요인 중, 상대적으로 덜 중요하게 평가된 모드자름 오차(modal truncation error)의 영향을 고려한다. 단순한 구조물에 대하여 모의실험을 수행함으로써, 모드자름 오차로 인하여 완전히 잘못된 합성 결과가 나올 수 있다는 것을 보인다. 측정된 FRF를 이용하여 이러한 오차를 보정(compensation)하는 소개하고 이를 대상 구조물에 적용하여 모드자름 오차의 영향을 상당히 줄일 수 있다는 것을 보인다. 복잡한(complicated) 구조물에 대하여 모드자름 오차의 영향을 줄이기 위해서 모든 FRFs를 보정하는 것은 어려우므로 현실적인 대안을 모색한다.

## 1.서 론

부분구조 합성법은 구조물을 몇 개의 간단한 부분구조로 나누고 부분구조 해석결과를 사용하여 전체 구조물의 동특성을 파악하는 기술로서 구조물 동특성 변경(SDM, structural dynamics modification)에도 활용된다. 즉 기저 구조물(base structure)의 동특성을 변경하기 위해서 부가 구조물(주로 FEM 모델)을 결합하였을 때, 이의 효과를 예측할 수 있고 따라서 구조물을 최적화할 수 있게 한다.

부분구조 합성은 공간모델(spatial model), 모드모델(modal model) 그리고 응답모델(response model)에 대하여 모두 적용될 수 있으며, 이상적으로는 같은 결과를 가진다. 그러나 실제로는 불완전한(incomplete) 모델 또는 여러 가지 오차로 인하여 합성 결과에 차이가 발생한다. SDM을 목적으로 부분구조 합성할 경우, 응답모델을 이용하면 다른 모델을 사용하는 것에 비해서 다음과 같은 장점이 있다. 첫째, 기저 구조물이 복잡한 경우에도 비교적 쉽게 적용할 수 있다. 기저 구조물 또는 이의 경계조건이 복잡한 경우, FE 모델을 만들기란 쉽지 않다. 또, 이렇게 만들어진 FE 모델의 해석결과는 실험결과와 오차를 보이며 이러한 경향은 고주파 영역으로 갈수록 더욱 커진다. 이에 반해, 기저 구조물의 FRFs는 실험을 통하여 비교적 쉽게 구할 수 있다. 둘째, 측정된 FRFs에는 모드자름 오차가 없다. 모드모델은 FE 모델 또는 측정된 FRFs로부터 구한다. 복잡한 기저 구조물의 경우, FE 모델에서 모든 모드 매개변수(modal parameters)를 계산하는 것은 불가능하다. 현실적으로는 저주파 영역의 일부 매개변수만 계산할 수 있다. 또, 실험적으로 측정할 수 있는 FRFs의 주파수 범위

* 한국과학기술원 기계공학과

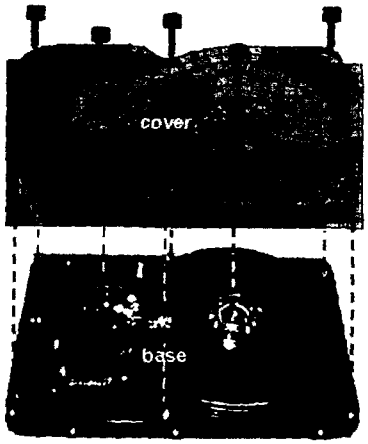


**Fig. 1** An example of FRF-based substructuring - HDD

는 제한적이다. 따라서, 이로부터 구한 모드모델에는 필연적으로 모드자름 오차가 발생된다. 이러한 장점 등으로 응답영역(modal domain)에서 SDM 을 수행하게 된다. 실례로서 동특성 변경을 위해서 하드디스크(HDD) 모델을 수립하는 문제를 살펴보자(Fig. 1). 모델링 관점에서 HDD 는 크게 커버(cover)와 베이스(base) 구조물로 나눌 수 있으며 이들은 8 개의 지점에서 나사로 결합되어 있다. 본 예제는 커버 구조물로부터 발생되는 구조기인 소음(structure-bone noise)를 줄이기 위해서 커버의 형상을 변경하는 문제로 현재 진행중인 과제이다[1]. 커버에 비해서 베이스 구조물은 매우 복잡하다. 따라서, 전체 HDD 의 FE 모델을 수립하기는 힘들다. 응답모델을 사용하면 이러한 어려움을 해결할 수 있다. 구조변경의 대상이 아닌 베이스 구조물은 실험을 통하여 FRFs 를 측정하고, 구조가 비교적 간단한 커버에 대하여 FE 모델을 수립하고 이로부터 FRFs 를 구하면 응답영역에서 부분구조 합성법(FBS, FRF-based substructuring)을 적용할 수 있게 된다. 또 커버의 FE 모델이 있으므로 이의 구조변경이 전체 HDD 의 동특성에 미치는 영향을 쉽게 파악할 수 있다.

FBS 와 관련된 이론은 명확하며 간단하다. 역행렬 계산과 같은 기본적인 행렬연산으로 FBS 를 수행할 수 있다. 그러나, 여러 가지 요인으로 인하여 계산 결과는 실제로 결합된 전체 구조물의 동특성과는 차이를 보인다. 현실적인 이유로 고려하지 못하는 회전자유도와 실험에서 수반되는 여러 가지 측정오차는 주요한 요인이며 이에 대한 연구 또한 많이 진행되었다[2~3]. 본 연구에서는 이러한 요인 중, 상대적으로 덜 중요하게 평가된 모드자름 오차(modal truncation error)의 영향을 고려한다. 모드자름 오차는 측정과 관련된 오차를 줄이기 위

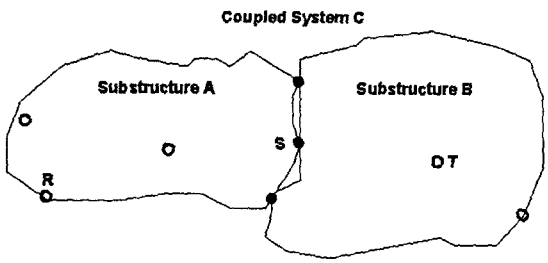


**Fig. 2** A symbolic illustration of substructure synthesis

해서 FRF 를 재생성(regenerated FRF)하거나 FE 모델로부터 구한 일부 모드 매개변수를 이용하여 FRF 를 생성할 때 발생된다. 일반적으로 관심주파수 범위보다 2~3 배의 넓은 주파수 범위의 모드를 포함하여 FRF 를 생성하면 이러한 오차의 영향은 줄어든다고 알려져 있다. 본 연구에서는 단순한 HDD 구조물 모델에 대하여 모의실험을 수행함으로써, 모드자름 오차로 인하여 완전히 잘못된 합성 결과가 나올 수 있다는 것을 보인다. 측정된 FRF 를 이용하여 이러한 오차를 보정(compensation)하는 방법을 소개하고 이를 대상 구조물에 적용하여 모드자름 오차의 영향을 상당히 줄일 수 있다는 것을 보인다. 마지막으로, 복잡한(complicated) 구조물에 대하여 모드자름 오차의 영향을 줄이기 위해서 모든 FRFs 를 보정하는 것은 어려우므로, 이를 해결하기 위한 현실적인 대안을 모색한다

## 2. 기본 이론

FBS 를 위한 여러 가지 방법이 연구되었다. 이 중 Jetmundsen 등[4]이 개발한 방법(improved FRF coupling)이 가장 널리 쓰인다. 두 개의 부분구조를 합성하는 도식적인 예가 Fig. 2 에 나타나 있다. R 과 T 는 부분구조 A 와 B 의 내부 자유도(internal DOFs)를 나타내고, S 는 경계면 자유도(coupling DOFs)를 나타낸다. 경계면에서 기하학적 접합조건과 힘의 평형조건을 적용하면, 합성된 구조물 C 의 FRFs 는 부분구조의 FRFs 와 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} [H_C]_{RR} & [H_C]_{RS} & [H_C]_{RT} \\ [H_C]_{SR} & [H_C]_{SS} & [H_C]_{ST} \\ [H_C]_{TR} & [H_C]_{TS} & [H_C]_{TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_A]_{RR} & [H_A]_{RS} & 0 \\ [H_A]_{SR} & [H_A]_{SS} & 0 \\ 0 & 0 & [H_B]_{TT} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} [H_A]_{RS} \\ [H_A]_{SS} \\ -[H_B]_{TS} \end{bmatrix} \left[ [H_A]_{SS} + [H_B]_{SS} \right]^{-1} \begin{bmatrix} [H_A]_{RS} \\ [H_A]_{SS} \\ -[H_B]_{TS} \end{bmatrix}^T$$

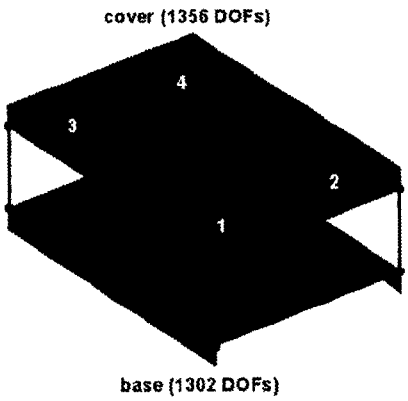


**Fig. 3** Case study – simple HDD model

FBS 와 관련해서 수치적으로 가장 문제가 되는 연산은 역행렬을 계산이다. FRFs 에 포함된 작은 오차는 역행렬 계산과정에 크게 증폭된다. 위의 식을 사용하면 행렬의 역을 단 한 번 계산하므로 다른 FBS 를 방법에 비해서 수치적 문제점를 많이 완화시킬 수 있다. 또, 경계면 자유도 S 와 관련된 FRF 행렬에 대하여 역을 구하므로 계산에 필요한 시간을 단축시킬 수 있다.

정확한 FBS 결과를 얻기 위해서 각 부분구조의 FRFs 는 다음과 같은 요구 조건을 만족해야 한다.

① 모든 FRFs 에 측정과 관련해서 발생되는 랜덤 오차(random error) 그리고 inconsistent 시스템 오차(inconsistent systematic error)가 없어야 한다.
② 경계면 자유도와 관련된 모든 FRFs 가 포함되어야 한다.
③ 모드자름 오차가 없거나 적절하게 보정되어야 한다.

FRFs 에 포함된 오차로 인한 문제를 줄이기 위해서 크게 두 가지 방법이 사용된다. 하나는 특이치 분리법(SVD)과 같이, 역행렬 계산 과정에서 오차가 증폭되는 것을 방지하는 수치적 접근법[2]이고 나머지는 측정된 FRFs 로부터 FRFs 를 재생성하는 것이다. 정확한 FBS 결과를 위해서는 경계면에서 접합되는 자유도와 관련된 모든 FRFs 가 계산에 포함되어야 한다. 회전자유도는 직접적으로 측정하기 불가능한 경우가 많으므로, 유한차분법(finite difference)과 같이 이를 근사적으로 계산하는 방법이 많이 사용된다[3]. 마지막 요구조건은 나머지 두 요구조건에 비해서 덜 중요하게 평가되었다. 관심 주파수 범위보다 2~3 배의 넓은 주파수 범위의 모드를 포함하여 FRF 를 생성함으로써 이러한 오차

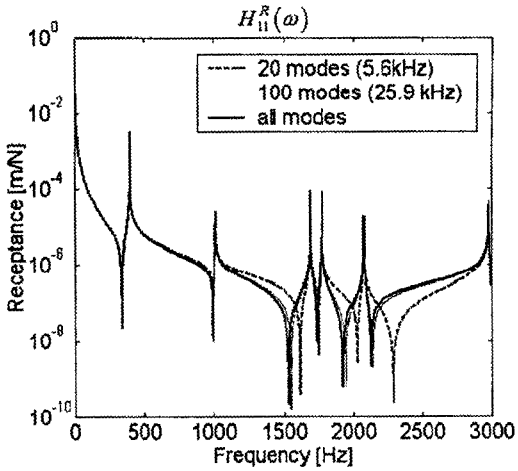


**Fig. 4** FE-derive cover FRFs – effects of mode number

의 영향을 줄이는 방법이 많이 사용된다. 본 연구에서는 모드 자름 오차로 인하여 완전히 잘못된 합성 결과가 나올 수 있다는 것을 보이며 이를 해결하기 위한 현실적인 방안을 모색한다.

## 3. 사례 연구 – 모드자름 오차의 영향

모드자름 오차가 FBS 에 미치는 영향을 파악하기 위해서, Fig. 3 과 같은 단순한 HDD 모델에 대하여 모의실험을 수행하였다. 단순한 모델의 물리적 치수는 실제 HDD(Fig. 1)와 근사하다. 이렇게 함으로써 단순 모델은 실제 HDD 의 비슷한 동특성을 보이며, 따라서 모의 실험을 통해서 실제 HDD 의 FBS 에서 나타날 수 있는 문제점을 파악할 수 있다. 관심 주파수 범위는 0~3kHZ 이다. 커버와 베이스 구조물의 총 자유도 수는 각각 1356 그리고 1302 이다. 커버와 베이스는 6 개의 지점에서 6 자유도(3T, 3R)가 구속되었다고 가정한다. 커버와 베이스 FE 모델에서 모드 매개변수를 계산하고 이로부터 FRFs 구한다. FE 모델로부터 FRFs 생성하였으므로 앞 절에서 설명한 요구조건 ①과 ②를 만족시킬 수 있다. 본 모의 실험에서는 이들 요인을 제거하고 모드자름 오차가 FBS 결과에 미치는 영향을 파악하고자 한다.

전체 자유도 또는 모드 개수가 $N$ 일 때, 모드 매개변수로 계산된 FRF 는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$H_{ij}^{C}(\omega) = H_{ij}^{R}(\omega) + R_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{m} \frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2 - \omega_r^2} + \sum_{r=m+1}^{N} \frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2 - \omega_r^2} \quad (1)$$

여기서, $H_{ij}^{C}$ 와 $H_{ij}^{R}$ 는 각각 $N$ 와 $m$ 개의 모드 매

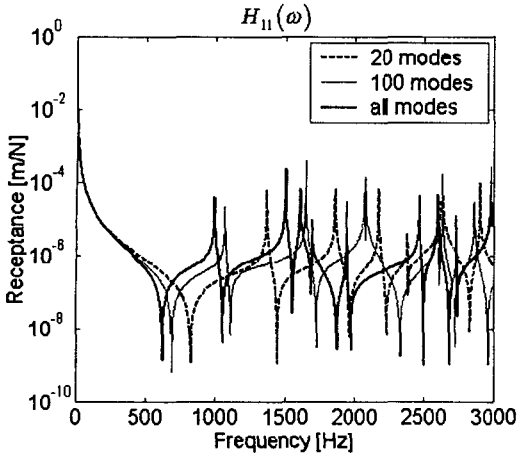


**Fig. 5** FBS results – residual effects of cover FRFs

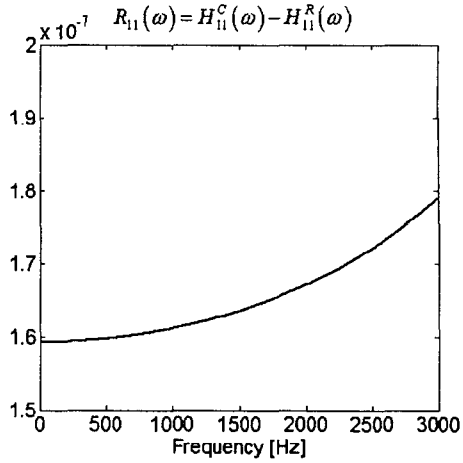


**Fig. 6** Residual term of FE-derived cover FRF

개변수로부터 생성된 FRF를 나타낸다. $m<N$이므로, $H_{ij}^{R}$에는 모드 자름오차가 발생한다. 즉,

$$R_{ij}(\omega)=H_{ij}^{C}(\omega)-H_{ij}^{R}(\omega)=\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2-\omega^2} \qquad (2)$$

하나의 예로서, Fig. 4에 모드자름 오차가 있는 커버의 FRF가 도시되어 있다. 가진점과 측정점은 동일하게 절점 1이다(Fig. 3). 20개의 모드 매개변수(관심주파수 영역의 약 2배)를 사용하여 계산된 FRF는 정확한 값과 약간 차이를 보이지만, 100개의 모드 매개변수(관심주파수 영역의 약 10배)로부터 계산된 FRF는 정확한 값과 차이가 거의 없다는 것을 알 수 있다.

전체 모드 매개변수를 사용하여 베이스의 FRFs를 생성하고 모드자름 오차가 있는 커버의 FRFs와 FBS를 수행하였다. 따라서, 커버 FRFs의 모드자름 오차가 FBS 결과에 어떠한 영향을 미치는지 검토할 수 있다. Fig. 5는 합성된 전체 구조물의 FRF를 도시한 것이다. 가진점과 측정점은 절점 1이다(Fig. 3). 그림에서 볼 수 있듯이, 모드자름 오차로 인해서 합성된 결과는 정확한 값과 매우 큰 차이를 보인다. 20개의 모드 매개변수로 생성된 커버의 FRFs를 사용하여 FBS를 수행한 경우, 관심 주파수 전체 영역에서 정확한 결과와 완전히 다른 양상을 보인다. 따라서 모의 실험을 통하여, 관심주파수 범위보다 2~3배의 넓은 주파수 범위의 모드를 포함하여 FRF를 생성해도 모드자름 오차의 영향이 매우 클 수 있다는 것을 알 수 있다. 100개의 모드 매개변수로 생성된 커버의 FRFs 사용한 경우에도, FBS 결과는 첫 번째 고유진동수만 정확한 값과 비슷하며 앞의 경우와 마찬가지로 전체 관심 주파수 영역에서 정확한 값과 큰 차이를 보인다.

Fig. 1과 같이 FBS를 실제로 적용하는 문제에서, 이와 같은 모드자름 오차의 영향을 줄이기 위해서 FE 모델로부터 충분히 많은 모드를 계산하여 FRFs를 생성하면 되지만 이는 현실적으로 불가능하다. 일단 몇 개의 모드가 충분한지 알 수 없고 또 FE 모델의 자유도가 큰 경우, 저주파 영역의 몇 개의 모드만 효과적으로 계산할 수 있기 때문이다. 또한, FE은 고주파 영역으로 갈수록 오차가 증폭되기 때문에 많은 모드를 사용하여 생성된 FRFs가 정확한 값과 차이를 보일 수 있다.

## 4. 모드자름 오차의 보정

본 장에서는 모드자름 오차를 보정하기 위한 방법을 소개하고 이를 적용한다. 마지막으로 보정에 필요한 많은 노력을 줄일 수 있는 현실적 대안을 모색한다.

### 4.1 모드자름 오차의 보정 방법

실험으로 측정된 FRF에는 모드자름 오차가 없다. 따라서 대상구조물에 대하여 측정된 FRF가 있다면, 일부 모드 매개변수로부터 생성된 FRF에서 발생되는 모드자름 오차 $R_{ij}(\omega)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_{ij}(\omega)=\sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2-\omega^2}=H_{ij}^{C}(\omega)-H_{ij}^{R}(\omega) \qquad (3)$$

여기서, $H_{ij}^{C}$는 실험을 통하여 측정된 FRF를 나타내고 $H_{ij}^{R}$는 $m$개의 모드 매개변수를 이용하여 생성된 FRF를 나타낸다. Fig. 6은 커버 FE 모델(Fig. 3)에서 20개의 모드 매개변수를 이용하여 FRF를 생성하였을 때, 발생되는 모드자름 오차를 나타낸 것이다. 여기서는 전체 모드 매개변수를 이용하여

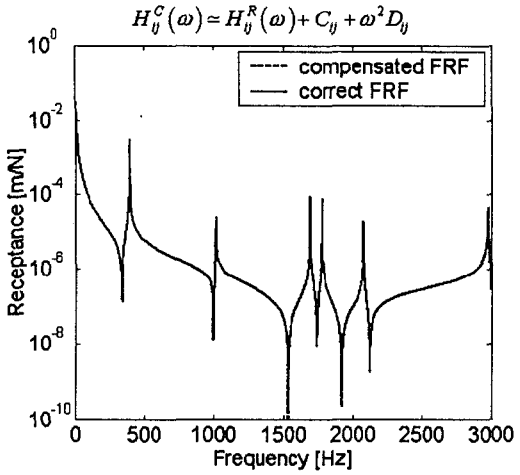


**Fig. 7** Compensated cover FRF - dynamic residual compensation

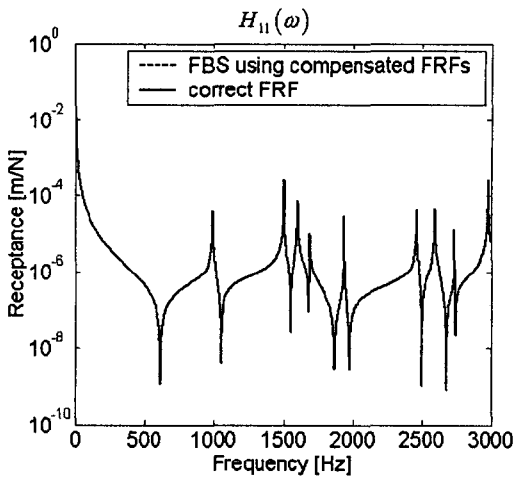


**Fig. 8** FBS result using compensated FRFs

생성한 FRF를 측정된 FRF라고 가정하였다. 이와 같이 실험적 방법으로 모드자름 오차를 구할 수 있게 되면 이를 보정할 수 있다. 대표적인 두 가지 방법을 소개한다[5].

- High-Frequency Pseudo-mode Approximation

이 방법은 모드자름 오차를 다음과 같이 하나의 가상 모드(pseudo-mode)로 근사화한다.

$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2 - \omega^2} ; \frac{A_{ij}^{pm}}{\lambda_{pm}^2 - \omega^2} \tag{4}$$

여기서, $\lambda_{pm}$과 $A_{ij}^{pm}$의 값은 모드자름 오차 $R_{ij}(\omega)$와 오차가 최소화되도록 결정한다.

- Dynamic Residual Compensation

$\lambda_r ? \omega$이면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_h^2 - \omega^2} &= \frac{1}{\lambda_h^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\lambda_h^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\lambda_h^2}\left(1 + \left(\frac{\omega^2}{\lambda_h^2}\right) + \left(\frac{\omega^2}{\lambda_h^2}\right)^2 + \mathrm{L}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

따라서, 모드자름 오차는 다음과 같이 2차 항으로 근사화 할 수 있다.

$$R_{ij}(\omega) = \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{{}_{r}A_{ij}}{\lambda_r^2 - \omega^2} ; C_{ij} + \omega^2 D_{ij} \tag{6}$$

첫 번째 방법과 마찬가지로 $C_{ij}$와 $D_{ij}$ 값은 최소자승법을 이용하여 결정한다. Fig. 7은 Fig. 6과 같이 모드자름 오차를 구할 수 있다고 가정하고, 두 번째 방법을 사용하여 커버의 FRF를 보정한 결과이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 정확한 FRF와 차이가 거의 없다

### 4.2 사례 연구 - 보정된 FRFs를 이용한 FBS

20개의 모드 매개변수로 생성된 단순 HDD 커버의 모든 FRFs를 Fig. 7과 같이 보정하고 FBS를 수행하였다. 3장의 예와 마찬가지로 베이스의 FRF에는 모드자름 오차가 없다. Fig. 8은 합성된 FRF를 나타낸 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 정확한 결과와 차이가 거의 없다. 모드자름 오차의 영향이 보정되지 않은 FRFs를 이용하여 FBS를 수행한 Fig. 5의 결과와 비교해 보면, FRFs의 보정하는 효과는 매우 크다는 것을 알 수 있다. 그러나, 이렇게 보정하기 위해서는 FBS를 수행하는 데 필요한 모든 FRFs를 실험으로 측정해야 한다. 구조물에서 관심의 대상이 되는 절점이 많은 경우, 모든 FRFs를 측정하고 보정하려면 많은 노력이 요구되므로 이를 실제 적용하기는 힘들 것이다.

### 4.3 사례 연구 – 부분적으로 보정된 FRFs를 이용한 FBS

FBS를 수행하기 위해서는 FRF 행렬의 역을 구하는 과정이 필요한데, 이 과정에서 모드자름 오차가 크게 증폭된다. Fig. 5는 이런 경향을 잘 나타내고 있다. 따라서 모든 FRFs를 보정하는 것이 현실적으로 불가능할 경우, 역 행렬 연산에 사용되는 FRFs만을 부분적으로 보정하고 FBS를 수행하면 모드자름 오차가 크게 증폭되는 것을 방지할 수 있다. Fig. 9는 경계면 자유도와 관련된 커버의 FRFs만 보정하고 FBS를 수행한 결과이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 정확한 결과와 약간의 오차를 보인다. Fig. 5의 결과와 비교해보면, 일부 FRFs만 보정하여 FBS를 수행하였지만 이의 효과는 매우 크다는 것을 알 수 있다.

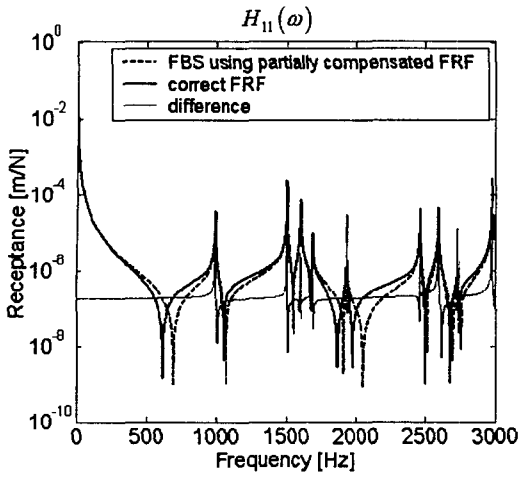


**Fig. 9** FBS result using partially compensated FRFs

## 5. 결론 및 향후과제

본 논문에서는 FBS를 수행할 때 발생되는 여러 가지 문제점 중, 모드자름 오차와 관련된 문제를 다루었다. 모드자름 오차는 측정과 관련된 오차를 줄이기 위해서 FRF를 재생성하거나, FE 모델로부터 구한 일부 모드 매개변수를 이용하여 FRF를 생성할 때 발생된다. 이러한 모드자름 오차는 FBS 수행과정에서 크게 증폭된다. 많은 모드 매개변수를 이용하여 FRF를 생성함으로써 이의 영향을 줄일 수 있다고 알려져 있지만, 모의 실험을 통하여 만족되지 않을 수 있다는 것을 보였다.

모드자름 오차의 영향을 줄일 수 있는 방법으로 본 논문에서는 두 가지 FRF 보정 방법을 소개하였다. 두 방법 모두 FRF를 보정하기 위해서 실험적으로 측정된 FRF를 사용한다. 모의 실험에서 보정된 FRFs를 사용하여 FBS를 수행하면, 모드자름 오차의 영향을 크게 줄일 수 있다는 것을 보였다. 또 이의 영향을 줄이기 위해서 모든 FRFs를 보정하는 것은 현실적으로 힘들기 때문에, 부분적으로 FRFs를 보정하는 방법을 제안하였다. 이는 역행렬 연산에 사용되는 경계면 자유도의 FRFs만을 보정함으로써, 오차가 크게 증폭되는 것을 방지하는 방법이다.

본 연구의 모의 실험에서는 FRFs에 측정과 관련된 오차는 없다고 가정하였다. FRFs의 측정 오차는 모드자름 오차를 보정하는데 영향을 줄 수 있으므로, FRFs의 측정오차가 FBS 결과에 미치는 영향을 검토하는 것이 필요하다. 이와 관련된 연구가 현재 진행 중에 있다.

## 후 기

본 연구는 국가지정연구사업 "진동저감을 위한 동특성 변경기술(M1-0001-00-0139)"의 지원에 의한 것이다.

## 참고문헌

(1) 김경호, 박미유, 박윤식, "HDD 소음제어를 위한 SDM 기술 개발," 한국소음진동학공학회 추계학술대회논문집, pp. 765~770, 2000.

(2) Lim, T. C. and Li, J., "A Theoretical and Computation Study of the FRF-based Substructuring Technique applying Enhanced Least Square and TSVD Approaches," Journal of Sound and Vibration, Vol. 231, No. 4. pp. 1135~1157, 2000.

(3) Liu, W. and Ewins, D. J., "The Importance Assessment of RDOF in FRF Coupling Analysis," Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, pp. 1481~1487, 1999.

(4) Jetmundsen, B., Bielawa, R. L. and Flannelly, W. G., "Generalized Frequency Domain Substructure Synthesis," Journal of the American Helicopter Society, pp. 55~64, 1988.

(5) Duarte, M. L. M., "Experimentally-derived structural models for use in further dynamic analysis," Ph. D. Thesis, Imperial College, University of London, 1996.