

궤환 가진기를 이용한 모델 개선법

°정훈상*, 박영진*

Model updating using the feedback exciter

°HUNSANG JUNG* AND YOUNGJIN PARK*

Abstracts : The updating of the FE model to match it with the experimental results needs the modal information. There are two causes where this methodology is ill-equipped to deal with; under-determined and ill-conditioning problem. In this research, the feedback exciter which uses the summation of the white noise and the signals from the measurement sensors multiplied with feedback gains is proposed. The new energy path generated by the feedback exciter changes the modal characteristics of the system and this additional modal information can solve the under-determined problem in the model updating. Through the proper selection of the exciter and sensor locations and the feedback gain, the eigenvalue sensitivity of the updating parameters which cause the ill-conditioning of the sensitivity matrix can be modified. This methodology does not require any additional equipments, makes the acquirement of the additional modal information easy and is robust to the measurement noise.

Keywords : model updating, feedback exciter, finite element model, sensitivity matrix

기호 설명

- $M, C, K \in R^{n \times n}$: 시스템 행렬
- $x \in R^{n \times 1}$: 변위 벡터
- $f \in R^{n \times 1}$: 힘 벡터
- $b \in R^{n \times 1}$: 가진 위치 벡터
- f_u : 힘 입력
- $k_F, c_F, m_F \in R^{l \times n}$: 궤환 이득값
- $m_s, c_s, k_s \in R^{l \times n}$: 가진기 시스템 행렬
- $S \in R^{n \times l}$: 고유치 민감도 행렬
- $\Phi \in R^{n \times n}$: 측정 고유 벡터 행렬
- $\Lambda \in R^{n \times n}$: 측정 고유치 행렬
- $\Phi^L \in R^{n \times n}$: 좌 고유치 벡터
- $\Phi^R \in R^{n \times n}$: 우 고유치 벡터

1. 서론

시스템에 대한 신뢰할 수 있는 모델을 만드는 문제는 지금까지 많이 다루어져 왔던 분야로서 직접 방법론과 반복 방법론으로 나누어질 수 있다. 직접 방법론은 측정 결과를 정확하게 모사하는 모델을 만들어 낼 수 있지만 측정이 불가능한 점에 대한 추정이 필요하고 측정 가능한 모드 형상에 한계가 있기 때문에 종종 개선된 질량과 강성 행렬에 원래 시스템에는 존재하지 않는 에너지 전달 경로가 생기거나 질량이나 강성 행렬에 정정성(positive definiteness)가 없어지는 등의 문제점이 발생하여 물리적인 의미를 잃은 모델이 구해지는 경

우도 있다.

이런 문제들 때문에 최근에는 실험결과만을 이용하여 질량이나 강성행렬을 구하지 않고 기본 모델로 유한 요소 모델을 이용하고 의심스러운 부위의 질량이나 강성 계수를 측정 가능한 모드 정보를 이용하여 개선하는 반복 방법론이 많이 쓰이고 있다. 이 방법론은 유한 요소 모델의 고유치 및 고유 벡터의 민감도 식을 이용하여 실험에서 구한 고유치 및 고유 벡터와 유한 요소 모델의 계산값들의 차이를 최소화하는 방향으로 질량 및 강성 계수를 개선하여 준다. 이 방법론에는 대략 2 가지 정도의 문제점이 존재한다⁽¹⁾.

우선 과결정(under determined) 문제를 들 수 있다. 많은 실험 결과에 의하면 실험을 통해 구한 고유치에는 대략 1% 정도의 작은 오차가 존재하지만 고유 벡터에는 대략 10% 정도의 비교적 큰 오차가 존재하는 것으로 알려져 있다. 만약 개선하고자 하는 질량 및 강성 계수의 고유치와 고유 벡터에 대한 민감도 행렬의 조건(condition)이 나쁠 경우 모드 벡터에 포함된 편향 오차들은 개선된 질량 및 강성 계수에 큰 편향 오차를 유발하게 되어 개선된 모델에 대한 신뢰도를 떨어뜨리게 된다. 이 때문에 이런 편향 오차가 포함된 고유 벡터를 사용하지 않고 비교적 오차가 적은 고유치만을 이용할 경우 개선하고자 하는 모델 계수의 수보다 측정수가 적어져서 유일한 해를 구할 수 없게 되어 모델 계수의 숫자를 오차 국소화 방법을 통해 줄이거나 모델 계수의 최소 분산해(minimum variance method)를 통해 유일해를 구할 수밖에 없어서 모델 계수에 대한 신뢰도가 떨어지게 된다.

오차가 포함된 고유 벡터 정보를 쓰지 않고

* Member, Dept. of Mechanical Engineering, KAIST, Taejeon, 305-701, Korea

모델 개선에 필요한 고유치 정보량을 늘이는 방법론에 대한 연구는 그 동안 많이 진행되었다. W. D'ambrogio et al.⁽²⁾은 반대 공진점(anti resonance point)을 모델 개선에 포함시키는 방법론을 제시하였고 S. li et al.⁽³⁾은 실제로 시스템의 경계 조건을 변형시켜서 공진 주파수 정보를 늘였다. 이와 유사하게 N. Nalitolela et al.⁽⁴⁾은 점 질량이나 점 강성을 시스템에 부착하여 변형된 시스템에 대한 고유치를 측정하는 방법을 제안하였고 최근에 P.D. Cha⁽⁵⁾ 등이 이것을 응용하여 모델 계수의 유일한 해를 구하는 방법을 제안하였다. 또한 J. H. Gordis et al.⁽⁶⁾과 N. Nalitolela et al.⁽⁷⁾등은 각각 가상 경계 조건과 가진 위치의 가상 강성 부착법을 통해 측정 FRF 결과로부터 다른 주파수 정보를 얻어내는 방법을 제안하였다. 반대 공진점 방법은 반대 공진점의 존재가 시스템의 전체적인 성질로 나타나지 않고 그 값이 고유치에 완전히 독립적이지 않기 때문에 새로운 정보를 확보하지는 못한다. 점 질량이나 점 강성을 시스템에 부착하는 방법은 정보의 수를 늘이는데 용이하지만 실제로 시스템에 점 질량이나 점 강성을 부착하는데 어려움이 있으며 변형의 크기에도 한계가 있다. 가상 경계 조건이나 가상 강성 부착법은 실제적인 측정 정보를 확보하지 못하고 단순히 초기 측정 결과를 가지고 종속적인 정보량을 늘여서 유일해를 구하는 것에만 초점을 맞추고 있다는 문제점이 있다.

고유치와 고유 벡터의 민감도를 이용하는 모델 개선법의 두번째 문제점으로 민감도 행렬의 약조건(ill conditioning)을 들 수 있다. 민감도 행렬의 약조건은 유한 요소 모델의 특정 모델 변수들에 대한 민감도가 서로 유사하여 민감도 행렬의 특정 열들이 서로 매우 비슷하게 나올 때 발생하는 문제이다. 기존의 연구에 의하면 민감도 행렬의 특정 열들이 서로 비슷하게 되면 민감도 행렬의 조건수(condition number)가 매우 커지게 된다. 이 경우 측정값에 포함된 작은 편향 오차가 개선된 모델 변수에 상대적으로 매우 큰 편향 오차로 반영되게 되고 특히 민감도 행렬의 조건(condition)이 매우 안좋을 경우 모델 변수가 반복 계산 중에 발산할 수도 있다. 이 문제에 대한 기존의 연구⁽⁸⁾는 주로 모델 변수의 매회 계산 중에 발산하는 것을 막아 주는 것에 치중되어 있었다.

본 논문에서는 모델 개선에서 대표적인 이 두 가지 문제점들을 해결하기 위해서 기존의 모달 테스트를 위해 사용되는 가진기의 입력 신호로 백색 잡음과 센서의 피드백 신호를 같이 넣어주어 가진기를 포함한 궤환 루프를 시스템에 걸어주는 방법을 제안한다. 궤환 루프에 의해 변형된 시스템은 가진기 및 센서들의 위치 그리고 각 센서의 궤환 이득값에 따라 무수히 많이 존재한다. 궤환 가진기를 통해 시스템에 새로운 에너지 전달 경로를 만

들어 줌으로써 초기 시스템에서 측정이 불가능했던 새로운 실험 고유치 정보를 합하면 고유치 민감도만을 사용할 경우 발생하는 정보 부족 문제를 해결할 수 있다. 또한 가진기 및 센서들의 위치 그리고 각 센서의 궤환 이득값의 적절한 선택을 통해 고유치 민감도 행렬의 약조건을 유발했던 모델 계수의 민감도 행렬의 조건을 좋게 변화시킬 수 있어 약조건 문제도 해결할 수 있게 된다. 이 방법론은 모달 테스트를 할 때 필요한 센서 및 가진기 이외에 추가적인 실험 장치가 필요하지 않고 추가 측정 정보의 획득이 매우 용이하며 고유치만을 사용하기 때문에 측정 잡음에 대해 강인하다는 장점이 있다.

2. 본론

2.1 시스템 모델

시 불변의 선형 구조물의 동역학 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f = bf_0 \quad (1)$$

여기서,

$$b(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = a \\ 0 & \text{if } i \neq a \end{cases} \quad (2)$$

a 는 가진 위치이다. 이 구조물의 고유치 및 고유 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$K\Phi = M\Phi\Lambda \quad (3)$$

$$\Phi^T M \Phi = I_m, \Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (4)$$

여기서 Φ 는 측정된 고유 벡터들이고 m 은 측정된 모드의 개수이다. Φ 는 식(4)와 같이 질량 및 강성 행렬에 대해 직교성을 가진다.

2.2 모델 계수들의 표현

개선하고자 하는 모델, M, K 의 계수들은 다음과 같이 초기 유한 요소 모델의 시스템 행렬, M_0, K_0 과 모델 계수들에 대한 첫번째 섭동의 합으로 표현될 수 있다.

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^l \delta\theta_j \frac{\partial M}{\partial \theta_j} \quad (5)$$

$$K = K_0 + \sum_{j=1}^l \delta\theta_j \frac{\partial K}{\partial \theta_j} \quad (6)$$

여기서 θ_j 는 개선하고자 하는 모델 계수이고, l 은 개선하고자 하는 모델 계수의 개수이고, $\partial M/\partial \theta_j, \partial K/\partial \theta_j$ 는 각각 모델 계수의 질량 및 강성 행렬에 대한 민감도로서 알려져 있는 값이다. 이 값들은 유한 요소 모델로부터 구해질 수도 있고 특별한 제한 조건이나 조인트 구현을 위해 고안될 수도 있다. 주어진 모델 계수에 대한 고유치 민감도는 다음과 같이 구해진다⁽¹⁾.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \Phi_i' \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_j} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_i]^T \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{S}, \lambda_i, \theta_i, \Phi_i, \mathbf{p}$ 는 각각 고유치 민감도 행렬, i 번째 고유치, j 번째 모델 계수, i 번째 고유 벡터 그리고 모델 계수 벡터이다.

2.3 고유치 민감도 방법

$$\mathbf{z}_e = [\lambda_1^e \ \lambda_2^e \ \dots \ \lambda_m^e]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{z} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T \quad (11)$$

여기서 \mathbf{z}_e, \mathbf{z} 는 각각 실험에서 구한 m 번째까지의 고유치 벡터와 초기 유한 요소 모델에서 구해진 고유치 벡터이다. 반복 방법론의 목적은 \mathbf{z} 가 \mathbf{z}_e 에 근접하도록 선정된 모델 계수들을 반복 계산을 통해 개선시켜주는 것이다.

$$\mathbf{S}_j \delta \mathbf{p} = \delta \mathbf{z} \quad (12)$$

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j \quad (13)$$

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j \quad (14)$$

여기서 \mathbf{S}_j 는 j 번째 반복 계산에서의 고유치 민감도 행렬이고 \mathbf{z}_j 는 j 번째 반복 계산에서 유한 요소 모델의 고유치 벡터이다. 반복 계산은 다음과 같이 기본적으로 일반 역행렬(generalized inverse)을 이용하여 구할 수 있고 다른 방법론들을 사용할 수도 있다. 반복 계산은 모델 계수 벡터가 일정한 값으로 수렴할 때까지 수행되게 된다.

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \mathbf{S}_j^+ \delta \mathbf{z} \quad (15)$$

2.4 케환 가진기

본 논문에서는 수식 (7)에서 사용된 고유치의 민감도 행렬의 과결정과 약조건 문제를 해결하기 위해 다음 그림 (1)과 같이 구조물에 부착된 센서 신호들에 이득값을 곱하여 가진기에 들어가는 백색 잡음 신호와 섞어 주는 방식을 제안한다. 이것을 블록 다이어그램 형태로 표현하면 그림 (2)와 같다. 일반적인 모달 테스트는 그림 (2)의 (b)와 (c) 위치에서 각각 힘 측정기(force transducer)와 가속도 센서를 이용하여 입력과 출력을 측정하게 된다. 하지만 측정값에 이득값을 곱해서 백색 잡음에 더하여 가진기에 더해주고 측정 위치를 (a)와 (c)로 옮기게 되면 새로운 시스템은 원래 시스템에 가진기

와 케환 루프를 포함한 것으로 정의할 수 있다.

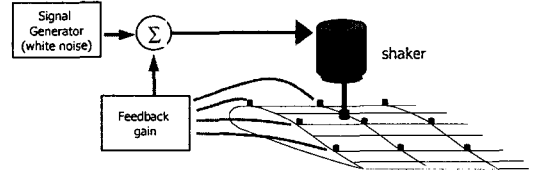


Fig. 1 The concept of the feedback exciter

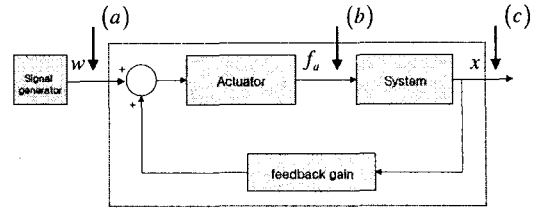


Fig. 2 The control concept

전동식 가진기의 경우 코어 질량과 강성값은 잘 알려져 있기 때문에 시스템에 부착되는 가진기의 동역학식은 다음과 같이 구해진다.

$$m_a \ddot{x}_a + c_a \dot{x}_a + k_a x_a + f_a = f_e \quad (16)$$

여기서 m_a, k_a, c_a, x_a 는 각각 가진기의 코어 질량, 강성, 댐핑값 그리고 시스템의 가진 위치에서의 이동량이다. 이것을 벡터 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{m}_a \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}_a \mathbf{x} + \mathbf{f}_a = \mathbf{f}_e \quad (17)$$

여기서 $\mathbf{m}_a(a)$ 는 m_a 이고 나머지는 모두 0 이고 \mathbf{c}_a 와 \mathbf{k}_a 도 마찬가지로 구조를 가진다.

이 가진기에 들어가는 전류 입력으로 다음과 같이 백색 잡음(w)과 센서 측정값에 케환 이득값을 곱해준 값들이 들어간다.

$$\mathbf{f}_e = \mu_F (w - \mathbf{k}_F \mathbf{x} - \mathbf{c}_F \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{m}_F \ddot{\mathbf{x}}) \quad (18)$$

여기서 w 는 백색 잡음이고 $\mathbf{k}_F, \mathbf{c}_F, \mathbf{m}_F$ 는 케환 이득값들이다.

식 (1)에 식 (17)과 식 (18)를 더해서 표현하게 되면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{b}\mathbf{m}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{m}_F) \ddot{\mathbf{x}} \\ & + (\mathbf{C} + \mathbf{b}\mathbf{c}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{c}_F) \dot{\mathbf{x}} \\ & + (\mathbf{K} + \mathbf{b}\mathbf{k}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{k}_F) \mathbf{x} = \mathbf{b}\mu_F w \end{aligned} \quad (19)$$

즉 변형된 시스템은 가진기와 케환 이득값들이 질량, 댐핑 및 강성 행렬에 더해진 것으로 나오게 된다. 가진기 코어의 질량, 댐핑 및 강성은 알고 있는 것으로 가정하고 케환 이득값을 조절하여 넣어주면 시스템을 바꿔줄 수 있다. 센서 케환 이득값을 적절히 조절하면 원래 시스템을 무한히 많이

변형시켜 줄 수 있음을 확인할 수 있다. 다만 케환 이득값이 절리면서 질량, 댐핑 및 강성 행렬의 대칭성이 깨지게 된다. 고유치의 민감도 식은 질량, 댐핑 및 강성 행렬의 대칭성을 이용하여 구해진 것이므로 수정이 필요하게 된다. 또한 케환 이득값을 너무 높게 잡아 주면 가진기에 입력포화 현상이 발생하게 되므로 케환 이득값에 한계가 존재하게 된다.

2.5 고유치 민감도 식 수정

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{M}_0 + \mathbf{b}m_2 + \mu_f \mathbf{b}m_f \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{K}_0 + \mathbf{b}k_2 + \mu_f \mathbf{b}k_f \quad (21)$$

초기 유한 요소 모델의 질량 및 강성 행렬에 가진기의 질량 및 강성을 더해주고 설계한 케환 이득값들을 더해준 변형된 유한 요소 모델의 질량 및 강성 행렬을 $\mathbf{M}_F, \mathbf{K}_F$ 로 정의한다. 비 대칭 행렬에 대해 다음과 같이 좌/우 고유 벡터가 다르게 존재하고 좌/우 고유 벡터들은 같은 고유치를 공유하고 서로 직각이다.

$$\mathbf{K}_F \Phi^R = \mathbf{M}_F \Phi^R \Lambda \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_F' \Phi^L = \mathbf{M}_F' \Phi^L \Lambda \quad (23)$$

$$\Phi^{L'} \mathbf{K}_F \Phi^L = \Lambda, \Phi^{L'} \mathbf{M}_F \Phi^L = \mathbf{I} \quad (24)$$

여기서 Φ^L 와 Φ^R 은 좌/우 고유치 벡터이고 식 (24)과 같은 부직교성(biorthogonality)을 가진다. 식 (22)에 의해 i 번째 고유치에 대해 다음의 식이 성립한다.

$$\Phi_i^{L'} (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F) \Phi_i^R = 0 \quad (25)$$

양변을 j 번째 설계 변수값에 대해 미분을 하게 되면

$$\frac{\partial \Phi_i^{L'}}{\partial \theta_j} (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F) \Phi_i^R + \Phi_i^{L'} \frac{\partial (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F)}{\partial \theta_j} \Phi_i^R + \quad (26)$$

$$\Phi_i^{L'} (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F) \frac{\partial \Phi_i^R}{\partial \theta_j} = 0$$

식 (22)에 의해 식 (26)의 첫번째 항과 세 번째 항은 0이다.

$$\frac{\partial (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} \mathbf{M}_F - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}_F}{\partial \theta_j} \quad (27)$$

식 (24)에 의해

$$\Phi_i^{L'} \frac{\partial (\mathbf{K}_F - \lambda_i \mathbf{M}_F)}{\partial \theta_j} \Phi_i^R \quad (28)$$

$$= \Phi_i^{L'} \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial \theta_j} \Phi_i^R - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} \lambda_i \Phi_i^{L'} \frac{\partial \mathbf{M}_F}{\partial \theta_j} \Phi_i^R = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \Phi_i^{L'} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}_F}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i^R \quad (29)$$

즉 케환 이득값에 의해 변형된 시스템 행렬의 대칭성이 깨질 경우 유한 요소 모델의 좌/우 고유 벡터만 따로 구해주면 고유치의 민감도를 수정할 수 있다.

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_j^0 \\ \mathbf{S}_j^1 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_j^t \end{bmatrix}, \delta \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_m^0 - \mathbf{z}_j^0 \\ \mathbf{z}_m^1 - \mathbf{z}_j^1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m^t - \mathbf{z}_j^t \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\mathbf{S}_j^i, \mathbf{z}_m^i$ 는 각각 j 번째 반복 계산에서 i 번째 케환 이득값에 의해 변형된 시스템의 고유치 민감도 행렬과 이 변형된 시스템의 측정된 고유치 벡터이다.

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \mathbf{T}_j^* \delta \mathbf{Z} \quad (31)$$

약조건 문제와 과 결정 모두 정보량을 늘여줌으로써 해결이 가능하다. 이 방법론은 기본적으로 고유 벡터 정보를 쓰지 않기 때문에 측정이나 가진 잡음에 대해 둔감하다는 장점이 있다. 고유치 측정값이 측정 잡음에 둔감하고 전체 민감도 행렬의 조건을 향상시켜 주도록 가진 및 측정점을 선정하고 케환 이득값을 설정하는 연구가 필요할 것이다.

3. 시뮬레이션 결과

3.1 과결정 문제

다음의 시스템은 N. Nalitolela et al.⁽⁴⁾의 연구에서 예제로 사용된 시스템이다. 이 시스템에 대해 모델의 모든 강성값이 실제값과 다르다고 가정하였다. 측정 가능한 고유치를 첫번째와 두 번째 고유치로 한정할 경우 개선하고자 하는 설계 변수는 6개이고 측정 가능한 정보는 2개로 민감도 행렬이 2×6 행렬이 되어 과결정 문제가 발생하게 된다. 이것을 기존의 방법을 이용하여 그대로 풀 경우 모델 계수들의 수가 고유치 정보보다 많기 때문에 유일한 해를 찾을 수 없고 모델 계수들의 분산이 가장 작아지는 방향으로 계수들을 개선하면 유일한 해를 찾을 수는 있지만 최종 계수값들이 실제값과 큰 차이를 나타내게 됨을 확인할 수 있다. 이 문제를 해결하기 위해 2번의 실험을 더 수행하여 고유치 개수를 설계 변수의 숫자와 같도록 만들어 주어 식 (32)와 같이 6×6 의 민감도 행렬 \mathbf{T} 를 만들어 주어 유일한 해가 구해지도록 하였다. 시뮬레이션에서 사용된 센서는 가속도 센서로 모든 포인트에서 측정이 가능하다고 가정하였고 가진기와 케환 이득값은 전체 민감도 행렬 \mathbf{T} 의 조건이 좋아지도록 잡았고 측정된 고유치에는 오차가 없는 것으로 가정하였다.

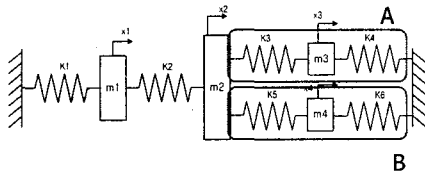


Fig. 3 Object system

Table 1 System data

M(real)	M(FEM)	K(real)	K(FEM)	EV(real)	EV(FEM)
6.7	6.7	540	530	25.08	25.47
7.8	7.8	750	744	82.76	84.4
8.1	8.1	302	310	135.36	134.6
3	3	112	120	283.12	280.5
		139	130		
		251	260		

$$T = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^1 \\ S^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Table 2 The feedback gain & measurement eigenvalues

실험(j)	가진 위치	측환 이득값 (m_F/μ_F)	고유치(z_m^j)
0	x_1	[0 0 0 0]	25.08, 82.76
1	x_4	[-0.1 -0.1 0.1 1]	24.9, 79.67
2	x_2	[0.1 0.2 0.1 0]	24.72, 82.25

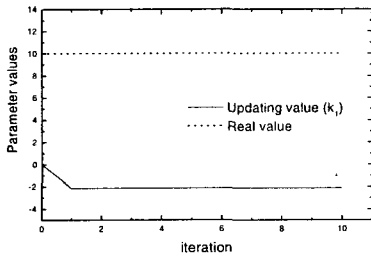


Fig. 4 The result of an existing method

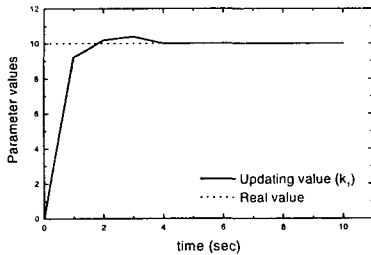


Fig. 5 k_1 updating using the feedback exciter

정보량이 부족한 상태에서 계수들의 분산이 최소가 되도록 모델 계수 개선을 수행하면 그림 (4)와 같이 실제값에 크게 다른 값으로 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 하지만 제안된 방법을 통해 고유치 정보를 4 개 더 얻은 후 모든 고유치 측정 값을 이용하여 반복 계산을 수행한 결과, 그림 (5)의 k_1 뿐만 아니라 모든 모델 계수들이 실제값으로 오차없이 수렴하게 된다. 모델 개선 후에 유한 요소 모델의 강성 계수값과 실제값의 차이는 거의 없는 것으로 확인되었다.

3.2 약조건 문제

다음으로 그림 3의 시스템에서 A 부분과 B 부분에 구조적인 차이가 없어서 $k_3 = k_5, k_4 = k_6$ 인 조건을 만족하게 유한 요소 모델이 만들어진 경우를 살펴보자. 실제 시스템의 경우 k_3 와 k_5 의 차이가 매우 크다. 이 때 세 번째까지의 고유치 측정을 이용하여 k_1, k_3, k_5 값들을 개선하려고 한다. 고유치 민감도 행렬을 만들고 보면 초기 유한 요소 모델의 경우 $k_3 = k_5, k_4 = k_6$ 이고 m_3 와 m_4 가 거의 같게 되어 있으므로 k_3 와 k_5 에 대한 고유치의 민감도가 거의 같게 나온다. 이는 유한 요소 모델에서는 A 부분과 B 부분에 구조적인 차이가 없기 때문에 이 두 강성값에 대한 민감도도 같게 나오는 것이다. 이 경우 민감도 행렬의 초기 조건 수가 4091.1로 매우 크게 나오면서 측정값에 포함된 편향 오차가 개선된 모델 계수값에 크게 반영되고 때로는 모델 계수들이 발산할 수도 있다.

Table 3 System data

M(real)	M(FEM)	K(real)	K(FEM)	EV(real)	EV(FEM)
6.7	6.7	540	530	36.294	36.11
3	3	734	734	68.17	67.94
8.1	8.1	290	300	129.35	127.82
8.09	8.09	250	250	539.16	537.33
		315	300		
		250	250		

그림 (6)은 일반적인 방법을 통해 모델 계수를 개선한 결과이다. 측정 고유치에는 평균이 0.005이고 분산이 10^{-5} 인 난수를 오차로 가정하여 더해주었다. 그 결과 모델 계수들이 작은 편향 오차에도 크게 영향받아 발산하는 것을 확인할 수 있다.

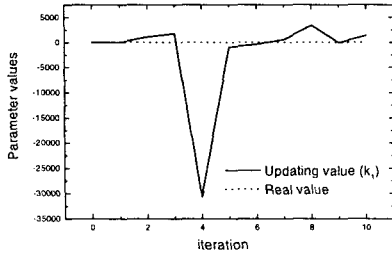


Fig. 6 The result of an existing method

이 문제를 해결하기 위해 궤환 이득값을 설정하여 시스템을 변형시킨 후 2 번의 실험을 더 수행하여 2 개의 민감도 행렬을 더 만들어 낸 후 이것을 원래 민감도 행렬에 더해 주어 9×3 의 민감도 행렬 \mathbf{T} 를 만들었다. 총 9 개의 고유치 정보에는 평균이 0.005 이고 분산이 10^{-5} 인 난수를 오차로 가정하여 더해 주었다. \mathbf{T} 의 초기 조건수는 33.01로 원래 민감도 행렬에 비해 매우 좋아지게 되어 그림 (7)의 k_1 뿐만 아니라 나머지 강성 계수들도 실제값에 거의 근사하여 수렴하게 된다.

Table 4 The feedback gain & measurement eigenvalues

실험(j)	가진 위치	궤환 이득값 (k_F/μ_F)	고유치(λ_m)
0	x_1	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]$	36.29,68.17,129.35
1	x_1	$[300 \ 100 \ 3 \ 1]$	41.86,68.19,169.05
2	x_2	$[15 \ 150 \ -55 \ 20]$	39.90,68.37,135.37

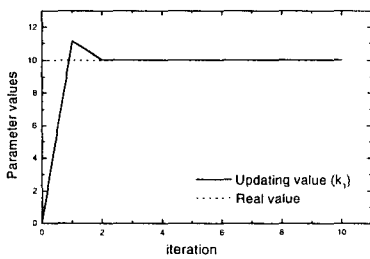


Fig. 7 k_1 updating using the feedback exciter

4. 결론 및 향후 연구

이 논문에서는 모드 정보의 민감도를 이용하는 방법론의 두가지 대표적인 문제점인 과결정 문제와 약조건 문제를 해결하기 위해 궤환 가진기를

이용하여 시스템을 변형시키고 그 변형된 시스템으로부터 추가적인 고유치 정보를 구하는 방법론을 제시하였다. 이 방법론을 통해 궤환 이득값의 다양한 선정을 통해 시스템의 추가적인 고유치 정보를 얻음으로써 모델 계수 개선을 위해 필요한 정보량을 필요한 만큼 늘여 줄 수 있고 원래 시스템의 민감도 행렬에 변형된 시스템의 민감도 행렬을 덧붙이는 방식으로 민감도 행렬의 약조건 문제를 해결할 수 있었다. 이 방법론은 기존의 모달 테스트를 위해 필요한 실험 장치 이외에 추가적인 실험 장치가 필요없고 시스템의 변형 및 추가 실험이 매우 용이하다는 장점이 있다. 궤환 가진기를 시스템에 적용하기 위해서는 가진기 및 센서 위치와 궤환 이득값을 구조적으로 결정하는 방법론이 필요할 것이다.

5. 참고 문헌

- (1) M. I. Friswell et al., 1996, Finite element model updating in structural dynamics, Kluwer academic publishers, London, chap. 5.
- (2) W. D'Ambrogio and A. Fregolent, 2000, "The use of antiresonances for robust model updating" Journal of sound and vibration, Vol. 236(2), pp.227-243.
- (3) S. Li, S. Shelly and D. Brown, 1995, "Perturbed boundary condition testing", Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference 1, pp.902-907
- (4) N. G. Nalitolera et al., 1992, "A mass or stiffness addition technique for structural parameter updating", The international journal of analytical and experimental modal analysis, Vol. 7, Num. 3, pp.157-168
- (5) P. D. Cha et al., 2000, "Model updating using an incomplete set of experimental modes", Journal of sound and vibration, Vol. 233(4), pp.587-600
- (6) J. H. Gordis, 1999, "Artificial boundary conditions for model updating and damage detection", Mechanical systems and signal processing, Vol. 13(3), pp.437-448
- (7) N. Nalitolela et al., 1993, "Undating model parameters by adding an imagined stiffness to the structure", Mechanical systems and signal processing, Vol. 7(2), pp.161-172
- (8) E. Rothwell et al., 1989, "A unified approach to solving ill-conditioned matrix problems", International journal for numerical methods in engineering, Vol. 28, pp.609-620