한국소음진동공학회 2001년도 춘계학술대회논문집, pp. 997~1002.

비최소 위상 시스템에서 음재생을 위한 역변환 필터의 구현

[0]노경래[*], 이상권[**]

An Implementation of Inverse Filter for Sound Reproduction of Non-Minimum Phase System.

[0]Kyoung Rae Noh [*], Sang Kwon Lee [**]

ABSTRACT

This paper describes an implementation of inverse filter using SVD in order to recover the input in multi-channel system. The matrix formulation in SISO system is extended to MIMO system. In time and frequency domain we investigates the inversion of minimum phase system and non-minimum phase system. To execute an effective inversion of non-minimum phase system, SVD is introduced. First of all we computes singular values of system matrix and then investigates the phase property of system. In case of overall system is non-minimum phase, system matrix has one (or more) very small singular value(s). The very small singular value(s) carries information about phase properties of system. Using this property, approximate inverse filter of overall system is founded. The numerical simulation shows potentials in use of the inverse filter.

1. 서 론

수년간 음원과 그 위치 파악에 관해 괄목할만한 연구 결과들이 계속해서 나오고 있다. 음원 파악에 관한 문제는 매우 복잡한 과제이며 또한 음재생에 관한 문제라 말할 수 있다. 일반적으로 음원에 대한 파악은 음원의 특성과 음질, 예로 확성기(loudspeaker)의 설계를 개선하는데 목적을 두고 있으며 역변환 기술은 가정된 음원 모델에 기초를 두고 발전되어 왔다. 즉, 음원의 분포는 단일음원(monopoles),이중음원(dipoles) 그리고 4중음원(quadrupoles)처럼 원 음원의 갯수로 이산화시킨 다음 방사장은 한정된 점에서 측정하고 음원과 연관이 있는 전달함수는 적절한 Green 함수를 이용하여 정의된다. 모델화된 음원의 점과 음원을 측정하는 점 사이의 전달함수와 출력의 개수는 선형대수방정식으로 공식화할 수 있다. 그러므로 이러한 음원 파악은 시스템행렬의 역변환 문제가 된다. 따라서 시스템행렬이 특이행렬(singular matrix) 이거나 또는 비최소 위상 시스템에 있어서는 매우 작은 특이값을 하나 이상을 가진다. 이 특이값(singular value)은 비최소위상시스템의 불량조건에 대한 정보를 갖고 있으며 이 특이값의 조정으로 역변환 문제를 해결할 수 있다. 본 연구에서는 특이값외에 특이벡터를 이용함으로 비최소위상시스템에서 음원을 더욱 정확히 구할 수 있는 역변환 방법을 제시한다.

2. 이 론

2.1 다중 음원 음장에 대한 입·출력 관계

자유음장에서 전달함수는 주파수의 함수로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_{pq}(\omega) = \rho_0 g(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{\rho_0}{4\pi r_{ij}} e^{-j\omega r_{ij}/c} = \frac{A}{r_{ij}} e^{-j\omega r_{ij}/c} \quad (1)$$

여기서 A는 일정한 상수이고 c는 음속, r_{ij}는 음원($\mathbf{r}'$)과 수음점($\mathbf{r}$)사이의 거리를 나타낸다. 그리고 $\exp(-j\omega r_{ij}/c)$ 항은 시간지연 r_{ij}/c 에 대응하는 유사전달함수 이다. n 개의 음원과 m 개의 수음점을 가지는 다중(MIMO) 시스템상에서 전달함수는 각각의 필터의 전달함수로 이루어지는 행렬

[*] 인하대학교 기계공학과 대학원
[**]인하대학교 기계공학과 교수, 정회원

이 된다. 따라서 주파수 영역에서의 형태는 다음과 같다[1].

$$\mathbf{H}(\omega) = A\begin{bmatrix} \dfrac{e^{-j\omega r_{11}/c}}{r_{11}} & \dfrac{e^{-j\omega r_{12}/c}}{r_{12}} & \cdots & \dfrac{e^{-j\omega r_{1n}/c}}{r_{1n}} \\ \dfrac{e^{-j\omega r_{21}/c}}{r_{21}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{e^{-j\omega r_{m1}/c}}{r_{m1}} & \cdots & \cdots & \dfrac{e^{-j\omega r_{mn}/c}}{r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

시간영역에서 이상적인 2-음원과 2-수음점에 대한 음향 전파에 대해 생각해보자. 그림 1 에서 2 개의 음원 (q_1, q_2), 2 개의 수음점 (p_1, p_2) 라 하면

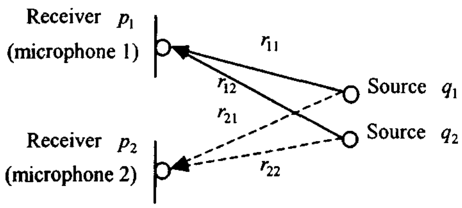


Fig.1. Geometrical arrangement of sources and receivers

각 수음점에 대해 음압은 다음과 같이 표현된다.

$$p_1(t) = \frac{A}{r_{11}} q_1(t - \Delta_{11}) + \frac{A}{r_{12}} q_2(t - \Delta_{12})$$

$$p_2(t) = \frac{A}{r_{21}} q_1(t - \Delta_{21}) + \frac{A}{r_{22}} q_2(t - \Delta_{22}) \quad (3)$$

여기서 $\Delta_{ij} = r_{ij}/c$ 은 음향전파에 의한 시간지연이다. 그리고 적당한 샘플링 비율을 $f_s, (\Delta = 1/f_s)$ 라 정하고 이산신호로 다음과 같이 표현된다.

$$p_1(n) = \frac{A}{r_{11}} q_1(n - n_{11}) + \frac{A}{r_{12}} q_2(n - n_{12})$$

$$p_2(n) = \frac{A}{r_{21}} q_1(n - n_{21}) + \frac{A}{r_{22}} q_2(n - n_{22}) \quad (4)$$

여기서, $n_{ij} = round\left(\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right) = round\left(\frac{r_{ij}}{c\Delta}\right) = round\left(\frac{f_s}{c} \cdot r_{ij}\right)$

각 음원과 수음점에 관계되는 임펄스 응답함수는 n_{ij} 에서 영이 아닌 수를 하나만 가지는 N 개의 배열로 이루어진다. 예로 p_1 과 q_1 와 관계되는 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h_{11}(n) = \left[0,\ 0,\ \cdots,\ \frac{A}{r_{11}},\ \cdots,\ 0\right] \quad (5)$$

단일입출력(SISO)시스템에 대해 시간영역에서 생각해보면 $p_1(n)$ 과 $q_1(n)$ 에 대해 임펄스 배열을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A/r_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A/r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A/r_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A/r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{or}\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{H}_{11}\mathbf{q}_1 \quad (6)$$

단일(SISO) 시스템에서 임펄스 배열로 이루어진 행렬형태를 다중(MIMO) 시스템으로 확장하여 생각해 보면 시간영역에서 전달함수는 다음과 같은 블록(Block) 행렬 형태와 같다.

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ \vdots \\ p_2(0) \\ p_2(1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ \vdots \\ q_2(0) \\ q_2(1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 각각의 H_{ij} 는 (Lower Triangular Matrices) 형태이다. 이러한 행렬의 역변환은 z-영역에서 좀 더 쉽게 고려해 볼 수 있다. 수음점(p_1 , $p_1(n)$)에서 받은 신호의 z-변환은 다음과 같다.

$$P_1(z) = \frac{A}{r_{11}} z^{-n_{11}} Q_1(z) + \frac{A}{r_{12}} z^{-n_{12}} Q_2(z) \quad (8)$$

그리고 2-입력 2-출력 시스템에 대해 이러한 행렬형태로 표현하면

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \dfrac{z^{-n_{11}}}{r_{11}} & A \cdot \dfrac{z^{-n_{12}}}{r_{12}} \\ A \cdot \dfrac{z^{-n_{21}}}{r_{21}} & A \cdot \dfrac{z^{-n_{22}}}{r_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{or}\ \mathbf{P} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}$$

여기서 $\mathbf{H}(z)$ 는 전달함수 행렬이다. 여기서 정확한 역변환의 생성문제는 각 음원과 수음점사이의 거리(r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22})와 관련이 있음을 알 수 있다. 전달함수, $\mathbf{H}(z)$ 의 행렬값(Determinant)이 0 이 될 때

$$\det(\mathbf{H}(z)) = \frac{A}{r_{11}r_{22}} z^{-(n_{11}+n_{22})} - \frac{A}{r_{12}r_{21}} z^{-(n_{21}+n_{12})} = 0 \quad (10)$$

이러한 전달함수 행렬은 특이행렬이 되고 역변환 행렬을 가지지 못한다. 그리고 $\mathbf{H}(z)$ 의 행렬식의 근은 역변환 필터의 극점(Poles)이 되고 전달함수, $\mathbf{H}(z)$ 의 영점(Zeros)이 된다. 전달함수의 영점이 z-평면상의 단위원 밖에 있으면 이 시스템은 불안정하게 되며 비최소위상 시스템이 됨을 알 수 있다. 이러한 경우는 그림 2 의 경우와 같으며 여기서 $r_{11} = 10$, $r_{12} = 5$, $r_{21} = 5$, $r_{22} = 2$ 이 된다. 이 때 전체 시스템행렬은 특이행렬이 되며 $(|\mathbf{H}(z)| = 0)$ 행렬식의 근 $(z \cong \pm 1.12)$ 은 전달함수의 영점이 되며 단위원 밖에 존재한다. 따라서 비최소 위상 시스템이 된다.

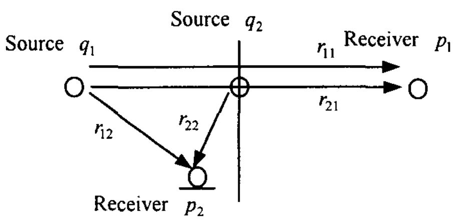


Fig.2. Geometrical arrangement between sources and receivers at $|\mathbf{H}(z)| = 0$.(Singular case)

시스템행렬의 최소 특이값은 z-영역에서 전달함수의 영점에서 최소 특이값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 전달함수의 영점에서 시스템행렬의 최소 특이값이 존재함을 보인다. 비최소위상에 대한 역변환 문제는 다음의 SVD(Singular Value Decomposition)방법을 이용한다.

2.2 비최소 위상을 가진 시스템의 역변환에 관한 문제

시스템행렬 즉, 전달함수 $\mathbf{H}(z)$ 의 z-영역에서 영점이 단위원안에 존재하는 최소위상 시스템에서의 역변환은 그 역행렬이 항상 존재하며 안정적이다. 하지만 z-영역에서 영점이 단위원 밖에 존재하는 비최소 위상시스템에서의 시스템행렬은 근사특이(near-singular)행렬 또는 특이행렬 이므로 그 정확한 역변환을 구하기는 힘들다. 따라서 비최소 위상 시스템에 대한 근사적 역변환을 구하기 위해 SVD(Singular Value Decomposition)를 이용한다. SVD 는 수치적 해석에 있어서 매우 중요한 도구중의 하나이다. 행렬 $\mathbf{H}$ $(m \times n)$ 에 대한 SVD 는 직교(unitary)행렬과의 곱으로 정의된다[2].

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

여기서 행렬 $\mathbf{U} \in \Re^{m \times m}$, $\mathbf{S} \in \Re^{m \times n}$, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \in \Re^{n \times n}$ 이며 $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ 인 직교행렬이다. 행렬 $\mathbf{S}$ 는 대각선 항 s_i 을 제외한 모든 항이 0 인 대각행렬(diagonal matrix)행렬이다. 즉, $s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_r > 0$, $s_{r+1} = \cdots = s_p = 0$ 이며 $p = \min(m, n)$, $r = rank(\mathbf{A})$, $\det(A) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots \cdot s_r$ 이다.

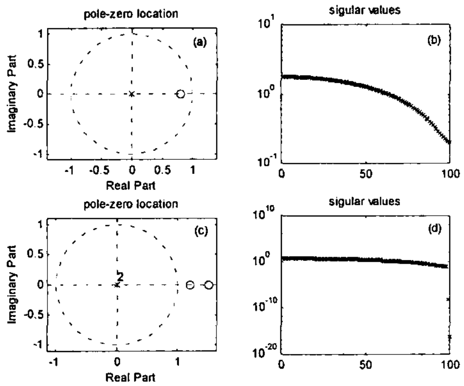


Fig.3. Distribution of singular values of the Minimum Phase System and Non-Minimum Phase System

그림 3 의 최소 위상 시스템에서 그림 3 (b)와 같이 특이값의 분포는 점차적으로 감소하며 그림 3 (c)와 같이 비최소 위상 시스템에서 단위원 밖으로 나가는 영점으로 인하여 매우 작은 특이값을 발생시킨다. 그리고 매우 작은 특이값의 개수는 그림 3 (d)에서 z-영역에서 단위원밖의 영점의 개수와 동일하며[3] 최소한 하나 이상의 매우 작은 특이값을 가진다. 이 값은 시스템의 최소/ 비최소 위상에 대한 정보를 가지며 시스템의 불량조건(ill-conditioning)을 판별할 수 있다. 특이행렬이 아닌 정방행렬에 대해 조건(conditioning)을 판단하는 데 상태수(condition number), $k(\mathbf{H})$ 가 사용되며 이것은 다음과 같이 정의된다[2].

$$k(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}\| \tag{12}$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 행렬 정규(norm)이다. 상태수는 $\mathbf{p} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}$ 의 역변환 문제에서 해의 민감도(sensitivity)를 측정하는 기준이다. 어떠한 p-정규(p-norms)에 대해서도 항상 상태수는 1 보다 크거나 같다. 즉, $k(\mathbf{H}) \ge 1$. 만약 상태수가 매우 크다면 이때 시스템 행렬 $(\mathbf{H})$ 은 불량조건(ill-conditioned) 행렬이다. 그리고 시스템행렬이 한 정규에 대해서 불량조건이면 모든 다른 정규들에 대해서 역시 불량조건이다. 2-정규(2-norm)를 사용하면 상태수는 최대 특이값과 최소 특이값의 비로서 나타내어질 수 있다.

$$k(\mathbf{H}) = \frac{s_{\max}(\mathbf{H})}{s_{\min}(\mathbf{H})} \tag{13}$$

직교(unitary) 행렬에서 상태수, $k(\mathbf{H})$는 1 이며 이는 완전조건화(perpectly conditioned)되었다고 한다. 시스템행렬에 대해 상태수는 특이값의 영향을 받음을 알 수 있으며 그림 3 에서 비최소 위상 시스템에서 최소 특이값이 0 이 아닌 매우 작은 값이면 즉, 근사특이(near-singular) 하면 행렬이 불량조건화됨을 알 수 있다. 예로 전달함수가 $\mathbf{H}(z) = 1 - 1.2z^{-1}$ 인 단위원 밖에 영점이 하나 존재하는 비최소 위상 시스템에 대해서 시간영역의 시스템행렬의 특이값의 분포에서 매우 작은 특이값은 하나가 있음을 그림 4 에서 알 수 있다.

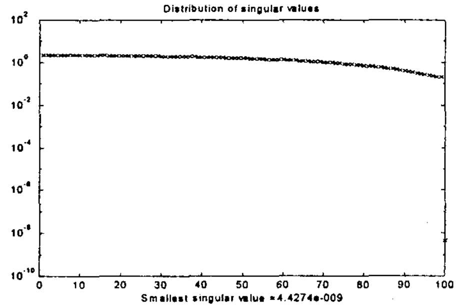


Fig.4. Distribution of singular values of system matrix

매우 작은 특이값으로 불량조건화되는 문제를 해결하기 위하여 이 값을 적절한 양의 값으로 대체시킴으로서 시스템행렬의 조건의 변화를 알아보면 그림 5 와 같다. 매우 작은 특이값이 0 에 가까울수록 시스템행렬은 특이행렬에 가까워지므로 상태수가 매우 높으며 이 특이값을 점차적으로 증가시킬 때 시스템행렬의 상태수가 급격히 떨어지며 어느 정도 되었을 때는 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 이러한 성질을 이용하여 근사적인 역행렬을 구할 수 있다.

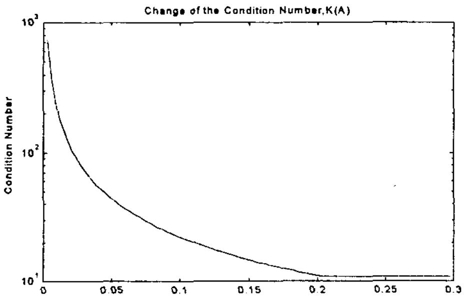


Fig.5. Change of condition number with respect to change of smallest singular values

이러한 일련의 과정은 SVD 을 이용 $\left(\mathbf{H} = \mathbf{USV^T}\right)$ 하여 시스템행렬을 특이값을 계산한 다음 특이값을 대각선 항으로 가지는 행렬 $\mathbf{S}$ 에서 불량조건을 유발시키는 작은 특이값을 분리하고 적당한 양의 값으로 대체시켜 특이값으로 구성된 대각선 행렬 $\hat{\mathbf{S}}$ 을 만든다. $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{U\hat{S}V^T}$ 을 이용하여 시스템행렬 $\hat{\mathbf{H}}$ 을 계산한다. 새롭게 구해진 시스템행렬 $\hat{\mathbf{H}}$ 은 불량조건이 되지 않으며 근사적인 역변환 과정에 용이하다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{y} \tag{14}$$

또한 매우 작은 특이값을 임의의 양의 값으로 대체시킨다. 특이벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$는 출력과 입력에 관련된 직교 성분이다[4]. 따라서 입력에 관련된 직교성분인 특이벡터(singular vector), $\mathbf{v}$를 변화시킴으로써 좀 더 근사적인 역행렬을 구할 수 있다. 최소위상 시스템 $(1 - 0.8z^{-1})$ 과 비최소위상 시스템 $(1 - 1.2z^{-1})$ 에서 시스템행렬 (100×100) 의 특이벡터 형태를 살펴보면 그림 6, 7 과 같다.

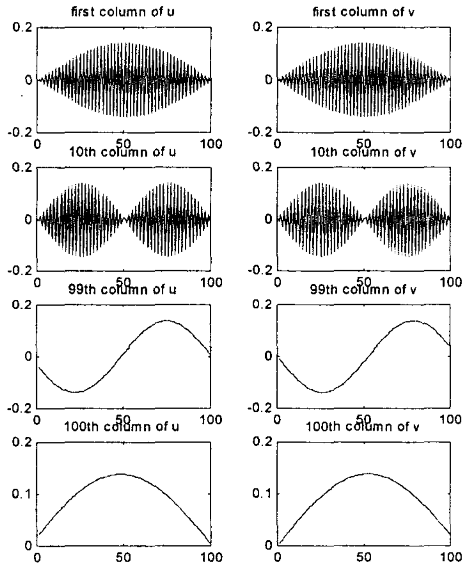


Fig.6. Left and right singular vectors of minimum phase system

일반적으로 특이벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$는 서로 대칭한 형태를 가지며[5] 그림 7 에서 보듯이 비최소위상 시스템에서 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터(100 번째 열)는 다른 특이벡터와는 달리 다른 형태를 가짐을 알 수 있다. 이러한 특이벡터를 z-변환하여 영점과 극점을 도시하면 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터를 제외한 나머진 대칭적형태

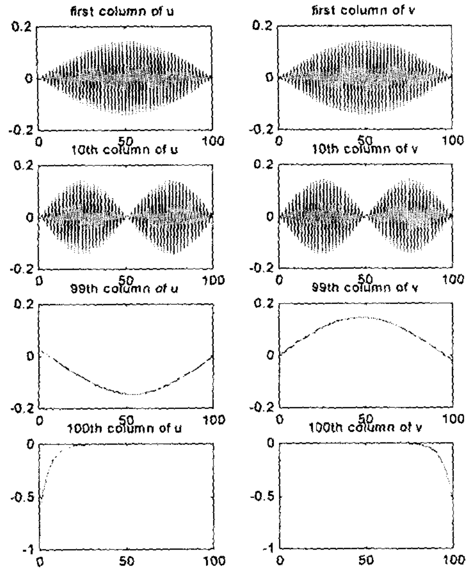


Fig.7. Left and right singular vectors of non-minimum phase system

를 가지고 직교(unitary) 벡터이므로 영점은 대부분 단위원상에 존재하며 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터는 다른 형태를 지니게 된다. 이러한 시스템의 불량조건을 발생시키는 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터를 다른 특이벡터와 유사한 형태로 대체시켜 특이행렬 $\hat{\mathbf{V}}$ 를 만들고 $\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{V}}^{\mathbf{T}}$ 를 이용하여 좀 더 근사적인 시스템행렬 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 을 구할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{y} \qquad (15)$$

2.2 수치해석(Numerical Simulation)

비최소 위상 시스템에 대한 불량조건을 고려하기 위해 예로, 그림 2 에서 보여준 2 채널 시스템에 대해 알아보자. 먼저 각 채널의 입력 q_1, q_2 은 그림 8 a,b 에서 보여주는 신호와 같다. 그림 9 에서 전체 시스템행렬의 특이값의 분포를 살펴보면, 시스템의 불량조건 문제를 유발시키는 매우 작은 특이값이 존재함을 알 수 있다. z-영역에서 특이값은 영점에서 최소 특이값이 존재하고 영점의 위치에 따라 시스템의 위상을 판단할 수 있으며 전체 시스템행렬의 매우 작은 특이값은 전달함수의 영점과 밀접한 관계를 가짐을 알 수 있다.

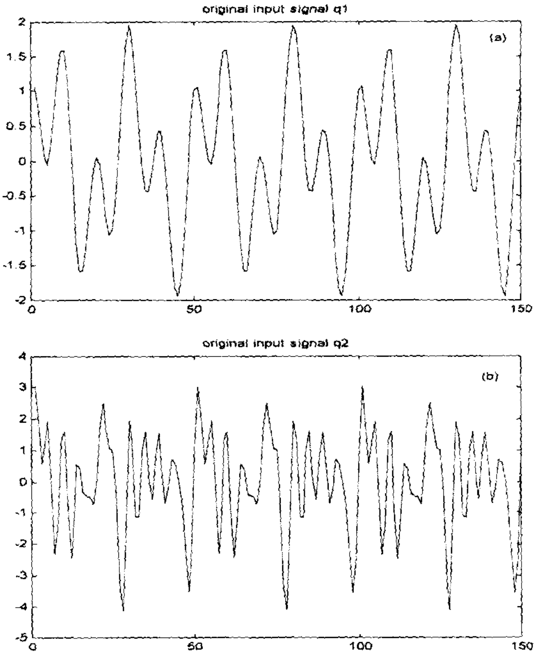


Fig.8. Original Input Signal q_1 and q_2

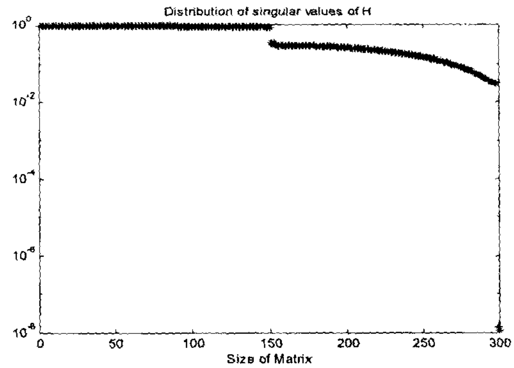


Fig.9. Distribution of Singular values of System Matrix **H**

비최소위상 시스템이라면 z-영역에서 영점은 단위원 밖에 존재하며 영점에 존재하는 매우 작은 특이값은 불량조건을 유발시킨다. 따라서 비최소위상 시스템에서 직접적인 역변환을 이용하여 입력을 파악하기란 매우 힘들다. 이런 문제를 해결하기 위해 매우 작은 특이값을 그림 5 에서 보여주는 상태수가 불량조건을 유발시키지 않는 값이 되는 부근의 적절한 양의 값으로 대체시킴으로 근사적인 역행렬을 구한다. 이를 이용하여 입력을 얻을 수 있다. 이 결과는 그림 10 (a),(b)와 같다.

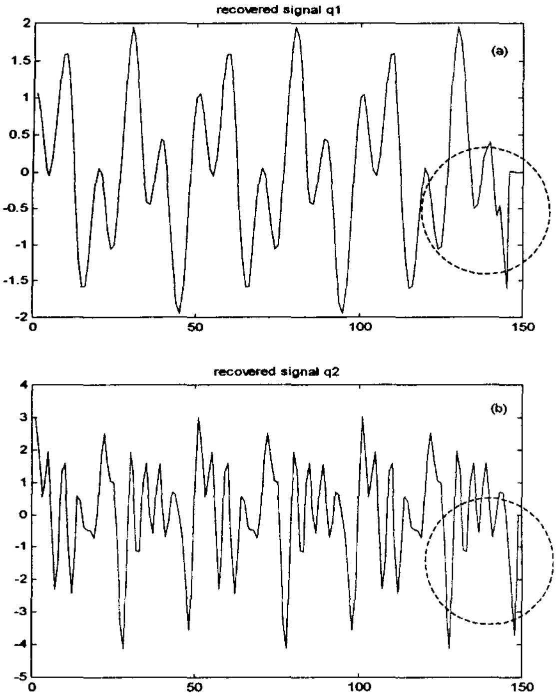
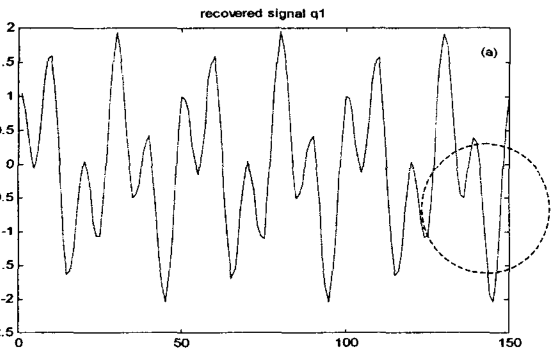


Fig.10. Recovered Signal using Matrix $\hat{\mathbf{H}}$ inversion

이러한 작은 특이값을 대체와 동시에 특이벡터가 입력과 출력의 직교 성분이므로 입력에 관련된 특이벡터 **V** 을 변화 시킴으로써 좀 더 근사적인 시스템행렬 $(\tilde{\mathbf{H}})$ 을 구하고 이 시스템행렬의 역변환을 이용하여 입력신호를 구할 수 있다. 그림 11 (a),(b)에서 특이값과 특이벡터을 변화시켜 구한 근사적 시스템행렬 $(\tilde{\mathbf{H}})$ 의 역변환을 통해 입력을 구한 것을 보여준다. 여기서 특이값을 변화시킬 때보다 특이값과 특이벡터를 함께 변화시킬 때 원 입력에 보다 근사적인 값을 얻을 수 있다.



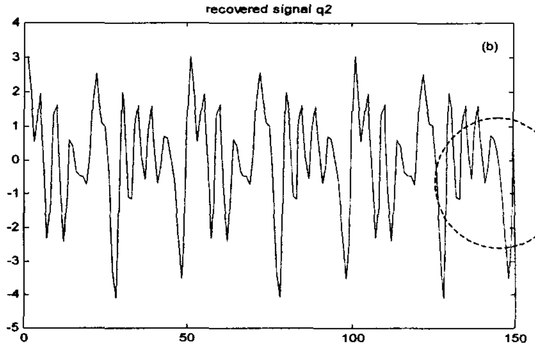


Fig.11. Recovered Signal using Matrix $\tilde{\mathbf{H}}$ inversion

3. 결 론

본 연구는 비최소위상을 갖는 시스템의 역변환 문제를 다루는 과정에서 발생하는 불량조건문제를 다루었고 이러한 문제는 시스템행렬이 가지는 매우 작은 특이값과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있었다.

SVD 를 이용하여 시스템행렬의 특이값과 특이벡터를 해석하였고 시스템이 가지는 매우 작은 특이값을 대체 시켜 시스템의 근사적인 역변환 필터를 구하여 원 음원을 파악하였다. 또한 보다 근사적인 역변환 필터를 구하기 위하여 매우 작은 특이값과 이에 대응하는 특이벡터를 변화 시켜 구한 역변환 필터를 이용하여 음원을 파악하였으며 이는 원 음원에 보다 가까운 값을 얻을 수 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. Ole Kirkeby and Philip A. Nelson "Reproduction of Plane Wave Sound Fields", J. Acoust. Soc. Am. Vol **94**, No 5, Nov 1993
2. Golub G. H. & C. F. Van Loan "Matrix Computation", The John Hopkins University Press, 1996
3. S. Hashemi and J. K. Hammond "The Interpretation of Singular values in the Inversion of Minimum and Non-Minimum Phase Systems", Vol **10**, No 3, pp.225-240, 1996
4. Schooneveld C. van "Inverse Problems : A Tutorial Survey", Underwater Acoustic Data Processing, pp393-411, 1989
5. Shih-ho Wang & Randy Zachery "Singular Value Decomposition of System Input-Output Matrix and Its Symmetry Property", Computers Elect. Engng Vol **22**, No 3, pp231-234, 1996