

## 원판의 비선형 비대칭진동응답

°여명환\*, 이원경\*

### Response of Nonlinear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate

Myeong Hwan Yeo and Won Kyoung Lee

#### ABSTRACT

An investigation into asymmetric vibrations of a clamped circular plate under a harmonic excitation is made. We examine a primary resonance, in which the frequency of excitation is near the natural frequency of an asymmetric mode of the plate. We found not only a response having the form of standing wave but also one having the form of traveling wave, which was not observed by Sridhar, Mook and Nayfeh(1978; Journal of Sound and Vibration 59(2), pp. 159-170).

#### 1. 서론

고정경계를 가진 원판의 횡변형은 중간평면의 신장을 수반하게 된다. 이 신장에 기인한 기하학적 비선형성은 운동의 진폭이 증가함에 따라 원판의 동적응답에 심각한 영향을 미치게 된다. 이 경우에는 선형해석만으로는 이러한 계의 응답특성을 규명하는 데는 한계가 있으므로 비선형해석이 필요하다.

조화 가진력이 작용하는 고정경계를 가진 원판의 비선형진동에 대한 연구는 대칭진동에 대한 연구와 비대칭진동에 대한 연구로 나눌 수 있다. 대칭진동에 대한 연구는 Sridhar 등<sup>(1)</sup>과 Hadian과 Nayfeh<sup>(2)</sup>가 3개 모드의 상호작용(three-mode interaction)을 포함하는 원판의 주공진(primary resonance)을 연구하였고, Lee와 Kim<sup>(3)</sup>은 원판의 조합공진(combination resonance)을 연구하였다. 이러한 연구에서는 정상상태응답이 대칭모드들만

의 중첩으로 나타나므로 정상파(standing wave)의 형태를 가진다. 원판의 비대칭진동을 해석한 Sridhar 등<sup>(4)</sup>은 가진진동수가 비대칭모드의 고유진동수에 가까운 주공진에선 정상파인 응답만 존재함을 확인하였으며, 대칭모드와 비대칭모드가 포함된 내부공진의 경우엔 가진진동수가 이 내부공진 조건에 포함된 고유진동수 중 최대값에 가까운 주공진에선 정상파 뿐만 아니라 진행파(traveling wave)인 응답도 가능함을 예측하였다. 그러나 이 연구에선 수치예를 통해 결과를 보여주지 않았으므로 사실 여부를 확인할 수가 없었다.

본 연구에서는 Sridhar 등<sup>(4)</sup>의 해석과정을 엄밀히 검토하고 수치예를 통해 그 타당성을 확인하고자 한다.

#### 2. 운동방정식과 해석

Fig. 1의 고정경계를 가진 얇은 원판의 횡변형이 두께에 비해 상당히 작다고 가정하면, 횡진동을 나타내는 무차원화된 운동방정식은 von Karman 방정식의 동적상사(dynamic analogue)로부터 다음과

\* 영남대학교 기계공학부

\*\* 영남대학교 대학원 기계공학부

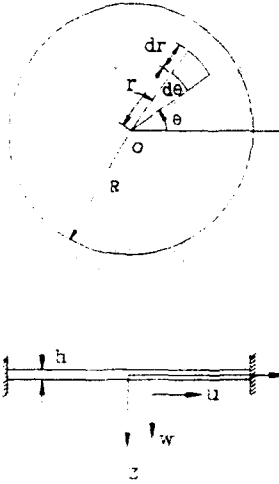


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate

같이 표현된다.<sup>(4)</sup>

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^4 w = \varepsilon \left[ L(w, F) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + p(r, \theta, t) \right] \quad (1a)$$

$$\nabla^4 F = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (1b)$$

여기서,

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

$$- 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla^4 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

이고  $w$ 는 중간평면의 횡변위,  $c$ 는 감쇠계수,  $p$ 는

외력,  $\nu$ 는 Poisson 비(Poisson's ratio),  $F$ 는 응력 함수,  $\varepsilon (= 12(1-\nu^2)h^2/R^2 \ll 1)$ 은 작은 매개변수 (small parameter)로서 각 항들의 상대적인 크기 (order)를 나타낸다.

경계조건은 모든  $t$ 와  $\theta$ 에 대해  $r=R$ 에서

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad (2a, b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r^2} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+\nu}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3b)$$

그리고  $r=0$ 에서 해가 유한하다는 조건이 필요하다.

식 (1)~(3)의 비선형편미분방정식의 근사해를 다중시간법(method of multiple scales)을 적용하여 구하기 위해  $w$ 와  $F$ 가 다음과 같이 전개된다고 가정하자.

$$w(r, \theta, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(r, \theta, T_0, T_1, \dots) \quad (4a)$$

$$F(r, \theta, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j F_j(r, \theta, T_0, T_1, \dots) \quad (4b)$$

여기서  $T_n = \varepsilon^n t$ 이다. 식 (1)~(3)에 식 (4)를 대입하고  $\varepsilon$ 의 동일차수 계수들을 같게 두면,

$$D_0^2 w_0 + \nabla^4 w_0 = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^4 F_0 = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \theta^2} \right) \quad (6)$$

$$D_0^2 w_1 + \nabla^4 w_1 = -2D_0 D_1 w_0 - 2c D_0 w_0 + p$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \theta^2} \right) \\
& + \frac{\partial^2 F_0}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \\
& - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F_0}{\partial \theta} \right) \\
& \times \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \quad (7)
\end{aligned}$$

여기서,  $D_n = \partial / \partial T_n$ 이다. 그리고 모든  $j, \theta, t$ 에 대해  $r=1$ 에서

$$w_j = 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial r} = 0, \quad (8a, b)$$

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial r^2} - \nu \left( \frac{\partial F_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 F_j}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial r^2} - \frac{\partial F_j}{\partial r} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 F_j}{\partial r \partial \theta^2} \\
- (3 + \nu) \frac{\partial^2 F_j}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9b)
\end{aligned}$$

그리고 모든  $j$ 에 대해  $r=0$ 에서  $w_j$ 와  $F_j$ 는 유한해야한다.

식 (5)와 (8)로부터  $w_0$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{0m}(r) A_{0m} e^{i\omega_m T_0} \\
+ \sum_{n,m=1}^{\infty} \phi_{nm}(r) \{ A_{nm} e^{i(\omega_n T_0 + n\theta)} \\
+ B_{nm} e^{i(\omega_n T_0 - n\theta)} \} + cc \quad (10)
\end{aligned}$$

여기서  $\phi_{nm}(r)$ 은 경계조건을 만족하는  $r$ 방향의 형상함수(shape function)로서 다음과 같다.

$$\phi_{nm} = x_{nm} \left[ J_n(\eta_{nm} r) - \frac{J_n(\eta_{nm})}{I_n(\eta_{nm})} I_n(\eta_{nm} r) \right]$$

$J_n$ 은 베셀함수(Bessel function of the first kind of order  $n$ )이고,  $I_n$ 은 수정베셀함수(Modified

Bessel function of the first kind of order  $n$ )이며, 상수  $x_{nm}$ 은  $\phi_{nm}$ 을 다음과 같이 정규화(normalize)함으로써 구해진다.

$$\int_0^1 r \phi_{nm}^2 dr = 1$$

$\eta_{nm}$ 은 특성방정식

$$I_n(\eta) J_n'(\eta) - J_n'(\eta) I_n(\eta) = 0$$

의 근으로  $\omega_{nm} = \eta_{nm}^2$ 이고  $n$ 은 반경방향의 nodal 선의 수를  $m$ 은 경계를 포함하여 원주방향의 nodal 선의 수를 나타낸다.  $A_{nm}, B_{nm}$ 은  $n \geq 1$ 인  $T_n$ 의 복소함수(complex function)로서 다음단계의 근사화에서 가해조건(solvability condition)으로부터 구해질 수 있다.  $cc$ 는 앞 항의 공액복소수(complex conjugate)를 나타낸다. 식 (10)에서 우변 첫 번째 항은 진폭이 시간( $T_n, n \geq 0$ )의 함수인 대칭모드들의 중첩을, 두 번째 항은 진폭이 시간의 함수인 비대칭모드들의 중첩으로  $T_0$ 가 변함에 따라 서로 다른 원주방향으로 진행되는 진행파의 중첩을 나타낸다.  $\eta_{-nm} = -\eta_{nm}$ 으로 두면,  $\omega_{-nm} = \omega_{nm}$ ,  $\phi_{-nm} = -\phi_{nm}$ 이 되고 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{nm}(r) u_{nm}(T_0, T_1, \dots) e^{in\theta} \quad (11)$$

여기서

$$u_{nm} = A_{nm} e^{i\omega_{nm} T_0} + \bar{B}_{nm} e^{-i\omega_{nm} T_0},$$

이고  $A_{-nm} = B_{nm}$ 이다.

식 (11)을 식 (6)에 대입하고 경계조건 식 (9)를 이용하면  $F_0$ 는 다음과 같다.

$$F_0 = \sum_{a,n=-\infty}^{\infty} \sum_{b,m,q=1}^{\infty} \psi_{ab} G(nm, pq, ab) u_{nm} u_{pq} e^{ia\theta} \quad (12)$$

여기서  $p = a - n$ ,

$$G(nm, pq, ab) = \xi_{ab}^{-4} \int_0^1 r \psi_{ab} E(nm, pq) dr$$

$$E(nm, pq) = \frac{-n\dot{p}}{r^2} \left( \phi'_{nm} - \frac{\phi_{nm}}{r} \right) \left( \phi'_{pq} - \frac{\phi_{pq}}{r} \right) - \frac{1}{2r} (\phi'_{nm} \phi'_{pq})' + \frac{1}{2r^2} (p^2 \phi''_{nm} \phi_{pq} + n^2 \phi''_{pq} \phi_{nm})$$

$$\psi_{an} = \tilde{x}_{an} [J_a(\xi_{an} r) - \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an} r)]$$

여기서, 상수  $\tilde{x}_{an}$ 은 다음의 정규화로 구하여진다.

$$\int_0^1 r \psi_{an}^2 dr = 1$$

그리고,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{an} = & [a(a+1)(\nu+1) - \xi_{an}^2] J_a(\xi_{an}) \\ & - \xi_{an}(\nu+1) J_{a-1}(\xi_{an}) / \\ & [a(a+1)(\nu+1) + \xi_{an}^2] I_a(\xi_{an}) \\ & - \xi_{an}(\nu+1) I_{a-1}(\xi_{an}) \end{aligned}$$

$\xi_{an}$ 은 다음 특성방정식의 근이다.

$$\begin{aligned} a^2(a+1)(\nu+1) [J_a(\xi_{an}) - \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an})] \\ - a^2 \xi_{an}(\nu+1) [J_{a-1}(\xi_{an}) - \tilde{c}_{an} I_{a-1}(\xi_{an})] \\ + a \xi_{an}^2 [J_a(\xi_{an}) + \tilde{c}_{an} I_a(\xi_{an})] \\ - \xi_{an}^3 [J_{a-1}(\xi_{an}) + \tilde{c}_{an} I_{a-1}(\xi_{an})] = 0 \end{aligned}$$

식 (7)에서  $c$ 는 모드감쇠계수이며,

$$p = \left[ P_{0m} \phi_{0m} + \sum_{n,m=1}^{\infty} P_{nm} \phi_{nm} \cos(n\theta - \tau_{nm}) \right] \times \cos \lambda T_0$$

로 두고, 식 (12), (11)과

$$w_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_{nm}(T_0, T_1, \dots) \phi_{nm} e^{i n \theta}$$

을 대입하여  $r \phi_{kl} e^{-ik\theta}$ 를 곱하고 양변을  $r=0$ 에서 1까지,  $\theta=0$ 에서  $2\pi$ 까지 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} D_0^2 H_{kl} + \omega_{kl}^2 H_{kl} = & -2i\omega_{kl} [(D_1 A_{kl} + c_{kl} A_{kl}) e^{i\omega_{kl} T_0} \\ & - (D_1 \overline{B}_{kl} + c_{kl} \overline{B}_{kl}) e^{-i\omega_{kl} T_0}] \\ & + \frac{1}{2} P_{kl} [e^{i\lambda T_0} + e^{-i\lambda T_0}] \\ & + \sum_{p,n,c=-\infty}^{\infty} \sum_{d,m,q=1}^{\infty} \Gamma(kl, cd, nm, pq) \\ & \times \sum_{j=1}^8 S_j e^{i\lambda_j T_0} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Gamma(kl, cd, nm, pq) = & \sum_{\beta=1}^{\infty} G(nm, pq, ab) \\ & \times \int_0^1 r \phi_{kl} \hat{E}(cd, ab) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}(cd, pq) = & \frac{\phi''_{cd}}{r} \left( \psi'_{ab} - \frac{a^2}{r} \psi_{ab} \right) \\ & + \frac{\psi''_{ab}}{r} \left( \phi'_{cd} - \frac{c^2}{r} \phi_{cd} \right) \\ & + \frac{2ac}{r^2} \left( \psi'_{ab} - \frac{1}{r} \psi_{ab} \right) \left( \phi'_{cd} - \frac{1}{r} \phi_{cd} \right) \end{aligned}$$

$$a = k - c, \quad p = k - c - n$$

$$S_1 = A_{cd} A_{nm} A_{pq}, \quad S_2 = A_{cd} A_{nm} \overline{B}_{pq}$$

$$S_3 = A_{cd} \overline{B}_{nm} A_{pq}, \quad S_4 = B_{cd} A_{nm} A_{pq}$$

$$S_5 = \overline{B}_{cd} \overline{B}_{nm} \overline{B}_{pq}, \quad S_6 = \overline{B}_{cd} \overline{B}_{nm} A_{pq}$$

$$S_7 = \overline{B}_{cd} A_{nm} \overline{B}_{pq}, \quad S_8 = A_{cd} \overline{B}_{nm} \overline{B}_{pq}$$

$$\Lambda_1 = \omega_{cd} + \omega_{nm} + \omega_{pq}, \quad \Lambda_2 = \omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq}$$

$$\Lambda_3 = \omega_{cd} - \omega_{nm} + \omega_{pq}, \quad \Lambda_4 = -\omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq}$$

$$\Lambda_5 = -\omega_{cd} - \omega_{nm} - \omega_{pq}, \quad \Lambda_6 = -\omega_{cd} - \omega_{nm} + \omega_{pq}$$

$$\Lambda_7 = -\omega_{cd} + \omega_{nm} - \omega_{pq}, \quad \Lambda_8 = \omega_{cd} - \omega_{nm} - \omega_{pq} \quad \lambda = \omega_{11} + \varepsilon\sigma$$

식 (13)은 우변에서  $e^{\pm i\omega_{kl}T_0}$ 의 계수들이 0이 되는 다음과 같은 가해조건을 가진다.

$$\begin{aligned} & -2i\omega_{kl}(D_1 A_{kl} + c_{kl}A_{kl}) \\ & + A_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klnm} (A_{nm} \bar{A}_{nm} \right. \\ & + B_{nm} \bar{B}_{nm}) - \gamma_{klkl} A_{kl} \bar{A}_{kl} \left. \right\} \\ & + 2(1 - \delta_{k0}) B_{kl} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} A_{km} \bar{B}_{km} \right. \\ & - \hat{\gamma}_{klkl} A_{kl} \bar{B}_{kl} \left. \right\} + N_{kl}^A + R_{kl}^A = 0 \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2i\omega_{kl}(D_1 \bar{B}_{kl} + c_{kl} \bar{B}_{kl}) \\ & + \bar{B}_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{klnm} (A_{nm} \bar{A}_{nm} \right. \\ & + B_{nm} \bar{B}_{nm}) - \gamma_{klkl} B_{kl} \bar{B}_{kl} \left. \right\} \\ & + 2(1 - \delta_{k0}) \bar{A}_{kl} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} A_{km} \bar{B}_{km} \right. \\ & - \hat{\gamma}_{klkl} A_{kl} \bar{B}_{kl} \left. \right\} + N_{kl}^B + R_{kl}^B = 0 \quad (14b) \end{aligned}$$

여기서  $\delta$ 는 Kronecker delta이며,  $R_{kl}^{A,B}$ 는 내부공진에서 기인하는 항이고,  $N_{kl}^{A,B}$ 는 외부가진에서 기인하는 항이며,  $\gamma_{klnm}$ 와  $\hat{\gamma}_{klnm}$ 은 다음과 같이 정의되는 상수이다.

$$\begin{aligned} \gamma_{klnm} &= \Gamma(kl, kl, nm, -nm) \\ &+ \Gamma(kl, -nm, kl, nm) + \Gamma(kl, nm, -nm, kl) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{klnm} &= \Gamma(kl, km, km, -kl) \\ &+ \Gamma(kl, -kl, km, km) + \Gamma(kl, km, -kl, km) \end{aligned}$$

식 (14)는 이 식에 해당하는 Sridhar 등<sup>(4)</sup>의 식 (31)과는 현저히 다르다. 이 현저한 차이가 장차의 수치결과에 어떤 영향을 미칠지 매우 궁금하다.

가진진동수  $\lambda$ 가  $\omega_{11}(=21.2604)$ 에 가까울 경우, 이탈변수(detuning parameter)  $\sigma$ 를 다음과 같이 도입하자.

식 (14)에서  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ 을 식 (15)와 같은 극좌표 표현으로 바꾸고 실수부와 허수부로 분리하면 식 (16)과 같은 상미분방정식을 얻는다.

$$A_{nm} = \frac{1}{2} a_{nm} e^{ia_{nm}}, \quad B_{nm} = \frac{1}{2} b_{nm} e^{ib_{nm}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl}(a_{kl}' + c_{kl}a_{kl}) \\ & - \frac{1}{4}(1 - \delta_{k0}) b_{kl} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} a_{km} b_{km} \\ & \quad \times \sin(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) \\ & - \frac{1}{4} \delta_{(k0)(11)} P_{11} \sin \mu_{11} = 0 \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl}(b_{kl}' + c_{kl}b_{kl}) \\ & + \frac{1}{4}(1 - \delta_{k0}) a_{kl} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} a_{km} b_{km} \\ & \quad \times \sin(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) \\ & - \frac{1}{4} \delta_{(k0)(11)} P_{11} \sin \mu_{11} = 0 \quad (16b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl} a_{kl} a_{kl}' \\ & + \frac{1}{8} a_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{klnm} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) - \gamma_{klkl} a_{kl}^2 \right\} \\ & + \frac{1}{4}(1 - \delta_{k0}) b_{kl} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} a_{km} b_{km} \right. \\ & \quad \times \cos(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \hat{\gamma}_{klkl} a_{kl} b_{kl} \left. \right] \\ & + \frac{1}{4} \delta_{(k0)(11)} P_{11} \cos \mu_{11} = 0 \quad (16c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega_{kl} b_{kl} b_{kl}' \\ & + \frac{1}{8} b_{kl} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{klnm} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) - \gamma_{klkl} b_{kl}^2 \right\} \\ & + \frac{1}{4}(1 - \delta_{k0}) a_{kl} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\gamma}_{klkm} a_{km} b_{km} \right. \\ & \quad \times \cos(\alpha_{km} - \beta_{km} - \alpha_{kl} + \beta_{kl}) - \hat{\gamma}_{klkl} a_{kl} b_{kl} \left. \right] \\ & + \frac{1}{4} \delta_{(k0)(11)} P_{11} \cos \mu_{11} = 0 \quad (16d) \end{aligned}$$

여기서 '은  $T_1$ 에 대한 미분을 나타내고,

$$\mu_{11}^a = \sigma T_1 + \tau_{11} - \alpha_{11}$$

$$\mu_{11}^b = \sigma T_1 - \tau_{11} - \beta_{11}$$

이다. 정상상태에서  $a_{kl}' = b_{kl}' = 0$ 이므로,  $kl \neq 11$ 인 경우 식 (16a)와 (16b)에서  $a_{kl} = b_{kl} = 0$ 이다.  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$ 이 0이 아닌 해가 존재한다고 가정하면, 식 (16a)를  $b_{kl}$ 로 나누고 식 (16b)를  $a_{kl}$ 로 나누어 더하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{c_{kl}(a_{kl}^2 + b_{kl}^2)}{a_{kl}b_{kl}} = 0 \quad (17)$$

감쇠  $c_{kl}$ 이 양인 경우, 식 (17)을 만족하는 0이 아닌 실수  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$ 은 존재하지 않는다. 따라서  $a_{kl} = b_{kl} = 0$  ( $kl \neq 11$ )인 해만이 존재하고, 식 (16)으로부터  $kl=11$ 일 때 다음과 같은 4개의 자율상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$a_{11}' - c_{11}a_{11} + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \sin \mu_{11}^a \quad (18a)$$

$$b_{11}' - c_{11}b_{11} + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \sin \mu_{11}^b \quad (18b)$$

$$a_{11}\mu_{11}^{a'} = \sigma a_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{8\omega_{11}} a_{11}(a_{11}^2 + 2b_{11}^2) + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \cos \mu_{11}^a = 0 \quad (18c)$$

$$b_{11}\mu_{11}^{b'} = \sigma b_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{8\omega_{11}} b_{11}(b_{11}^2 + 2a_{11}^2) + \frac{P_{11}}{4\omega_{11}} \cos \mu_{11}^b = 0 \quad (18d)$$

정상상태응답은 식 (18)의 평형해( $a_{kl}' = b_{kl}' = \mu_{11}^{a'} = \mu_{11}^{b'} = 0$ )로부터 구해지는데,  $w$ 를 식 (4a)와 (15)를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$w = w_0 + O(\varepsilon)$$

여기서,

$$w_0 = \phi_{11} \{ a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a + \theta + \tau_{11}) + b_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^b - \theta - \tau_{11}) \} \quad (19)$$

식 (19)의 근사해는 위상속도(phase velocity)가  $\lambda$ 이며, 진폭이 각각  $a_{11}\phi_{11}$ 과  $b_{11}\phi_{11}$ 인 두 진행파의 중첩을 나타내고 있다. 이 두 파는 시간이 경과함에 따라 각각 시계방향과 반시계방향으로 진행하는 파이다.  $\mu_{11}^a$ 와  $\mu_{11}^b$ 는 각 파의 시간( $t$ )과 관련된 위상각을,  $\tau_{11}$ 은 공간( $\theta$ )과 관련된 위상각을 나타낸다.

식 (18)에서 정상상태응답이  $a_{11} = b_{11}$ 인 경우에는  $\mu_{11}^a = \mu_{11}^b$ 가 되고 이 경우 식 (19)는 다음과 같이 표현된다.

$$w_0 = 2\phi_{11}a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a) \cos(\theta + \tau_{11}) \quad (20)$$

식 (20)의 응답은 모드형상(mode shape)이  $\phi_{11} \cos(\theta + \tau_{11})$ 이고 진동수가  $\lambda$ 인 진동 축, 고유진동수  $\omega_{11}$ 에 해당하는 비대칭모드와 유사한 정상파를 나타내고 있다. 달리 말하자면, 식 (19)에서의 두 진행파가 중첩되어 정상파가 된 것이다.

식 (18)에서 정상상태응답이  $a_{11} \neq b_{11}$ 인 경우에는 두 진행파가 중첩된 결과는 진행파가 되어 시간이 경과함에 따라 nodal 선이 회전한다.

수치결과를 위해 본 연구에서는

$$(\nu, \varepsilon, \varepsilon c, \varepsilon P_{11}) = (1/3, 0.001067, 0.01, 8)$$

인 경우를 생각하였다. 식 (13)의  $\Gamma(kl, cd, nm, pq)$ 를 통해  $\gamma_{1111} = -772.0455$ 을 구하였다. 이 값을 이용하여 식 (18)의 정상상태응답  $a_{11}$ ,  $b_{11}$ 을  $\varepsilon\sigma$ 의 함수로서 구하여 Fig. 2에 나타내었다. SS1, SS2, US1, US2는  $a_{11} = b_{11}$ 인 응답 축, 정상파를 나타내며, ST1, UT1, UT2는  $a_{11} \neq b_{11}$ 인 응답 축, 진행파를 나타내고 있다. 실선은 안정한 응답을, 점선

은 불안정한 응답을 나타낸다.

정상파에 해당하는 응답은 US1이 불안정하다는 점을 제외하면 Duffing 진동계의 응답과 일치하고 있다. 유일하게 안정한 진행파에 해당하는 응답 (ST1A, ST1B)는  $\{a_{11}, b_{11}\}$ 이나  $\{b_{11}, a_{11}\}$ 을 나타낸다.

Fig. 2는  $\epsilon\sigma < 0.025$ 의 경우에는 정상파가,  $0.025 < \epsilon\sigma < 0.095$ 의 경우에는 진행파가 실재함을 보여주고 있다. 또한  $0.095 < \epsilon\sigma < 0.42$ 의 경우에는 정상파와 진행파가 공존하며,  $0.42 < \epsilon\sigma$ 의 경우에는 정상파만 실재한다.

Sridhar 등<sup>(4)</sup>의 해석은 Duffing 진동계의 응답과 일치하는 정상파의 존재만 예측해주고 있다. 본 연구결과와의 주목할만한 차이는 식 (14)와 그들의 식 (31)의 차이에서 비롯한 것으로 추측된다.

### 3. 결론

조화가진을 받는 원판의 비선형 비대칭진동응답을 연구하기 위하여 비대칭모드의 주공진을 조사하였다. 그 결과 Sridhar 등<sup>(4)</sup>의 가해조건에 오류가 있음을 발견하고 이 조건을 수정하였다. 결국 Sridhar 등<sup>(4)</sup>이 정상파의 존재만 예측한 것과는 달리, 정상파와 진행파가 공존할 수 있음을 확인하였다.

### 후 기

이 연구는 2000학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 것임.

### 참고문헌

(1) Sridhar, S. Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-Linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric

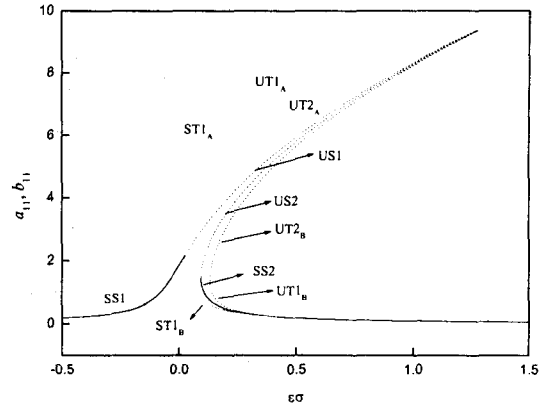


Fig. 2 Variations of the amplitudes with detuning parameter  $\epsilon\sigma_2$  when  $\epsilon P_{22}=8$ .  
—, stable; - - -, unstable.

Responses of Circular Plates.", Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, No. 3, pp. 359~373.

(2) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, No. 2, pp. 279~292.  
(3) Lee, W. K. and Kim, C. H., 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 62, pp. 1015~1022.  
(4) Sridhar, S. Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-Linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 59, No. 2, pp. 159~170.