

영구자석 스피들 모터의 코깅토크가 회전디스크 굽힘 진동의 안정성에 미치는 영향

이 기 념* , 신 응 수**

Effects of Torque Fluctuation on the Stability of the Transverse Vibration of a Spining Disk

Kee-Nyeong Lee and Eung-Soo Shin

Key Word : Transverse vibration(횡진동), Spinning Disk(회전원판), Cogging Torque(코깅토크), Stability(안정성), Perturbation Method(섭동법), Parametric Resonance(매개 공진), Multiple Scale Method(다중척도법), Single Mode Resonance(단모드 공진), Combination Mode Resonance(복합모드 공진)

ABSTRACT

This paper provides a stability analysis of the transverse vibration of a spinning disk under the torque fluctuation from a permanent magnetic motor. An analytical model has been formulated for a flexible annular disk with its spinning velocity varying harmonically with the same frequency as the cogging torque. A perturbation method based on multiple time scales is applied to perform the stability analysis. Based on expressions for the amplitude and frequency of the parametric excitation, stability boundaries are determined in terms of a nominal spindle velocity, the least common multiple of poles and slots, the magnitude of torque fluctuation and the modal characteristics of the disk. The stability diagrams predicted by perturbation have been verified numerically using the Floquet theory, which is in good agreement. In conclusion, the fluctuation in spinning velocity is found to affect the stability of the transverse vibration of a rotating disks. The results of this work can be applied to high precision spindle systems such as computer storage systems.

1. 서 론

컴퓨터저장장치인 하드디스크 드라이브, CD-ROM 드라이브와 디지털 비디오 드라이브(DVD), 원형 톱, 브레이크 등에서 회전원판의 안정성은 매우 중요하게 고려되어야 한다.

또한 영구자석 스피들 모터에 의해 구동되어 각가속도를 갖는 경우에 스피들 모터의 진동은 디스크를 가진시켜 정확도와 속도에 큰 영향을 주게 된다. 일반적으로 영구자석을 사용하는 모터의 진동원은 몇가지가 알려져 있으나 주요한 원인이 코깅토크라는 것은 많은 연구^(1,2)에서 알려졌다. 코깅토크⁽³⁾는 영구자석을 사용하는 모터에서 슬롯등의 영향으로 공극이 일정하지 않을 경우에 발생하고, 부하의 상태와는 관계없이 오직 공극이 형상과 영구자석과 관련이 있다. 이 토크의 변동

* : 충북대학교 대학원 기계공학과

** : 정희원, 충북대학교 기계공학과

성분은 회전속도의 변동성분을 발생시키게 되고, 소음, 진동을 유발한다. 코깅토크를 구하기 위하여 유한요소법, 맥스웰 응력텐서를 이용한 방법등이 이용되고 있으며, 이를 통해 코깅토크 저감 방법에 대한 연구가 지속적으로 이루어지고 있다.

지금까지 회전원판의 진동과 동적 안정성에 대한 연구는 많은 연구자들에 의하여 수행되어 왔다. 초기의 연구는 회전원판의 지배방정식을 통한 모드해석과 자유진동에 대해 많은 연구⁽⁴⁾가 이루어졌으며, 컴퓨터 하드디스크에서 회전원판과 헤드간의 간섭에 의해 일어나는 진동과 동적 안정성에 대한 많은 연구도 진행되었다. Huang⁽⁵⁾ 회전원판 상에서의 이동질량의 효과에 대한 연구를 했으며, Chen등은⁽⁶⁾ 횡방향 부하력을 이동힘으로 간주하여 안정성 분석을 하였고, Iwan⁽⁷⁾은 플로피 디스크에서 슬라이더의 강성이 매개 불안정성을 초래하는 것을 보였다. 또한 Shen⁽⁸⁾은 원판의 감쇠효과를 해석하여, 회전원판과 헤드의 매개 불안정성을 억제할 수 있음을 보여 주었다. 그리고 많은 연구⁽⁹⁾들에서 횡방향과 종방향의 가진에 대한 디스크의 굽힘진동의 응답과 안정성해석들이 이루어지고 있으며 회전원판의 안정성에 대한 각각속도의 영향도 연구⁽¹⁰⁾되고 있다.

기존의 연구들은 회전디스크의 굽힘진동의 횡방향이나 종방향가진에 관련된 안정성해석과 영구자석 스피들모터에서 코깅토크와 진동을 저감시키기 위한 해석이 각각 진행되어 왔다. 그러나 영구자석 스피들모터에 의해 회전하는 원판의 경우 스피들모터의 코깅토크에 의해 발생하는 회전속도의 변화에 의한 굽힘진동의 안정성해석이 필요하다.

본 논문에서는 코깅토크에 의해 발생하는 회전속도의 변화에 대한 디스크의 굽힘진동에서의 매개공진의 안정성 해석을 위해 코깅토크와 같은 주기로 변화하는 회전속도를 갖는 유연한 디스크를 해석모델로 하였다. 안정성해석을 위하여 다중척도법에 의한 섭동법을 이용하였고, 섭동법에 의한 안정성해석의 결과를 확인하기 위해 플로케(Floquet) 방법과 수치적분에 의한 시간응답해석을 수행하였다.

II. 운동방정식

Fig. 1과 같이 중심이 고정되고 회전속도 Ω 를 갖는 유연모델에서 굽힘에 의한 회전축 방향의

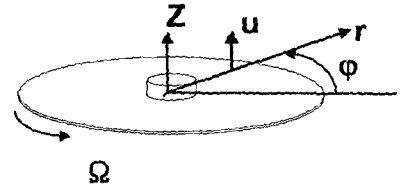


Fig.1 Schematic of spinning disk

변위 $u(r, \phi, t)$ 에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$D\nabla^4 u - \frac{h}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sigma_\phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right] + \rho h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial t} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) = 0 \quad (1)$$

여기에서, t 는 시간이고, ρ 와 h 는 밀도와 두께, D 는 굴곡 강성계수, σ_r , σ_ϕ 는 원심력에 의해 발생하는 반경방향과 원주방향의 내부응력이다. 절원과 절직경을 고려한 회전축방향의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$u(r, \phi, t) = \sum_m \sum_n R_{mn}(r) e^{in\phi} q_{mn}(t) \quad (2)$$

여기에서 $R_{mn}(r)$ 은 디스크의 정지시의 절원 m 과 절직경 n 을 갖는 반경 방향의 좌표 r 만의 함수인 모드형상함수이고, $q_{mn}(t)$ 는 복소수 형태의 일반좌표제이다. 여기서 베셀함수로 구성된 모드형상함수는 직교성을 가지게 되므로 Galerkin의 방법을 이용하여 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_{kl} + i(2l\Omega) \dot{q}_{kl} + \{ \omega_{kl}^2 - (l\Omega)^2 \} q_{kl} \\ & - \Omega^2 \sum_m \sum_n C_{kl}^{mn} q_{mn} = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

$$C_{kl}^{mn} = \int \int \left[\frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \sigma_r \frac{dR_{mn}}{dr} \right\} - \frac{n^2 h}{r^2} \sigma_\phi R_{mn} \right] \times R_{kl}(r) e^{i(n-1)\phi} r dr d\phi \quad (4)$$

여기에서 C_{kl}^{mn} 은 $n \neq 1$ 인 경우에 0이 되어 절직경이 같지 않은 모드들은 연성 되지 않는 것을 확인할 수 있다. 영구자석모터의 코깅토크에 의해 변화하는 회전속도 Ω 를 다음과 같이 가정한다.

$$\Omega(t) = \Omega_0 \{1 + \varepsilon \cos(P\Omega_0 t)\} \quad (5)$$

여기에서 P 는 영구자석모터의 극과 슬롯갯수의 최소공배수이다. (5)식을 (3)식의 지배방정식에 대입하고, 식을 무차원화하여 다음의 식으로 나타내면, 코깅토크에 의한 디스크의 굽힘 진동에의 영향이 회전속도의 변화에 의한 매개가진으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_{kl} + i(2\sigma_1)(1 + \varepsilon \cos(2\tau)) \dot{q}_{kl} \\ & + [\delta_{kl} + \lambda_{kl}(1 + \varepsilon \cos 2\tau)^2] q_{kl} \\ & - \eta(1 + \varepsilon \cos 2\tau)^2 \sum_{m \neq k} C_{kl}^{ml} q_{ml} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tau & \equiv \frac{1}{2} P \Omega_0 t, \quad \sigma_{kl} \equiv \frac{2l}{P}, \quad \delta_{kl} \equiv \left(\frac{2\omega_{kl}}{P\Omega_0} \right)^2, \\ \lambda_{kl} & \equiv -\frac{4(1^2 + C_{kl})}{P^2}, \quad \eta \equiv \frac{4}{P^2} \end{aligned} \quad (7)$$

III. 안정성 해석

3.1 섭동법(Perturbation method)

매개가진계의 안정성 해석을 위해 본 연구에서는 다중척도법에 의한 섭동법을 이용한다. 다중척도법을 적용하기 위하여, 무차원 변수 τ 와 일반 좌표계를 다음과 같이 가정한다.

$$q_{kl} = q_{kl}^0 + \varepsilon q_{kl}^1 + \varepsilon^2 q_{kl}^2 + \dots \quad (8)$$

$$\tau = \tau(T_0, \varepsilon T_0, \varepsilon^2 T_0) \equiv \tau(T_0, T_1, T_2) \quad (9)$$

여기에서 ε 은 미소 변동량을 나타낸다. 식 (8)과 (9)를 지배방정식 (6)에 대입하고, ε 의 0차에

서 2차까지 그 크기별로 각각을 정리하면 다음과 같다.

$$D_0^2 q_{kl}^0 + i(2\sigma_1) D_0 q_{kl}^0 + (\delta_{kl} + \lambda_{kl}) q_{kl}^0 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{kl}^1 + i(2\sigma_1) D_0 q_{kl}^1 + (\delta_{kl} + \lambda_{kl}) q_{kl}^1 \\ = -2D_0 D_1 q_{kl}^0 - i(2\sigma_1) D_1 q_{kl}^0 \\ - i(2\sigma_1)(\cos 2\tau) D_0 q_{kl}^0 \\ - 2\lambda_{kl}(\cos 2\tau) D_0 q_{kl}^0 + \eta \sum C_{kl}^{ml} q_{ml}^0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{kl}^2 + i(2\sigma_1) D_0 q_{kl}^2 + (\delta_{kl} + \lambda_{kl}) q_{kl}^2 \\ = -(2D_0 D_1 + D_1^2) q_{kl}^0 - 2D_0 D_1 q_{kl}^1 \\ - i(2\sigma_1)(D_2 q_{kl}^0 + D_1 q_{kl}^1) \\ - i(2\sigma_1)(\cos 2\tau)(D_0 q_{kl}^1 + D_1 q_{kl}^0) \\ - 2\lambda_{kl}(\cos 2\tau) q_{kl}^1 - \frac{1}{2} \lambda_{kl}(\cos 4\tau) q_{kl}^0 \\ + \eta \sum_{m \neq l} (C_{kl}^{ml} q_{ml}^1 + 2C_{kl}^{ml} q_{ml}^0) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (10)으로부터 ε 의 0차에 대한 해를 구하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} q_{kl}^0 = A_{kl} e^{i(\alpha_{kl} - \sigma_1)T_0} + B_{kl} e^{-i(\alpha_{kl} + \sigma_1)T_0} \\ , \alpha_{kl} \equiv \sqrt{\delta_{kl} + \lambda_{kl} + \sigma_1^2} \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)과 (11)로부터 q_{kl} 의 단모드 매개공진이 일어날 가능성이 있는 불안정조건을 찾으면 α_{kl} 가 1근처에 있는 경우가 된다. 이 조건으로부터 단모드 매개공진에 대한 불안정영역을 얻을 수 있다. 식 (13)을 식 (11)에 대입하고 ε 에 대한 1차에 대한 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_{kl}^1 = C_1 A_{kl} e^{i(\alpha_{kl} - \sigma_1 + 2)T_0} + C_2 A_{kl} e^{i(\alpha_{kl} - \sigma_1 - 2)T_0} \\ + C_3 B_{kl} e^{-i(\alpha_{kl} + \sigma_1 - 2)T_0} + C_4 B_{kl} e^{-i(\alpha_{kl} + \sigma_1 + 2)T_0} \\ + C_5 A_{ml} e^{i(\alpha_{ml} - \sigma_1)T_0} + C_6 A_{ml} e^{i(\alpha_{ml} - \sigma_1)T_0} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (12), (13), (14)으로부터 매개공진이 일어날

Table 1 Geometric and material properties

Properties	Value
Inner radius(b)	15 mm
Outer radius(a)	47.5 mm
Thickness(h)	0.8 mm
Density(ρ)	2800 kg/mm ³
Young's modulus(E)	72 × 10 ⁹ N/m ²
Poisson's ratio(ν)	0.3

Table 2 Natural frequencies

n \ m	m		
	0	1	2
0	602.70	3868.4	11198
1	596.42	4040.2	11396.1
2	716.33	4574.9	12005.19
3	1165.1	5511.2	-
4	1918.0	6865.3	-
5	2908.1	8616.4	-
6	4104.5	10698	-

Table 3 Coupling parameter C_{kl}^{mn}

k \ l	l			
	0	1	2	
0	m=0	-1.348	-1.556	-2.347
	m=1	0.815	0.688	0.353
	m=2	1.147	1.035	0.888
1	m=0	0.815	0.688	0.353
	m=1	-9.056	-9.538	-11.060
	m=2	-1.312	-1.551	-2.200
2	m=0	1.147	1.035	0.888
	m=1	-1.312	-1.551	-2.200
	m=2	-27.06	-27.65	-29.40

수 있는 불안정 조건을 구하면 α_{kl} 이 2근처일 때의 단모드 매개공진과 $\alpha_{kl} \pm \alpha_{ml} = 2$ 근처일 때의 복합모드 매개공진의 두가지 경우가 된다.

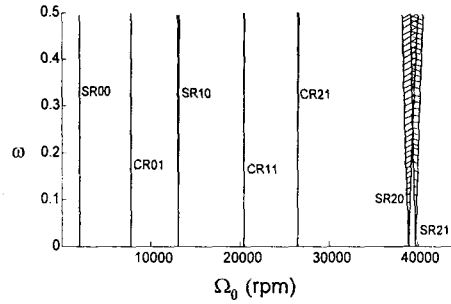


Fig.2 Stability diagram with nominal spinning velocity vs. speed fluctuation

3.2 수치해석

섭동법에 의해 구한 안정조건을 검증하기 위하여 Floquet 방법을 이용한 불안정 영역을 구하고, 수치적분에 의한 시간응답을 구하여 비교하였다.

수치해석은 Table 1과 같은 기계적 특성과 크기를 갖는 컴퓨터 저장기기인 하드디스크 드라이브에 대하여 수행하였다. 우선 이산화된 각각의 운동방정식에서 고유진동수 및 원심력과 관련된 연성계수 C_{kl}^{mn} 는 정지 디스크의 고유진동수에 대한 이론해로부터 Table 2 및 Table 3에 나타냈바와 같이 구했다.

Fig. 2는 각 모드의 회전속도에 대한 매개공진의 불안정 영역을 $P=36$ 일 때 나타낸 것이다. 여기서 "SR10"은 q_{10} 의 단모드공진을, "CR01"은 q_{01} 의 복합모드공진을 나타낸다. 각 모드에 대한 불안정 영역은 회전 속도 Ω 의 아주 작은 범위에 국한됨을 알 수 있으며 ε 의 변화에 대해 거의 바뀌지 않는 것을 알 수 있다. 한편 Fig. 3은 코깅토크의 기본주기와 관련된 파라미터 P 와 회전속도의 변화에 대한 불안정 영역을 단모드 매개공진에 도기한 것인데 P 값의 변화에 대하여 매우 민감하게 변화하는 것을 알 수가 있다. 이러한 현상은 매개변수 공진이 발생하는 경우의 불안정 영역을 도기한 Fig. 4에서도 동일하게 발생하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 디스크 진동의 안정성 관점에서 보면 영구자석 스피들모터의 설계 시 코깅 토크 자체의 크기를 줄이는 것보다는 폴과 슬롯의 개수를 조절하는 것이 훨씬 중요하다고 할 수 있다.

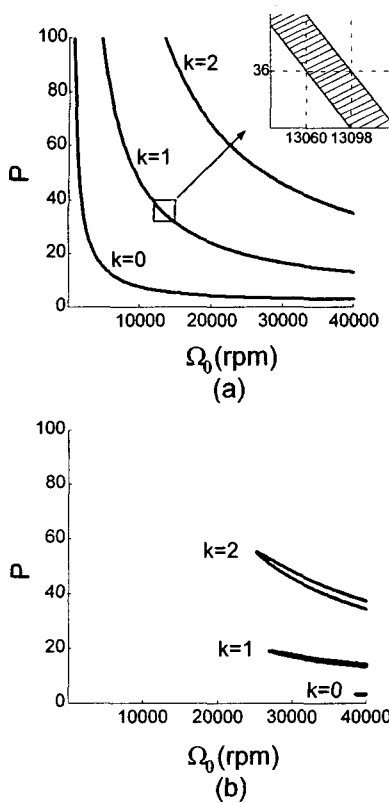


Fig. 3 Stability diagram of single mode resonance (a) $I=0$ (b) $I=1$

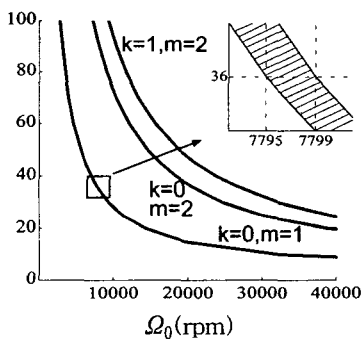


Fig. 4 Stability diagram of combination mode resonance

Fig. 5는 $P=36$ 일 때 안정 해석의 결과에 기초하여 안정 영역과 불안정 영역에서의 응답을 도기한 것으로 안정 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

IV. 결론

영구자석 스피들모터의 코깅토크가 회전 디스크의 굽힘진동에 미치는 영향을 분석하기 위하여 섭동법을 이용한 안정 해석을 수행하여 안정 영역을 구하고 그 결과를 플로케 방법과 수치 해석을 통하여 비교 검증하였다. 그로부터 얻은 결론을 다음과 같다.

- 1) 불안정 영역은 각 진동 모드에서 회전 속도, 코깅 토크의 크기 및 모터 특성변수의 값에 따라 결정되는데 아주 작은 범위에 존재한다.
- 2) 코깅 토크의 크기 변화가 불안정 영역에 미치는 영향은 거의 없는 반면 영구자석 모터의 폴 및 슬롯 수에 변화가 불안정 영역에 미치는 영향은 매우 크다.
- 3) 따라서 진동의 안정성 관점에서는 스피들모터의 설계 시 코깅 토크의 크기를 줄이는 것보다는 폴과 슬롯의 개수를 조절하는 것이 중요하다.

참고문헌

- (1) B. S. Rahman, D. K. Lieu, 1991, "The origin of permanent Magnet induced vibration in Electric Machines", J. of Vibration and Acoustics, 113, 476-481.
- (2) B. S. Rahman, D. K. Lieu, 1994, "Optimization of a Magnetic pole geometry for field harmonic control in Electric motors", J. Vibration and Acoustics, 116, 173-178.
- (3) 고흥석, 2000, "영구자석을 사용한 모터의 코깅토크에 관한 이론적 해석", 대한계학회논문집 A권, 24(7), 1795-1800.
- (4) A. phylactopoulos, G. G. Adams, 1999, "Transverse vibration of a Rectangularly Orthotropic spinning disk, Part1 : Formulation and Free Vibration", J. of Vibration and Acoustics, 121, 273-279.

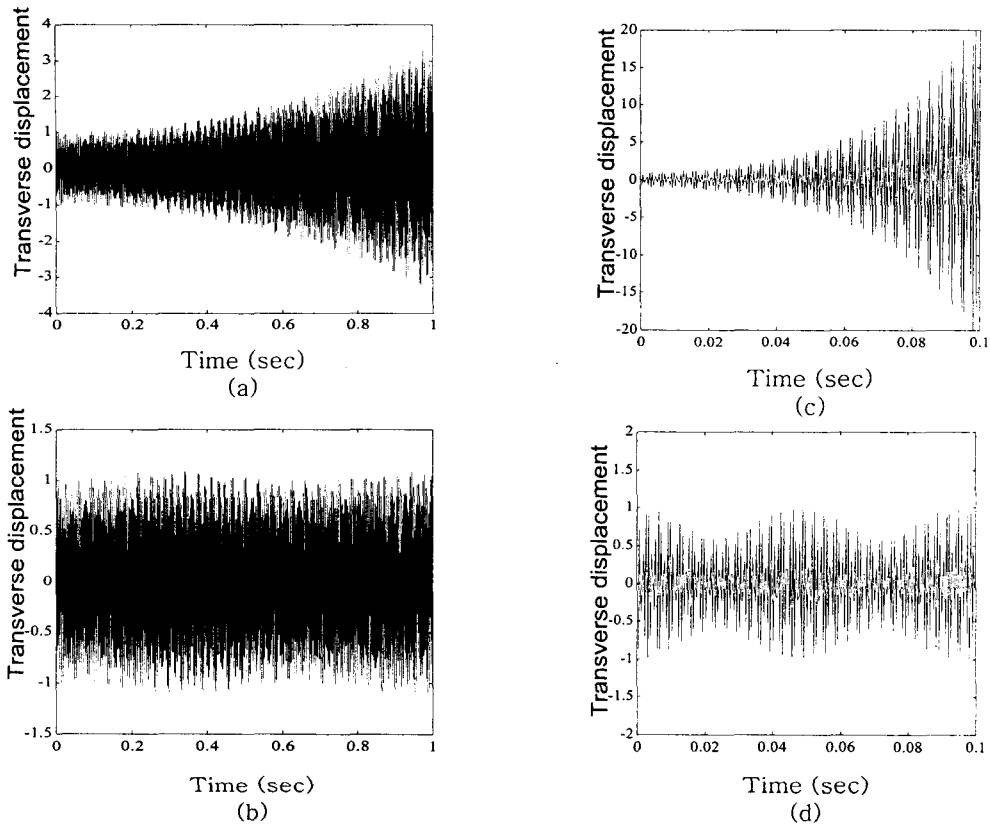


Fig. 5 Time histories (a) $q_{01}, \Omega_o = 7798\text{rpm}$ (b) $q_{01}, \Omega_o = 7801\text{rpm}$ (c) $q_{10}, \Omega_o = 13080\text{rpm}$
 (d) $q_{10}, \Omega_o = 13100\text{rpm}$

(5) S. C. Huang, W. J. Chiou, 1997, "Modelling and vibration analysis of spinning disk and moving head assembly in computer storage systems", *J. of Vibration and Acoustics*, 119, 185-191.
 (6) J. S. Chen, 1992, "Effects of load parameters on the natural frequencies and stability of a flexible spinning disk with a stationary load system", *Transaction of ASME, J. of Applied Mechanics*, 59, 230-235.
 (7) W. D. Iwan, T. L. Modeller, 1976, "The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system", *J. of Applied*

Mechanics", 43, 458-490.
 (8) I. Y. Shen, C.D. Mote, Jr, 1992, "Parametric excitation under multiple excitation parameters : Asymmetric plates under a rotating spring", *Int. J. of Solid structures*, 29(8), 1019-1032.
 (9) R. G. Parker, P. J. Sathe, 1999, "Exact solution for the free and forced vibration of a rotating disk spindle system", *J. of Sound and vibration*, 223(3), 445-465.
 (10) 최태영, 정진태, 2000, "비연성된 지배방정식을 이용한 각가속도를 갖는 회전원판의 동적 안정성 해석", *대한기계학회논문집 A권*, 24(6), 1363-1370.