

비선형 히스테리시스 진동시스템의 분기해석

송 덕근* · 최진권* · 장서일**

Bifurcation Analysis of a Non-linear Hysteretic Oscillating System

Deog-Geun Song, Jin-Kwen Choi and Seo Il Chang

Key Words : Viscoelastic Damper(점탄성 댐퍼), Nonlinear Model(비선형 모델), Jump Phenomena (점프 현상), Discontinuous Response(불연속 반응), Bifurcation Set(분기 셋)

ABSTRACT

Three kinds of viscoelastic damper model, which has a non-linear spring as an element is studied analytically and numerically. The behavior of the damper model shows non-linear hysteresis curves which is qualitatively similar to those of real viscoelastic materials. The motion is governed by a non-linear constitutive equation and an additional equation of motion. Harmonic balance method is applied to get analytic solutions of the system. The frequency-response curves show that multiple solutions co-exist and that the jump phenomena can occur. In addition, it is shown that separate solution branch exists and that it can merge with the primary response curve. Saddle-node bifurcation sets explain the occurrences of such non-linear phenomena.

1. 서론

점탄성 물질⁽¹⁾⁽²⁾은 시간-의존적 반응일 뿐 아니라 온도, 주파수와 변형률에 의해서도 그 반응이 변하게 되어 구성 방정식으로 정확히 표현하기가 매우 어렵다. 그러나 점탄성 물질의 반응은 매우 중요하며 이러한 점탄성 물질의 모델링과 이러한 모델을 갖는 진동계의 해석은 절실히 요구된다. 이러한 점탄성 물질의 거동을 기존의 2-계수 모델로 표현하는 데에는 문제점 및 어려움이 있어 3-계수 모델로 점탄성 물질을 표현하였다. 3-계수 모델에서 비선형성을 표현하기 위하여 하나의 스프링을 비선형 스프링으로 대체하여 점탄성 물질을 모델링 한 후에 여러 가지 수치해석 방법들을 이용하여 점탄성 물질의 거동을 수치화한다.

점탄성 댐퍼는 점성과 탄성이 결합된 형태이기에 그 모델링은 간단한 형태가 아니다. 또한 점탄성 물

질은 비선형성을 나타내므로 초기 조건에 따라 반응은 큰 차이를 나타내게 된다. 이러한 비선형 댐퍼의 모델링은 먼저 간단한 2-계수 모델인 Maxwell과 Kelvin모델을 통하여 검토하고 차후 Maxwell과 Kelvin모델의 조합 형태인 3-계수 모델을 이용하여 점탄성 물질의 성질을 살펴보았다. 3-계수 모델의 한 요소를 비선형 요소로 교체하여 비선형 3-계수 모델로 만들고, 이렇게 만들어진 비선형 점탄성 댐퍼를 조화균형법(Harmonic Balance Method)⁽³⁾을 이용하여 해석하였다.

2. 비선형 댐퍼의 모델링과 해석

점탄성 물질은 스프링과 대쉬팟(Dash-pot)이 조합된 형태로 모델링 할 수 있다. 이때 이 모델에서 시스템의 강성을 나타내는 스프링을 비선형 요소로 대체하여 점탄성 물질의 비선형성⁽⁴⁾⁽⁵⁾을 나타낼 수 있다. Kelvin Model, Maxwell Model과 3-Parameter Model의 경우 각각의 스프링 요소를 비선형 형태로 변환시켜서 점탄성 물질의 비선형성을 나타낸다. 점탄성의 댐퍼 중에 먼저 Kelvin 댐퍼

* 서울시립대 환경공학부 대학원

** 서울시립대 환경공학부

는 스프링과 대쉬팟의 병렬 구조로 이루어졌으며, Maxwell 댐퍼는 스프링과 대쉬팟의 직렬 구조로 이루어져 있고 3-Parameter 댐퍼는 이 두 가지가 조합한 형태이다. 여기서 선형적인 스프링 요소를 비선형 요소로 대체하여 비선형적인 특성을 나타낼 수 있다. 비선형 Kelvin 댐퍼는 Fig. 1에서 보듯이 스프링 요소인 S2가 받는 힘은 F_{S2} 라하고, 대쉬팟 요소인 D2가 받는 힘은 F_{D2} 라 할때,

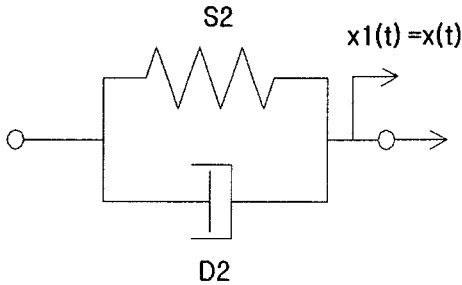


Fig. 1 Kelvin model

댐퍼가 받는 힘 D는 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{S2} = d_1 x + d_3 x^3, \quad F_{D2} = c \dot{x}, \quad (1)$$

$$D = F_{S2} + F_{D2}$$

동적 힘-변위 관계를 보기 위하여 댐퍼에 조화변형 ($x = X_0 \sin \omega t$)가하여 Fig. 2와 같은 결과를 얻을 수 있다. Fig. 2의 경우는 Kelvin 모델에서 경성반응 (Hardning)의 경우이고 주파수가 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 증가한다.

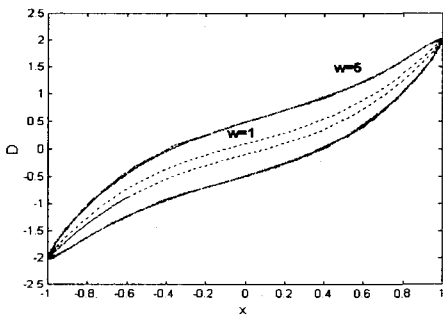


Fig. 2 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies (Kelvin model)
 $d_1=1, d_3=1, c=0.1, X_0=1$

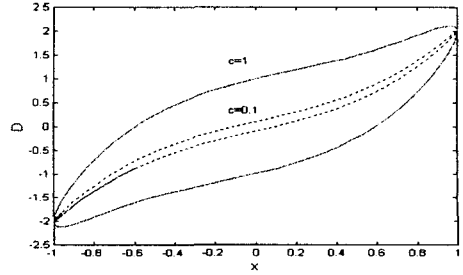


Fig. 3 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants (Kelvin model)

$$d_1=1, d_3=1, X_0=1, w=1$$

댐핑상수의 값이 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양도 증가하는 것을 Fig. 3에서 볼 수 있다.

다음으로 Maxwell 모델을 해석하였으며 모델의 모습은 Fig. 4와 같다

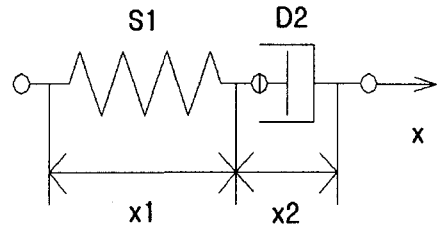


Fig. 4 Maxwell model

Maxwell 모델의 경우 Fig. 4에서 보듯이 댐퍼에 걸리는 힘을 D라 할때, 스프링 요소와 대쉬팟 요소는 각각 x_1 과 x_2 의 변형을 받게 된다. 원점 대칭이면서 비선형성을 나타내는 다항식 형태의 새로운 함수를 다음식과 같이 가정할 수 있다.

$$x_1 = f(D) = e_1 D + e_3 D^3 \quad (2)$$

Maxwell 댐퍼에서 스프링 요소인 S1이 받는 힘을 F_{S1} 라 하고, 대쉬팟 요소인 D2가 받는 힘을 F_{D2} 라 할 때, 댐퍼가 받는 힘 D는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = c \dot{x} - c \left(\dot{D} \frac{df}{dD} \right) \quad (3)$$

같은 방법으로 w 와 x 의 관계를 구하고 그래프를 그리면 Fig. 5과 같이 나타낼 수 있다.

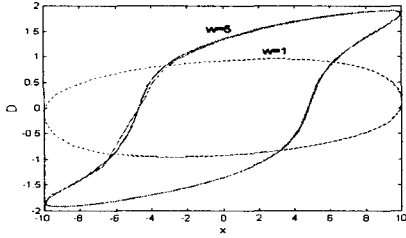


Fig. 5 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies (Maxwell mode)
 $e_1=1, e_3=1, c=0.1, X_0=1$

Fig. 5에서 보듯이 주파수가 변함에 따라 비선형성을 나타내기도하고 나타내지 않기도 한다. 또한 w 가 일정하고, c 가 증가할 때 D 는 다음 **Fig. 6**과 같이 나타난다.

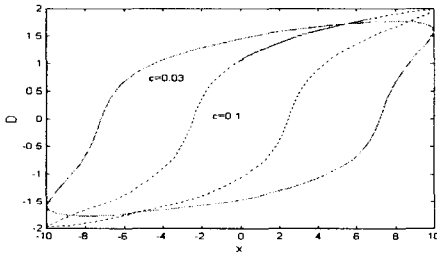


Fig. 6 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants (Maxwell model)
 $e_1=1, e_3=1, c=0.1, X_0=1$

다음으로 3-Parameter 모델을 해석하였으며 모델의 모습은 **Fig. 7**과 같다

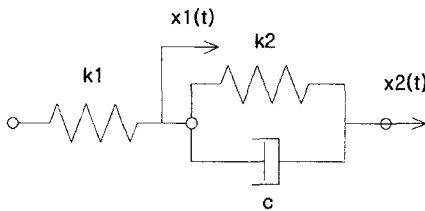


Fig. 7 3-Parameter model

Fig. 7과 같은 비선형 3-Parameter 모델을 댐퍼가 받는 힘 D 에 관하여 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$D + c \frac{df}{dD} D' + k_2 f(D) = k_2 x + c \dot{x} \quad (4)$$

w 가 증가할 때 동적 힘-변형 관계는 **Fig. 8**과 같이

나타낼 수 있다. 주파수가 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 줄어든다. 또한 w 가 일정할 때 D 는 다음 **Fig. 9**과 같이 나타나며, 댐퍼의 값이 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 줄어든다.

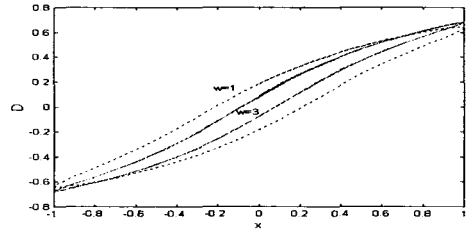


Fig. 8 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies (3-Parameter model)
 $d_1=1, d_3=1, c=3, k_2=1, X_0=1$

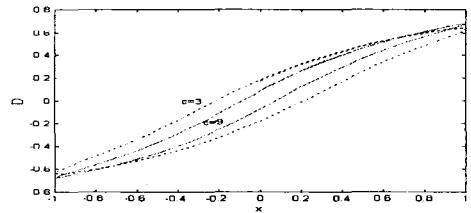


Fig. 9 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants (3-Parameter model)
 $d_1=1, d_3=1, w=1, k_2=1, X_0=1$

3. 비선형 Kelvin, Maxwell, 3-Parameter 댐퍼를 갖는 진동 시스템의 모델링과 해석

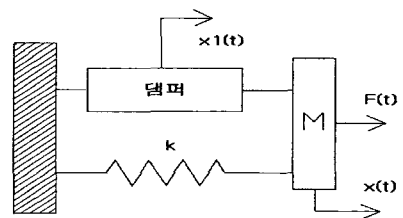


Fig. 10 Nonlinear Damper Model System

Fig. 10과 같이 질량 M 에 대하여 스프링 k 와 댐퍼가 병렬로 연결된 시스템들을 해석하였다. **Fig. 1**의 Kelvin댐퍼를 **Fig. 10**의 시스템의 댐퍼에 대치한 후에 운동 방정식을 세우면 다음 식과 같은 2차 상미분 방정식으로 나타낼 수 있고,

$$m \ddot{x} + kx + D = F_c \cos wt \quad (5)$$

조화 균형법을 적용하기 위하여 x 와 D 를 다음 식과 같이 가정한다.

$$x = X_c \cos \omega t + X_s \sin \omega t \quad (6)$$

$$D = D_c \cos \omega t + D_s \sin \omega t$$

가정된 x 와 D 를 구성방정식과 운동방정식에 대입하고 정리한 후, X_c 와 X_s 를 다음 식(7)과 같이 치환하여 풀면,

$$X_c = X \cos \Phi, \quad X_s = X \sin \Phi \quad (7)$$

X 와 ω 의 관계를 구할수 있다. c 가 일정하고 F_c 가 변할 때 X 와 ω 의 관계를 나타내면 Fig. 11과 같다.

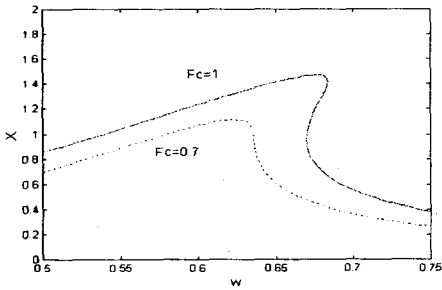


Fig. 11 Bifurcation diagram
(Kelvin Model system)
 $m=10, d_1=d_3=1, k=2, F_c=1$

Fig. 11에서 보면 F_c 가 증가할수록 X 의 경성반응 (Hardening)이 커지며, 도약현상이 일어날 수 있는 ω 의 값이 증가하는 것은 관찰할 수 있다. 또한 식 (6)에서 얻을 수 있는 X_c 와 X_s 를 D_c 와 D_s 에 관하여 정리할 수 있고, 앞의 경우와 같은 방법으로 D_0 와 ω 의 관계를 나타내면 Fig. 12와 같이 나타낼 수 있다. F_c 가 일정 할 때 댐핑상수에 의한 차이를 나타낸 경우이다.

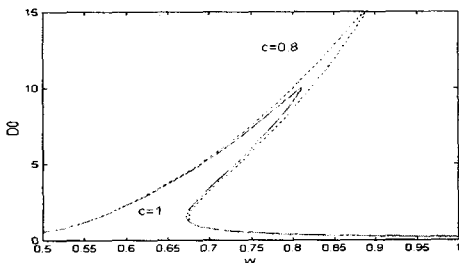


Fig. 12 Bifurcation diagram
(Kelvin Model System)
 $m=10, d_1=d_3=1, k=2, F_c=1$

Fig. 4의 Maxwell 댐퍼를 Fig. 10의 시스템의 댐퍼에 대치한 후에 운동 방정식을 세우고 Kelvina모델과 같이 조화균형법을 적용하여 풀면 X 와 ω 의 관계를 나타낼수 있고, 그래프는 Fig. 13과 같다.

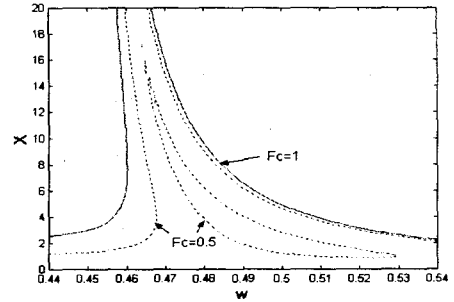


Fig. 13 Bifurcation diagram
(Maxwell Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, F_c=1, k=2, c=1$

Fig. 13에서 보듯이 F_c 가 증가할수록 연성반응 (softening)반응을 나타내며, 무한대의 공진 현상 (unbounded response)이 나타난다. 또한 F_c 가 0.1인 경우에는 내부에 새로운 폐곡선이 나타남을 볼 수 있다. 또한 D_0 와 ω 의 관계를 나타낼수 있고 그래프는 Fig. 14과 같이 나타낼 수 있다.

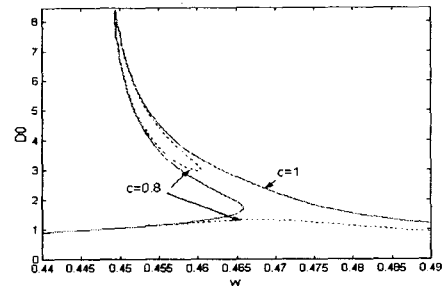


Fig. 14 Bifurcation diagram
(Maxwell Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, k=2, F_c=1$

Fig. 14에서 보듯이 D_0 의 값은 Kelvin의 경우와 마찬가지로 c 가 증가함에 따라 D_0 의 공진 현상이 증가하나 연성반응이 나타남을 볼 수 있다.

마지막으로 Fig. 7의 3-Parameter댐퍼를 Fig. 10의 시스템의 댐퍼에 대치한 후에 운동 방정식을 세우고 Kelvin모델과 같이 조화균형법을 적용하여 풀면 X 와 ω 의 관계를 나타낼수 있고, 그래프는 Fig. 15와 같다.

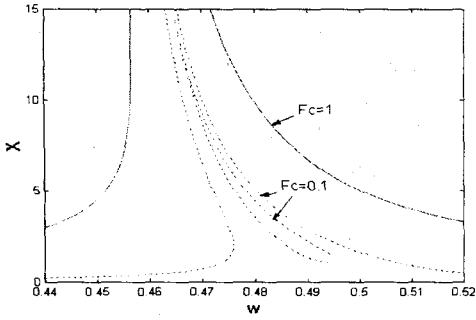


Fig. 15(a) Bifurcation diagram
 (3-parameter Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, k=2, k_2=1, c=1$

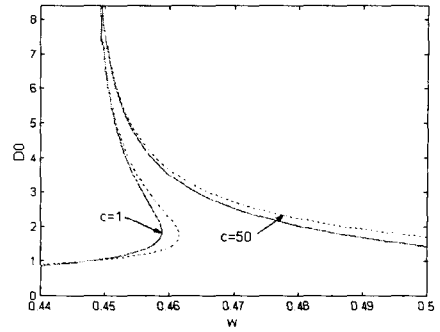


Fig. 16(b) Bifurcation diagram
 (3-Parameter Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, k=2, k_2=1, F_c=1$

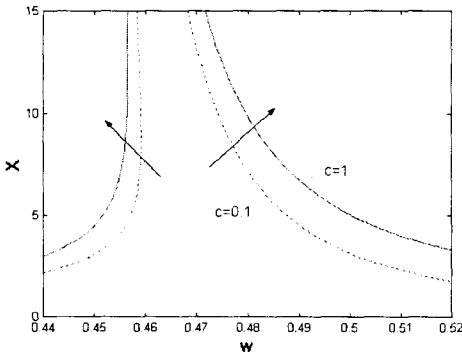


Fig. 15(b) Bifurcation diagram
 (3-parameter Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, k=2, k_2=1, F_c=1$

또한 D_0 와 w 의 관계를 나타내면 다음 Fig. 16과 같이 나타낼 수 있다.

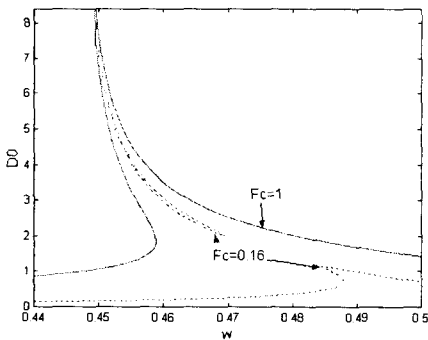


Fig. 16(a) Bifurcation diagram
 (3-Parameter Model System)
 $m=10, e_1=e_3=1, k=2, k_2=1, c=1$

4. 결과 및 고찰

비선형 댐퍼를 갖는 시스템의 반응은 선형 댐퍼의 반응과 여러 가지로 다르게 나타난다. 먼저 같은 주파수에 대하여 초기 값에 따라 다른 반응이 일어나며, 또한 도약 현상이 발생하기도 한다. 이러한 도약 현상은 분기 셋(Bifurcation Set)⁽⁶⁾을 가지고 해석할 수 있다. 다음 그래프들의 분기셋은 안장점 분기에 관한 것이며 도약현상이 일어날 수 있는 조건을 보여주고 있다.

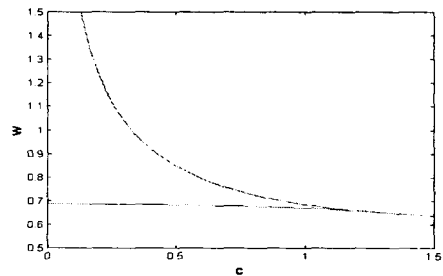
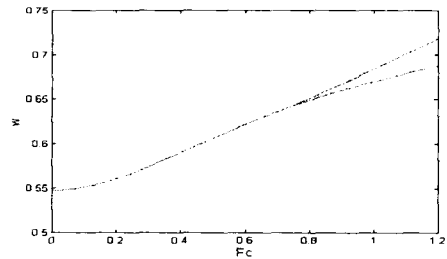


Fig. 18 Bifurcation Set in F_c & c vs w Plane
 (Kelvin Model System)

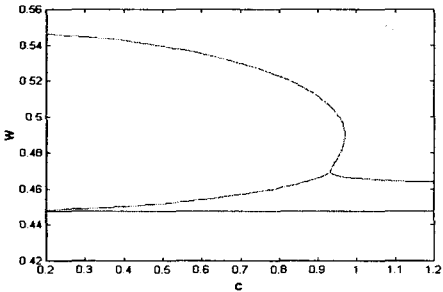
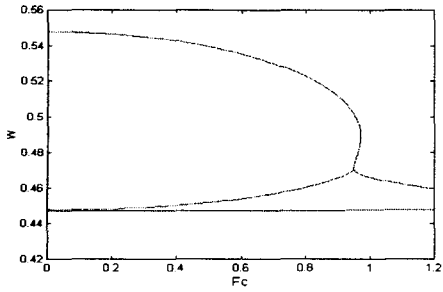


Fig. 19 Bifurcation Set in F_c & c vs w Plane (Maxwell Model System)

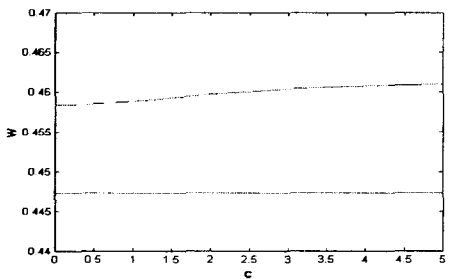
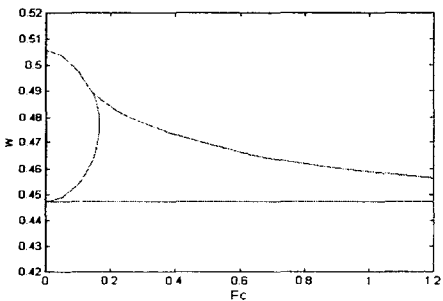


Fig. 20 Bifurcation Set in F_c & c vs Plane (3-Parameter Model System)

참고 문헌

(1) Sun, C. T. and Lu, Y. P., 1995, Vibration Damping of Structural Elements, Prentice Hall.

(2) Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., 1985, Vibration Damping, John Wiley & Sons, pp.67-69.

(3) Jordan, D. W. and Smith, P., 1999, Nonlinear Ordinary Differential Equations, third ed., Oxford University Press.

(4) 양성영, 1999, "비선형 히스테리시스 댐퍼를 갖는 진동계의 해석", 서울시립대학교 석사 논문.

(5) Gandhi, F. and Chopra, I., 1996, "A time-domain non-linear viscoelastic damper model", Smart Materials and Structures. 5, pp.517-528.

(6) Seydel, R., 1988, From Equilibrium to Chaos: Pratical Bifurcation and Stability Analysis, Elsevier, New York.