

스프링으로 탄성 지지된 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Curved Beams with Elastic Springs

이 병 구* · 진 태 기** · 이 태 은**

Byoung Koo Lee · Tae Ki Jin · Tae Eun Lee

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations curved beams with elastic springs. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing the free vibrations of such beams are derived, in which each elastic spring is modeled as a discrete Winkler foundation with very short longitudinal length. Differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies and mode shapes. In numerical examples, the circular, parabolic, sinusoidal and elliptic curved members are considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in tables and figures as the non-dimensional forms. Also the typical mode shapes are presented.

1. 서론

스프링으로 탄성 지지된 구조물의 거동특성 규명은 구조공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구 대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다.⁽¹⁻³⁾ 또한 자유진동은 구조물의 동적응답 해석시 중요한 변수이며 공용중인 구조물의 안정성 평가시 평가지수로 사용되고 있으므로 자유진동 특성을 규명하는 것은 매우 중요한 연구과제라 할 수 있다.

이 연구는 스프링으로 탄성 지지된 곡선부재의 면의 자유진동을 규명하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 스프링으로 지지된 곡선부재의 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 해석모형으로부터 정확한 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 본 연구와 타 문헌과의 결과를 비교하여 본 연구방법의 타당성을 검증하고, 실제적인 공학문제에서 필요한 다양한 선형 및 단부 경계조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 스프링으로 탄성 지지된 지간길이 l , 수평높이 h , $y=y(x)$ 의 임의선형을 갖는 곡선부재의 기하학적 형상을 나타낸다. 부재의 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. K_j, L_j 는 j 번째 스프링의 스프링상수, 스프링위치이며 첨자 n 은 스프링의 개수를 나타낸다. 이 곡선부재가 자

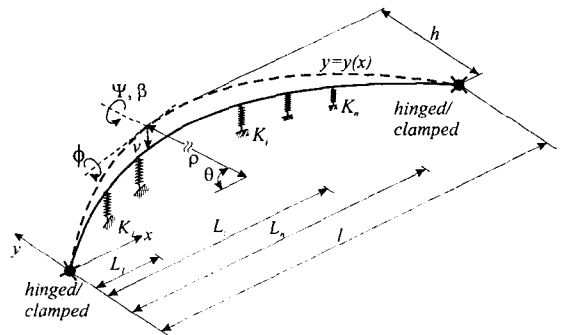


Fig. 1 Curved beam with multiple elastic springs and its variables

* 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수
 ** 원광대학교 토목환경공학과 박사과정

유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다. (x, y) 는 곡선부재의 선형을 정의하는 부재의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이다. ρ 및 θ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다. v , Ψ , β 및 ϕ 는 각각 수직방향 변위, 휨에 의한 단면 회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 단면 회전각 Ψ 와 β 를 수학적 모형에 고려함으로써 지배미분방정식에 회전관성과 전단변형 효과를 포함한다.

이 논문에서는 Fig. 2와 같이 스프링상수가 K_j 인 스프링을 지지계수가 S_j 이고 길이가 H 인 탄성지반으로 모형화하였다.⁽⁴⁾ 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하기 위하여 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 동적평형방정식을 이용한다.

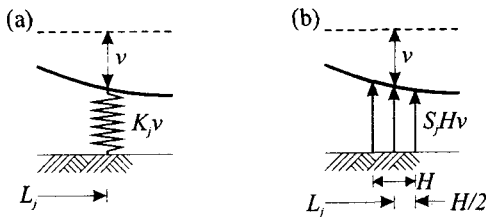


Fig. 2 Curved beam supported by (a) elastic spring and (b) elastic foundation

Fig. 3은 탄성지반 위에 놓인 곡선부재가 자유진동할 때에 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다. M , T 및 Q 는 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고, F_v , C_Ψ 및 C_ϕ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이고, $S_j v$ 는 단위길이당 지반반력이다.

미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력 및 지반반력 사이의 동적 평형방정식을 세우면 다음의 식들과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho S_j v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

여기서 ($'$)은 $d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

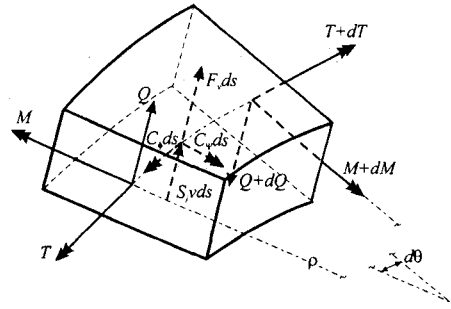


Fig. 3 Small element of beam subjected to stress resultants, inertia forces and restoring forces

부재단면에 발생하는 합응력 M , T 및 Q 는 식 (4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.⁽⁵⁾

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi') \quad (4)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\Psi + \phi') \quad (5)$$

$$Q = \alpha AG\beta = \alpha AG(\rho^{-1}v' - \Psi) \quad (6)$$

여기서 A 는 단면적, I 와 J 는 부재단면의 단면 2차모멘트 및 비틀림상수, E 와 G 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수, α 는 단면형상에 따른 상수이다.

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향관성력 F_v , 회전관성우력 C_Ψ 및 비틀림관성우력 C_ϕ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -m A \omega^2 v \quad (7)$$

$$C_\Psi = -m I \omega^2 \Psi \quad (8)$$

$$C_\phi = -m I_P \omega^2 \phi \quad (9)$$

여기서 m 은 부재재료의 밀도, ω 는 고유각진동수 (rad/sec)이다. 이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식 (6)이 전단변형효과이고 식 (8)이 회전관성효과이다.

Fig. 2에서 j 번째 스프링 반력은 $K_j v$ 이고 j 번째 지반반력 $S_j H v$ 이므로 이들 두힘을 증가시키면 다음 식과 같다.

$$S_j H v = K_j v \quad (10)$$

위의 식에서 S_j 를 K_j, H 로 나타내면 다음과 같다.

$$S_j = K_j/H = K_j\lambda/l \quad (11)$$

식 (11)에서 λ 는 다음과 같이 정의되며 λ 값이 클수록 더 정확한 수치해를 얻는다.

$$\lambda = l/H \quad (12)$$

식 (11)을 식 (1)에 대입하면 스프링상수가 K_j 이고 스프링위치가 L_j 인 동적평형방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$Q' - \rho F v - \rho K_j(\lambda/l)v = 0, \quad K_j = 0 \\ \text{not for } L_j - l/(2\lambda) \leq x \leq L_j + l/(2\lambda) \quad (13)$$

식 (13), (2)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 스프링으로 탄성 지지된 곡선부재의 면외 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있다. 지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad f = h/l \quad (14 \sim 16)$$

$$\zeta = \rho/l, \quad \eta = v/l, \quad m_j = L_j/l \quad (17 \sim 19)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (20, 21)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), \quad \mu = \alpha G/E \quad (22, 23)$$

$$k_j = K_j l^4/(\pi^4 EI) \quad (24)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{mA/(EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (25)$$

여기서 (ξ, δ) 는 무차원 직교좌표계, f, ζ, η, m_j 는 h, ρ, v, L_j 를 지간길이 l 로 정규화한 것으로 f 는 수평높이 대 지간길이 비, m_j 는 스프링위치 변수이다. s 와 s_p 는 세장비 관련 변수, ϵ 과 μ 는 강성변수와 전단변수, k 는 스프링변수(spring parameter)이다. c_i 는 무차원 고유진동수이고 i 는 모드 번호(mode number)이다.

합응력식 (4), (5), (6)에서 M', T', Q' 을 구하고 이들 식과 합응력식 (4)~(6), 관성력식 (7)~(9)을 동적 평형방정식 (13), (2), (3)에 대입하고 무차원 변수들인 식 (14)~(25)를 이용하면 스프링으로

탄성 지지된 곡선부재의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1 \eta' + (\pi^4 k_j \lambda - c_i^2) a_2 \eta + a_3 \Psi', \quad k_j = 0 \\ \text{not for } m_j - 1/(2\lambda) \leq \xi \leq m_j + 1/(2\lambda) \quad (26)$$

$$\Psi'' = a_1 \Psi' + (a_4 - a_5 c_i^2) \Psi + a_6 \phi' + a_7 \eta' \quad (27)$$

$$\phi'' = a_1 \phi' + (a_8 - a_9 c_i^2) \phi + a_{10} \Psi' + a_1 \Psi \quad (28)$$

여기서,

$$a_1 = \zeta' / \zeta \quad (29.1)$$

$$a_2 = \zeta^2 / (\mu s^2) \quad (29.2)$$

$$a_3 = \zeta \quad (29.3)$$

$$a_4 = \zeta^2 \mu s^2 + \epsilon \quad (29.4)$$

$$a_5 = \zeta^2 / s^2 \quad (29.5)$$

$$a_6 = 1 + \epsilon \quad (29.6)$$

$$a_7 = -\zeta \mu s^2 \quad (29.7)$$

$$a_8 = 1/\epsilon \quad (29.8)$$

$$a_9 = \zeta^2 / (s_p^2 \epsilon) \quad (29.9)$$

$$a_{10} = -(1 + 1/\epsilon) \quad (29.10)$$

본 연구에서 곡선부재의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (30)~(32) 및 (33)~(35)와 같다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi' = 0 \quad (30) \sim (32)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi = 0 \quad (33) \sim (35)$$

3. 형상 함수

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_{10}$ 에 포함되

어 있는 형상함수 ζ , ζ' 이 정의되어야 한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. Fig. 1에서 주어진 $y=y(x)$ 의 선형식은 무차원 변수인 식 (14), (15)에 의하여 무차원 선형식 δ 및 무차원 곡률반경 ξ 를 다음 식들과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \quad (36)$$

$$\zeta = \left(\frac{d^2\delta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (37)$$

곡선보축상 임의점에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도 θ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right) \quad (38)$$

나머지 곡률변화계수 ξ' 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \quad (39)$$

이상의 식 (36)~(39)를 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화 곡률항인 ζ , ζ' 를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선부재의 선형으로 원형, 포물선, 정현, 타원형의 곡선부재를 채택하였다.

4. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 상미분방정식, 경계조건 및 형상 함수식이 유도되었으므로 주어진 곡선부재의 선형, 단부조건 및 $f, s, s_p, \varepsilon, n, k_j, m_j$ 가 정의되면 무차원 고유진동수 c_i 와 진동형 $\eta = \eta_i(\xi)$ 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고 c_i 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi법을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 이미 다수의 문헌들^(6,7)에 의하여 그 타당성이 입증되었다.

본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 본 연구와 SAP 90의 결과를 Table 1에서 비교하였다. 이 표에 보인 바와 같이 두 결과들은 서로 매우 근접한 값들을 보여주고 있어서 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있다.

Table 2는 곡선부재의 단부조건별, 선형별로 c_i 값을 비교한 것이다. 이 표에 보인 바와 같이 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전의 단부조건 순서로 c_i 값이 큰 것을 알 수 있으며, 선형이 c_i 값에 미치는 영향은 크지 않으나 원호형 부재가 다른 부재에 비하여 비교적 작은 값을 보이고 있다.

Table 1 Comparisons* of c_i between this study and SAP 90

end constraint	data source	frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
hinged	this study	16.63	54.15	72.81	80.06
hinged	SAP90	16.50	55.84	71.32	80.13
hinged	this study	16.73	54.35	72.96	96.55
clamped	SAP90	17.02	53.94	69.54	98.57
clamped	this study	25.16	64.96	73.06	103.20
clamped	SAP90	25.87	65.32	72.72	101.45

* circular, $f=0.2, s=50, n=3, k_1=10, k_2=20, k_3=30, m_1=0.25, m_2=0.5, m_3=0.75$

Table 2 Comparisons* of c_i by end constraint and type of curve

end constraint	type of curve	frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
hinged	circular	16.63	54.15	72.81	80.06
	parabolic	16.97	54.38	73.90	81.96
hinged	sinusoidal	16.97	54.40	74.17	82.66
	elliptic	16.88	54.31	73.49	81.07
hinged	circular	16.73	54.35	72.96	96.55
	parabolic	17.06	54.57	73.92	97.57
clamped	sinusoidal	17.06	54.56	74.24	97.87
	elliptic	16.97	54.50	73.49	97.13
clamped	circular	25.16	64.96	73.06	103.20
	parabolic	25.20	65.15	74.01	104.61
clamped	sinusoidal	25.17	65.12	74.33	105.06
	elliptic	25.20	65.17	73.58	103.99

* $f=0.2, s=50, n=3, k_1=10, k_2=20, k_3=30, m_1=0.25, m_2=0.5, m_3=0.75$

Fig. 4는 c_i 와 f 의 관계를 나타낸 것으로 f 값이 증가함에 따라 c_i 값은 감소함을 알 수 있다. 이는 f 값이 증가하면 곡선부재의 길이가 증가하여 진동에 대한 강성이 감소함으로써 c_i 값도 감소되는 것으로 사료된다. f 값이 0이면 직선 보이므로 □로 표시된 c_i 값들은 직선 보의 c_i 값들임을 알 수 있다.

Fig. 5는 c_i 와 n 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이 제 1모드는 $n=1$ 일

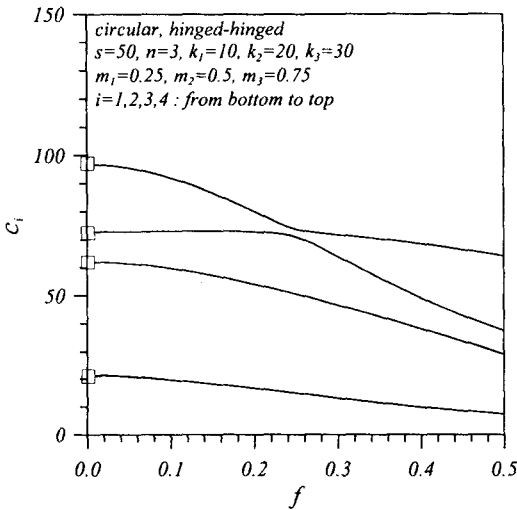


Fig. 4 c_i versus f curves

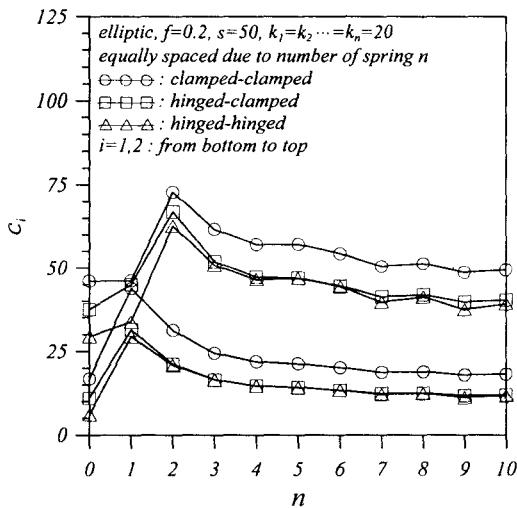


Fig. 5 c_i versus n curves

때, 제 2모드의 경우에는 $n=2$ 일 때 가장 큰 c_i 값을 보이고 있다. 이는 스프링이 없는 경우의 최대 진폭위치에 스프링을 설치하는 것이 고유진동수를 증가시킬 수 있는 방안임을 알 수 있다. 그러나 n 이 3이상에서는 오히려 c_i 값이 감소하며 각각 수평선에 접근하고 있다. 즉 n 값이 증가함에 따라서 Winkler지반 위에 놓인 곡선부재의 c_i 값으로 수렴되는 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 c_i 와 m_1 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이 m_1 값이 증가함에 따라 c_i 값은 증가, 감소를 반복하고 있다. 이 그림에서 보인 바와 같이 스프링이 없는 경우의 각 모드의 최대진폭위치에 스프링을 설치하면 매우 큰 c_i 값을 얻을 수 있다. 예로서 제 1 모드의 경우에는 스프링을 지간의 중앙에 설치함으로써 매우 큰 c_i 값을 실현할 수 있다. 한편 제 3모드는 비틀림모드이기 때문에 스프링의 위치에 상관없이 거의 같은 c_i 값을 보여주고 있다.

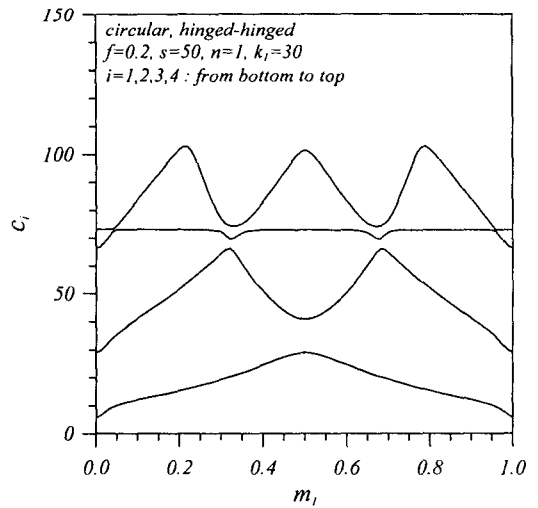


Fig. 6 c_i versus m_1 curves

Fig. 7은 자유진동하는 곡선부재의 진동변위 v , 휨에 의한 단면 회전각 Ψ , 비틀림각 ϕ 에 대한 제 1, 2 모드의 진동형을 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 각 모드별로 상대진폭의 크기, 최대진폭의 위치 및 무변위 위치(nodal point) 등을 알 수 있다.

parabolic, hinged-clamped
 $f=0.2, s=50, n=1, k_1=30, m_1=0.667$
 ——— : with spring ($c_1=21.64, c_2=69.24$)
 - - - - : without spring ($c_1=11.16, c_2=37.72$)

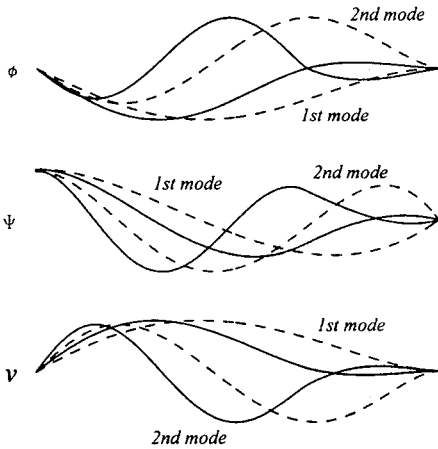


Fig. 7 Example of mode shapes

5. 결론

이 논문은 스프링으로 탄성 지지된 곡선부재의 자유진동에 관한 연구이다. 스프링을 길이가 매우 짧은 탄성지반으로 모형화하여 곡선부재의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였으며, 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 상미분방정식을 적분하기 위하여 Runge-Kutta 법을 이용하고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 본 연구와 SAP 90의 고유진동수를 서로 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 입증하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 곡선부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계 및 진동형을 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 건설공학, 기계공학을 비롯한 구조공학분야에서 그 유용성이 기대된다.

감사의 글

이 연구는 1998년도 한국학술진흥재단의 학술연구비지원(과제번호: KRF-98-001-E01895)으로 이루어진 연구결과의 일부로서 재단당국의 연구비 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- Voltera, E., 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 20, pp.227-237.
- Panayotounakos, D.E. and Teocaris, P.S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 47, pp.139-144.
- Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 127, pp.291-301.
- 이병규, 이광범, 오상진, 이태기, 2000, "Free Vibrations and Buckling Loads of Columns with Multiple Elastic Springs," 한국소음진동 공학회 논문집, 제 10권, 제 6호, pp.1067-1074.
- Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," Computers & Structures, Vol. 47, pp.419-426.
- 모정만, 1997, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 박사학위 논문, 원광대학교 대학원.
- Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section" Vol. 37, pp.4871-4891.