

해밀턴역학을 이용한 충격현상의 모델링

Hamilton's Equations for Modeling of Impact Dynamics

구 차 춘^{*}
Ja Choon Koo

Key Words : Impact Dynamics, Hamiltonian

ABSTRACT

Hamiltonian modeling approach has been extensively adopted for rigid body dynamics whereas its usage for deforming flexible continuum dynamics has been limited. A set of Hamilton's equations for flexible body motion with finite deformation has been derived and applied for a nonlinear impact problem.

1. 서론

해밀턴역학을 비롯한 해석역학의 분야는 오랜 역사와 수많은 연구들이 기계공학뿐 아니라 물리학을 비롯한 여러 다른 분야에서 이루어져왔다. 기계공학의 경우 그 연구들의 대부분이 강체의 운동을 기술하고 해석하는데 집중되어 왔으며 에너지법칙의 모델링 편의 때문에 다물체 동역학등 기하학적으로 복잡하고 해석이 난해한 부분에서 주로 사용되어오고 있다. 반면 그 응용이 변형하는 고체의 운동이나 유체의 흐름 등에는 매우 제한적으로 사용되고 있다. 시간에 대한 1차 상미방으로 시스템의 모델을 제공하는 에너지역학의 기본적인 장점은 계산상의 편의와 그 비용의 절감에 상당한 이점이 있으나 복잡한 형태의 보존의 법칙들을 해밀턴역학에 맞게 적절하게 표현하기 용이하지 않다는 어려움이 있다. 시스템의 운동이 연속체를 포함하고 또 연속체로 정의된 재료는 대부분 복잡한 형태의 비선형 편미분 방정식으로 그 보존을 정의하여 운동을 표현하며 또 그들은 모두 구성방정식으로 연관되어 있다. 이 논문에선 해밀턴역학으로 변형하는 연속체를 포함하는 시스템을 모델하고 해석하는 한 예를 보이고자 한다. 시스템의 특성에 맞도록 일반화된 좌표계를 설정하고 해석역학에서 제공하는 Constraint의 기본원리를 응용하여 연속체에 대한 보존의 법칙을 구현하며 가상일의 원리를 적용 시스템영역과 그것이 위치한 환경

* 성균관대학교 기계공학부

과의 관계 즉 경계에서의 현상과 또 유한차분화된 시스템과 그 재료사이의 관계를 적절히 표현함으로써 충격으로 인해 변형하는 비선형 시스템의 운동을 1차 상미방 형태의 상태방정식으로 표현하였다. 또한 유한한 변형을 동반하는 충격현상의 모델을 적절히 하기 위하여 임의의 Lagrangian-Eulerian관점을 도입하였다.

2. 영역의 차분과 좌표계 설정

이곳에서 소개되는 에너지 해석방법은 일반적인 탄소성 변형을 동반하는 운동의 영역을 유한차분하고 해밀톤 방정식을 적용하여 운동방정식을 유도해낸다. 이를 위하여 변형 가능한 관제역 개념이 도입되어야 하며 한 관제역 내에서 속도는 선형적으로 변하며, 밀도와 엔트로피 밀도는 상수로 가정한다[1] 여기서 도입한 한유한요소 내부의 속도 구배가 상수고 그 속도 v 공간의 임의의 위치 w 의 함수로 표현하면

$$v = L(w - w_0) + v_0 \tag{2a}$$

이곳에서 L 은 한 유한요소의 속도구배 이고 v_0 은 그 유한요소의 중심에서의 속도이며, w_0 는 그 유한요소의 중심의 위치이다. 단위시간당 유한요소

의 표면을 통과한 물질의 체적유량은 유한요소 (i)의 표면(j)에서 다음과 같이 정의한다.

$$T \equiv p^T \dot{q} - T^* = T(m, p) \quad (3e)$$

$$\frac{d\eta^{(i,j)}}{dt} = - \int_a (v - \frac{dw}{dt}) \cdot nda^{(i,j)} \quad (2b)$$

과 같이된다. 다음은 Potential 에너지에 관하여 생각해보면

여기서 n 은 바깥쪽으로 향하는 방향 벡터이다.

$$U = mu(\rho, s) \quad (3f)$$

3. 운동에너지와 위치에너지

해밀턴역학은 관찰하고자하는 시스템의 영역의 운동에너지와 포텐셜에너지의 합으로 표현되므로 이 장에서 그들을 유도해보고 상응하는 일반화된 좌표 (Generalized Coordinate)와 속도, 운동량, 그리고 보존력등을 찾아본다. 운동 에너지를 찾기위하여 Co-energy (T*)를 보면,

로 정의할 수 있다. 여기서 m 은 질량, ρ 는 밀도, s 는 엔트로피 밀도를 각각 의미한다. 밀도는 부피의 함수이며 부피는또 유한요소의 각점의 위치 w의 함수이므로 식 (3f)는

$$U = U(m, S, w) \quad (3g)$$

그러므로 이에 해당하는 보존력을 구하면

$$T^* = (1/2) \int_V \rho v \cdot v dV \quad (3a)$$

$$g = \frac{\partial U}{\partial m}, \theta = \frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial w} = -K^T P \quad (3h,i,j)$$

요소의 각 점에서의 속도(v)를 일반화된 속도(ḡ)로 취하면

구해진 해밀턴 에너지의 형태는 참고문헌에서 자세히 유도 증명되어 있다 [2,3].

$$\dot{q} = v \quad (3b)$$

4. Non-Holonomic Constraint와 보존의 법칙

시스템차원의 운동 Co-Energy는

우리는 이곳에서 해밀턴역학을 이용하기 때문에 연속체역학의 기본보존의 법칙들을 구현하기 위하여 Non-Holonomic Constraints의 개념을 도입한다[4]. 각 요소의 벽을 통과하는 유량은 벽 주변 요소들의 밀도 그리고 물질과 요소의 상대속도로 표현할 수 있다. 이는 Non-Holonomic Constraint의 형태를 취하며 다음과 같다.

$$T^* = (1/2) \dot{q}^T M \dot{q} = T^*(m, \dot{q}) \quad (3c)$$

그리고 그에 상응하는 일반화된 운동량은

$$p = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}} \quad (3d)$$

$$\dot{m}^{(i)} = - \sum_{j=1}^{n+1} (1/2) [- \frac{m^{(i)}}{V^{(i)}} + \rho^{(i,j)}] \times$$

$$\int_a (v - \dot{w}) \cdot nda^{(i,j)} \quad (4a)$$

르잔드르 변형을 적용하여 운동에너지를 구하면

여기서 $\rho^{(i,j)}$ 는 요소 (i)의 주변 요소 (j)의 밀도를 의미한다면 식(4a)은 시스템 전체에 관하여 적용할 경우 질량보존 방정식이 된다.

다음은 에너지보존의 법칙을 동일한 방법에서 엔트로피의 전과형태로 표현할 수 있다. 이 또한 다른 형태의 Non-Holonomic Constraints가 되며 다음과 같이 표현할 수 있다

$$\dot{S} = \dot{S}^{con(i)} + \dot{S}^{irr(i)} + \dot{S}^{com(i)} \quad (4b)$$

여기서 우변은 엔트로피의 전달, 소모되어 시스템 밖으로 발산되는 에너지, 그리로 열전달 효과를 각각 나타내고 있다. 여기서 첫 번째 항은 (4a)와 같은 방법으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{S}^{(i)} = -\sum_{j=1}^{n+1} (1/2) \left[\frac{S^{(i)}}{V^{(i)}} + \sigma^{(i,j)} \right] \times \int_a (v - w) \cdot nda^{(i,j)} \quad (4c)$$

여기서 $\sigma^{(i,j)}$ 는 요소 (i)의 표면 (j)에 접한 주변요소의 단위 체적당의 엔트로피를 말한다. 또한 (4b)의 두 번째 항은

$$\dot{S}^{irr(i)} = (1/\theta^{(i)}) \int_V T \cdot DdV^{(i)} \quad (4d)$$

여기서 T는 응력 텐서이고 D는 그에 해당하는 변형 텐서이다. 마지막으로 식 (4b)의 세제항은 열의 전도현상을 표현하고 있다.

$$\dot{S}^{com(i)} = c_1 \sum_{j=1}^n (1/2) \left[\frac{m^{(i)}}{V^{(i)}} c_s^{(i)} c_v^{(i)} + \right.$$

$$\left. - \frac{m^{(j)}}{V^{(j)}} c_s^{(j)} c_v^{(j)} \right] (\theta^{(i)} - \theta^{(j)}) \Gamma_{ij} \quad (4f)$$

여기서 c_v 는 specific heat을 나타내며 Γ_{ij} 는 요소 (i)와 접한 요소 (j)의 공유 표면적이며 c_1 은 열전달 계수이다.

5. Adaptive 유한요소

앞에서 언급된바와 같이 이곳에서 유도된 헤밀톤 방정식은 각 유한요소의 독립적 운동이 포함될 수 있으며 그 운동은 물질의 운동과 연계하여 계산에 편리하도록 적절하게 제어될 수 있다. 이는 임의의 Lagrangian-Eulerian 관점에서 가능하게 되며 그렇게 함으로써 대부분의 충격문제들에 동반되는 유한한 변형으로 인해 발생하는 발산을 해결하기 위해 계산도중 계산을 정지하고 요소들을 다시 형성하는 작업들을 배제할 수 있다. 그러므로 요소의 운동은 또 하나의 Non-Holonomic Constraint로 나타낼 수 있으며 일반화된 힘의 최종형태는 유한요소의 운동 또한 포함되어야 한다. 요소의 운동은

$$\dot{w} = Gv \quad (5a)$$

여기서 G를 적당히 선택함에 있어서 모델은 Lgrangian, Eulerian 또는 임의의 Lagrangian-Eulerian으로 표현된다. 만약 $G=I$ 이면 요소의 각 점의 속도는 물질의 속도와 일치하므로 모델은 Lagrangian으로 되며, 만약 $G=0$ 이면 요소의 점들이 움직이지 않고 공간에 고정되게 되므로 모델은 Eulerian이 된다. 반면 $G=f(v, m, w, S)$ 가 되면 요소를 시스템의 상태방정식에 따라 움직일 수 있으므로 모델이 Adaptive 형태가 된다. 즉 다시 말해 하나의 모델에서 어떠한 요소들은 Lagrangian으로, 또 어떠한 요소들은 Eulerian으로, 또 다른 어떤 요소들은 그들의 중간형태의 운동을 할 수 있게 된다. 여기서 I는 단위 텐서이며 0은 모든 항이 0인 텐서이다.

6. 가상일

해밀턴역학 모델은 일반화된 가상일의 표현으로 완성 될 수 있다. 총 가상일은 내부일과 외부일로 나뉘어 지며

$$\delta W = \delta W^i + \delta W^e \quad (6a)$$

외부일 (δW^e)은 시스템의 경계에서 밖으로부터 가해진 일을 이야기하며 이는 밖으로부터의 총 엔탈피 유입량과 기계적 하중에 의한 효과이다. 그러므로 이를 수식화하면

$$\delta W^e = E^T \delta q + (F(t) - E)^T \delta w \quad (6b)$$

여기서 $F(t)$ 는 외부로부터 가해진 응력을 시스템 경계에 관해 적분한 값이며 E 는 외부로부터의 엔탈피 유입이다. 내부 가상일 (δW^i)은 재료와 유한요소의 기하학적 운동의 차이에서 발생하는 일과 그로인해 발생하는 질량의 유입 때문에 일어난다. 질량유입에 의한 가상일은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\delta W^{mass} = (\dot{M} v)^T \delta q - 2k^T \delta m \quad (6c)$$

여기서 k 는

$$k = -\frac{\partial T}{\partial m} \quad (6d)$$

를 말하며 즉 단위질량이 가지고있는 운동에너지의 양을 표현한다. 그리고 (2a)가 보여주듯 속도는 요소의 기학적 속도가 내재되어있으므로 그로인해 발생하는 내부의일은 다음과 같다.

$$\delta W^{mesh} = [ML \dot{w}]^T \delta q - [L^T(Mv)]^T \delta w \quad (6e)$$

이로써 각요소의 독립적 운동 때문에 발생하는 운동량의 변화를 내부 가상일로 적절히 처리하였다. 그러므로 (6b), (6c),와 (6e)를 결합하면 또하나의 일반화된 힘을 시스템의 State인 $p, m,$ 과 w 의 함수로 구할 수 있다.

7. 해밀톤 방정식

시스템 전체에 대한 Hamiltonian (H) 은 다음과 같이 표현된다.

$$H = T + U = H(p, m, S, w) \quad (7a)$$

그리고 Canonical 형태의 해밀톤 방정식은

$$\dot{p} = f^p, \frac{\partial H}{\partial m} = f^m, \frac{\partial H}{\partial S} = f^S, \frac{\partial H}{\partial w} = f^w \quad (7b,c,d,e)$$

로 표현되며 $f^p, f^m, f^S,$ 와 f^w 는 각각 Constraint와 가상일로부터 계산된 일반화된 힘을 나타낸다. 만약 $\lambda^{(i)}, \gamma^{(i)},$ 그리고 $\phi^{(i)}$ 를 질량보존의 법칙, 에너지 보존, 그리고 요소운동에 해당하는 Lagrange Multiplier로 하면 그에 해당하는 일반화된 힘은 각각

$$f^m = \lambda - 2k \quad (7f)$$

$$f^S = \gamma \quad (7g)$$

$$f^w = \phi + F(t) - E - L^T p \quad (7h)$$

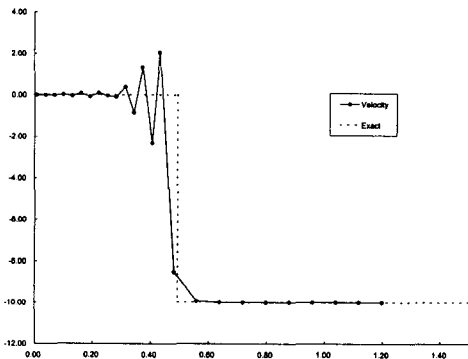
$$f^v = -[(I-G)^T \alpha^T \lambda + (I-G)^T \beta^T \gamma + R^T \gamma + G^T \phi] +$$

$$E + ML \dot{w} + \dot{M} v \quad (7i)$$

으로 구해지며 이들과 (7c) - (7d)의 관계에서 Lagrange Multiplier들의 값을 구할 수 있고 이들의 결과를 이용하면 시스템에 관한 해밀톤 방정식을 구할 수 있다.

8. 응용예제

이장에선 (7a)를 구성하고 그로부터 해밀톤 방정식을 유도 그를 이용한 비선형 충격현상을 해석하는 예를 보인다. 예는 길이가 15in인 고체 봉이 일정한 속도로 우측에서 좌측으로 진행하다가 갑자기 벽에 충돌하여 멈추는 순간 충격이 전달되어가는 현상을 해석하고 있다. 24개의 유한요소가 사용되었으며 영의 계수는 1.0×10^3 psi, 기준 밀도는 1.0×10^{-2} psi-s²/in² 이며, 마찰계수는 7.0이 사용되었다. 2차 Runge-Kutta 방법으로 적분되었으며 그림은 충돌후 0.4ms 후의 각요소의 속도를 보여준다. 해석적으로 구한 해와 비교할 때 매우 정확한 일치를 보이고 있다[5].



9. 결론

해밀톤역학을 이용하여 이 논문에선 변형하는 부분이 존재하는 시스템에 가해진 비선형 충격현상을 해석하였다. 전통적인 해석방법, 즉 문제영역에 Reynolds의 법칙을 적용하여 편미방 형태의 보존법칙들을 유도하고 그들을 구성방정식을 이용하여 연계시킨 후 Galerkin 방법이나 Collocation 방법등의 오차 극소화 (Error Minimization) 방법등을 적용하고 문제의 영역을 차분화 하여 해석하는 방법과 달리 이곳에선 영역을 차분화 하고 그 시스템의 총 에너지형태를 구하며 그로부터 그에 적절한 일반화된 좌표를 정의하고 Non-Holonomic Constraints와 가상일을 이용 Hamiltonian을 구성하였으며 그것을 시간에 관하여 미분함으로써 얻어진 1차 미분방정식을 간단한 적분방법으로 적분하여 해석할 수 있는 방법을 소개하였다.

참고문헌

- [1] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1989
- [2] E.P. Fahrenthold, M Venkataraman, *Eulerian bond graphs for fluid continuum dynamics*, Compu. Meth. Appl. Mech. Eng. 178, 1999, 1-22
- [3] D.C. Karnopp, D.L. Margolis, R.C. Rosenberg, *System Dynamics: A Unified Approach*, Wiley, New York, 1990
- [4] M.A. Biot, *New variational Lagrangian irreversible thermodynamics with application to viscous flow reaction diffusion and solid mechanics*, Adv. Appl. Mech. 24, 1984, 1 - 91.
- [5] H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, Dover, New York, 1963