

유체운동에 의한 불규칙 가진을 받는

비선형계의 확률제어

⁰오수영*, 김용관**, 조경래*, 최영섭*, 허훈***

A Stochastic Control for Nonlinear Systems under Random Disturbance Based on a Fluid Motion

Soo Young Oh*, Yong Kwan Kim**, Kyoung Lae Cho*, Young Seob Choi*, Hoon Heo***

요약

백색잡음 불규칙 과정으로 모델링된 난류형태의 유체운동에 의하여 가진되는 비선형 시스템의 특성과 제어기법에 대해 연구하였다. 고려된 물리적인 모델은 주질량과 끝단 집중질량을 갖는 보형태의 구조물이다. 그 지배방정식은 확률론적 관점에서 F-P-K 접근법으로 유도되었고, 비선형 해석법으로 Gaussian Closure방법을 이용하였다. 비선형 시스템의 제어기법으로는 슬라이딩 모드 제어를 최초로 확률영역에서 설계하고 그 효과를 확률영역 및 시간영역에서 고찰하였다.

ABSTRACT

Investigation is performed on the stability of nonlinear system under turbulent fluid motion modelled as white noise random process, which is a preliminary result in the course of research on the characteristic and nonlinear control of the stochastic system. Adopted physical model is beam-type structure with tip-mass and main base mass. The governing equation is derived via F-P-K approach in stochastic sense. By means of Gaussian Closure method infinite dynamic moment equations due to system nonlinearity is closed to finite one. At the best of authors' knowledge, it is the first trial to design nonlinear controller by using of sliding mode technique in stochastic domain and control performance and effect in stochastic domain is studied.

1. 배 경

기존의 선형해석 방법으로 설명하기 어려운 복잡한 비선형 구조물이 존재한다. 이러한 구조물의 난해한 응답특성은 시스템 자체의 고유한 비선형성이 원인이 된다. 그 동특성은 해상에 있는 시추선등의 구조물에서 관찰될 수 있으며, 비선형 구조물이 난류형태의 유체운동에 의한 불규칙한 가진을 받을 경우를 본 논문의 연구대상으로 삼았다. 비선형 시스템의 확률영역 해석 및 제어기법에 대한 연구 중 첫 번째 단계로 Gaussian closure방법을 이용한 비

* 고려대학교 제어계측공학과 대학원
(Graduate Students Dept. of Control and Instrumentation Engineering)

** 고려대학교 제어계측공학과 대학원 박사과정
국방과학연구소

(Graduate Students Dept. of Control and Instrumentation Engineering)

*** 고려대학교 제어계측공학과 교수
(Professor Dept. of Control and Instrumentation Engineering)

선형 해석을 하였고 제어를 실행하는데 있어 확률 영역에서 비선형 제어기인 슬라이딩 모드 제어기법을 이용 제어기로 설계하였다.

2. 시스템 방정식

난류형태의 유체운동에 의한 불규칙한 가진력 $F(t)$ 를 받는 주질량과 끝단 집중질량을 갖는 보 형태의 비선형 시스템이 Fig.1과 같다.^[1]

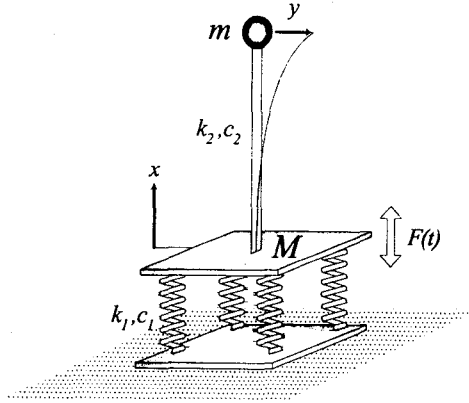


Fig.1

위 그림의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x \\ - \frac{6}{5l}m(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = F(t) \\ m\ddot{y} + c_2\dot{y} + \left\{k_2 - \frac{6}{5l}m\dot{x}\right\}y \\ + \frac{36}{25l^2}my(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)의 계를 약 비선형계로 가정하고 고차항의 비선형항을 무시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} + a_1\dot{x} + a_2x + a_3(a_5y^2 + a_4y\dot{y} \\ - \dot{y}^2) + a_3a_6(-W(t)y^2 + a_1x\dot{y}^2 \\ + a_2xy^2) = W(t) \\ \dot{y} + a_4\dot{y} + a_5y + a_6(-W(t)y + a_1x\dot{y} \\ + a_2xy) + a_7(-a_5y^3 - a_4\dot{y}y^2 \\ + y\dot{y}^2) - a_6a_3y\dot{y}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } a_1 = \frac{c_1}{(M+m)}, a_2 = \frac{k_1}{(M+m)}, \\ a_3 = \frac{6m/5l}{(M+m)}, a_4 = \frac{c_2}{m}, \\ a_5 = \frac{k_2}{m}, a_6 = \frac{6}{5l}, \\ a_7 = \frac{36}{25l}, W(t) = \frac{F(t)}{(M+m)} \end{aligned}$$

정상 백색잡음 형태의 외란은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$W(t) = \frac{dB_f(t)}{dt} \quad (3)$$

$$E[dB_f^2(t)] = 2\pi D_f \Delta t$$

여기서 $B_f(t)$ 는 브라운 과정이고, D_f 는 불규칙과정들의 PSD(power spectral density)값이다.

식(2)는 (4)와 같은 좌표변환을 거쳐 확률미분방정식의 형태로 구할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} x &= X_1 \\ \dot{x} &= X_2 \\ y &= X_3 \\ \dot{y} &= X_4 \end{aligned} \quad (4)$$

Ito의 확률미분방정식은 Fokker - Planck - Kolmogorov 방정식(5)에 의해서 지배되는 전이 확률밀도 함수(transition probability density function) $P(\underline{X}, \tau)$ 에 따라서 특성화된다.^[1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\underline{X}, \tau) = \\ - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial X_i} [a_i(\underline{X}, \tau)P(\underline{X}, \tau)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} [b_{ij}(\underline{X}, \tau)P(\underline{X}, \tau)]$$

여기서 계수 $a_i(\underline{X}, \tau)$: 1st incremental moment or drift coefficient

$b_{ij}(\underline{X}, \tau)$: 2nd incremental moment or diffusion coefficient

따라서 본 시스템의 동적 모멘트방정식은 식(6)에 의해서 구할 수 있겠다.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E[X_1^i X_2^j X_3^k X_4^l] = \iiint \int_{-\infty}^{\infty} X_1^i X_2^j X_3^k X_4^l \frac{\partial}{\partial \tau} P(\mathbf{X}, \tau) dX_1 dX_2 dX_3 dX_4 \quad (6)$$

이 결과로 식(6)에 의한 식(7)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{m}_{i,j,k,l} = & i m_{i-1,j+1,k,l} - j a_1 m_{i,j,k,l} \\ & - j a_2 m_{i+1,j-1,k,l} - j a_3 a_5 m_{i,j-1,k+2,l} \\ & - j a_4 a_3 m_{i,j-1,k+1,l+1} + j a_3 m_{i,j-1,k,l+2} \\ & - j a_3 a_6 m_{i+1,j-1,k+2,l} \\ & - j a_1 a_3 a_6 m_{i,j,k+2,l} + k m_{i,j,k-1,l+1} \\ & - l a_4 m_{i,j,k,l} - l a_5 m_{i,j,k+1,l-1} \\ & - l a_6 m_{i+1,j,k+1,l-1} - l a_1 a_6 m_{i,j+1,k+1,l-1} \\ & + l a_5 a_7 m_{i,j,k+3,l-1} + l a_4 a_7 m_{i,j,k+2,l} \\ & - l a_7 m_{i,j,k+1,l+1} - l a_3 a_6 m_{i,j,k+1,l+1} \\ & + \frac{D_f}{2} j(j-1) m_{i,j-2,k,l} \\ & + D_f a_3 a_6 j(j-1) m_{i,j-2,k+2,l} \\ & + \frac{D_f}{2} a_3 a_6 j(j-1) m_{i,j-2,k+4,l} \\ & + D_f a_6 j l m_{i,j-1,k+1,l-1} \\ & + D_f a_3 a_6^2 j l m_{i,j-1,k+3,l-1} \\ & + \frac{D_f}{2} a_6^2 l(l-1) m_{i,j,k+2,l-2} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $m_{ijkl} : E[X_1^i X_2^j X_3^k X_4^l]$

3. Gaussian Closure

식(7)의 모멘트 미분 방정식을 살펴보면 우변과 좌변의 모멘트 차수가 같지 않다. 이러한 모멘트 미분방정식의 응답은 $\mu+1, \mu+2$ 차 모멘트를 μ 차 이하의 모멘트로 전환하는 cumulant 방법을 사용함으로써 얻어진다.

시스템의 계를 약비선형계로 가정했으므로, 가우스분포로 근사할 수 있다.

불규칙 변수벡터 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$

의 특성함수 φ_x 는 cumulant의 항으로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \varphi_x &= E[e^{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(\mathbf{x}, \tau) e^{i(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (8)$$

또한 특성함수 $\varphi_x(\theta)$ 는 아래 식과 같은 지수함수로 확장할 수 있다.

$$\varphi_x(\theta) = e^{\left\{ \sum_{k=1}^K \theta_k \lambda_k[X_k] + \frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \theta_l \lambda_{kl}[X_k, X_l] + \dots \right\}} \quad (9)$$

여기서, $\lambda_K[X]$ 를 cumulant라 하며, K차의 cumulant는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_K[X_1^{k_1} X_1^{k_2} \dots X_1^{k_n}] = \frac{1}{i^K} \left. \frac{\partial^K \ln \varphi_x(\theta)}{\partial \theta_1^{k_1} \dots \partial \theta_n^{k_n}} \right|_{\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0} \quad (10)$$

식(10)으로부터 3차 이상의 cumulant들은 0이 되어야 한다. 식(7)에서 4개의 1차 모멘트방정식과 10개의 2차 모멘트방정식을 구할 수 있다.

1차 모멘트방정식은 1차에서 3차까지의 모멘트로 구성되어 있으며, 2차 모멘트방정식은 1차에서 4차까지의 모멘트들로 구성되어 있다. 이러한 3차 및 4차 모멘트들은 cumulant를 사용하여 1차 및 2차 모멘트로 전환할 수 있다.

4. 제어기 설계

Gaussian Closure방법으로 얻어진 모멘트방정식을 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) \quad (11)$$

식(11)을 제어입력이 포함된 비선형 시스템으로 표현하면 식(12)과 같다.

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathbf{B}u \quad (12)$$

본 논문에서는 비선형 모멘트방정식의 제어를 위하여 확률영역의 제어기로 슬라이딩 모드 제어기법을 사용하였다.^[5]

슬라이딩 모드 제어기 u 를 구하기 위해 슬라이딩 평면 s 와 평면의 도함수를 다음과 같다고 하면,

$$s(m) = C m = \sum_{i=1}^n c_i m_i \quad (13)$$

$$\dot{s} = C \dot{x}$$

여기서, $C = [0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1}]$

$s = \dot{s} = 0$ 을 만족하는 등가 제어 입력을 u_{eq} 라 하며, 식(13)에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}f \quad (14)$$

전체 제어입력 u 는 슬라이딩 모드 제어를 위해 미리 설계된 스위칭 평면으로 상태를 이끌고 유지시키도록 하는 비선형 제어기 u_N 를 포함하는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$u = u_{eq} + u_N \quad (15)$$

비선형 제어기 u_N 을 구하기 위해 평면 s 에 대한 Lyapunov function을 다음과 같이 선택한다.

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (16)$$

Lyapunov function의 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{V} = s \dot{s} < -Q|s| \quad (17)$$

여기서, Q : positive definite matrix

식(17)을 만족하면 슬라이딩 평면의 안정도를 보장하고 이는 결국 모멘트방정식의 상태의 안정도를 보장한다.

식(17)을 만족하는 슬라이딩 모드 제어입력 u 는 다음과 같다.

$$u = -(CB)^{-1}f - Q \cdot \text{sgn}(s) \quad (18)$$

5. 결 과

Fig.2와 Fig.3은 PSD가 0.01인 불규칙 가진을 받는 시스템의 비제어시와 확률영역에서 슬라이딩 모드 제어를 사용한 결과 및 시간영역에서 슬라이딩 모드 제어를 사용한 결과에 대한 평균제곱응답이다.

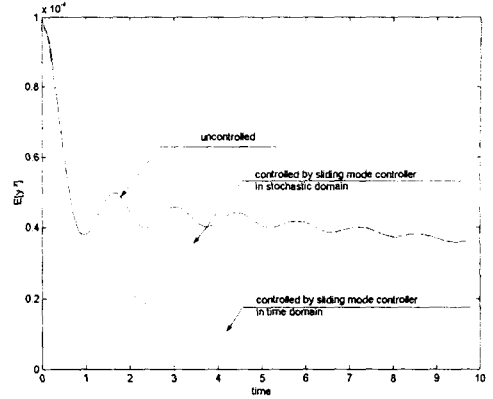


Fig.2 Mean square response of displacement

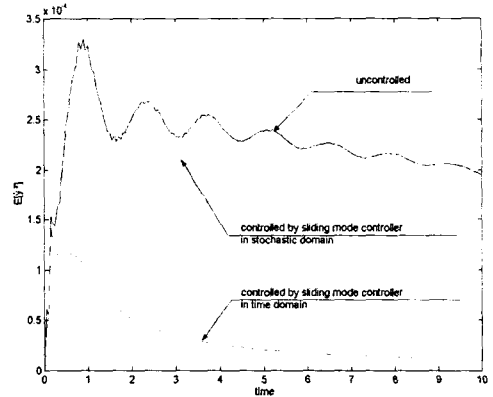


Fig.3 Mean square response of velocity

6. 결 론

난류형태의 유체운동에 의한 불규칙 가진을 받는 비선형 시스템의 확률제어에 대한 첫 번째 연구로서 본 논문에서는 확률영역에서의 비선형 해석과 비선형 확률 시스템에 대한 제어기법을 최초로 수행하였다.

연구 결과 확률영역에서의 비선형 시스템이 제안된 기법을 사용하여 설계한 제어기로 제어가 가능함을 확인할 수 있었으며, 본 제어기법을 개선하

고 있는 바 곧 우수한 비선형 확률 제어기로서 그 성능이 기대된다.

참고문헌

1. R. A Ibrahim, H. Heo, "Stochastic Response of Nonlinear Structures with Parameter Random Fluctuations" AIAA Journal Vol. 25, No.2, February 1987
2. Nayfeh, A. H and Mook, D.T., 1979, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons Inc
3. Raymond A. Decarlo, Stanislaw H. Zak, Gregory P. Matthews, "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems:A Tutorial" Proceedings of the IEEE Vol. 76, No.3, March 1988
4. Shafic S. Oueini and Ali H. Nayfeh, "Control of A System under Principal Parametric Excitation" Movic Vol.2 August 25-28, 1998
5. Kang Bark Park, Teruo Tsuji, "Terminal Sliding Mode Control of Second-Order Nonlinear Uncertain Systems" Int. J. Robust Nonlinear Control 9, 769-780 1999
6. Duk Sang Cho, Won Kyoung Lee, " Influence of Internal Resonance on Response of an Autoparametric Vibration Absorber under Random Excitation", Journal of KSNVE Vol.12, No.6, December 2000