

탄성지지된 외팔 송수관의 동적안정성

0정승호*, 류봉조**, 송오섭***, 이종원****

Dynamic Stability of an Elastically Restrained Cantilevered Pipe

Seong-Ho Jung, Bong-Jo Ryu, Oh-Seop Song and Jong-Won Lee

ABSTRACT

The paper presents the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid and having an intermediate translational linear spring. The translational linear spring can be located at an arbitrary position. Governing equations are derived by energy expressions, and numerical technique using Galerkin's method is applied to discretize the equations of small motion of the pipe. Effects of linear spring supports on the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid are fully investigated for various locations and magnitudes of the translational linear spring.

1. 서론

내부유동유체에 의한 가는 송수관의 진동과 동적안정성에 관한 연구는 유체 유발 진동(Fluid induced vibration)의 한 예로써, 열교환기 튜브, 젯 펄프, 제어 튜브들 등에서 그 예를 들수 있다.

사람들의 일상생활에서도 발견될 수 있는 정원 호스(garden-hose)나 소방호스(fire-hose)등의 심한 요동 또한 이러한 유체 유발 진동의 문제와 밀접한 관련이 있다. 이미 오래전부터 잘 알려진 현상들임에도 불구하고 실제적인 송수관 진동이나 안정성에 관한 연구의 역사는 그리 오래되지 않았고, Ashley Haviland⁽¹⁾에 의한 Trans-Arabian 송수관의 진동문제를 규명하려는 시도로부터 발전되어져 왔다. 그후 Benjamin⁽²⁻³⁾은 2자유도계인 분절된 송수관의 동적안정성 문제를 경계조건의 변화(양단 단단지지, 한단고정-타단자유)에 따라 연구하였다.

Gregory와 Paidoussis⁽⁴⁻⁵⁾는 내부유동유체에 의한 외팔 송수관의 진동에 관한 이론 및 실험적 연구를 하였는데, 이들 또한 Benjamin이 최초로 발견한 "Benjamin현상"(외팔 송수관의 자유단을 연필 끝이

나 손가락 끝으로 가만히 지지하고 있으면, 송수관이 좌굴을 일으키는 현상)에 대한 재검증을 하였다.

이러한 연구들은 계속되어 송수관에 부착된 밸브 등을 집중 부가질량으로 간주한 연구들도 이루어져 왔다. Hill과 Swanson⁽⁶⁾은 내부유동유체에 의한 동적안정성에 미치는 복수 부가질량의 영향에 대하여 연구하였고, Sugiyama와 Noda⁽⁷⁾는 분절된 수평파이프가 집중질량을 갖는 경우, 집중질량의 위치 및 크기, 파이프의 내부 감쇠가 동적안정성에 미치는 영향을 조사하였다. 그후 류봉조와 그의 공동연구자들⁽⁸⁾은 부가질량을 갖는 유연한 외팔 파이프의 동적안정성과 진동제어에 관한 연구를 하였다.

이러한 부가질량이 있는 연구들과 병행하여, 파이프 구조물들이 탄성지지되어 있는 경우에 대한 연구들도 이루어져 왔다.

Becker⁽⁹⁾는 한단고정-타단자유인 외팔 수평 파이프의 자유단이 스프링 지지되어 있는 경우, 스프링 상수의 변화가 계의 동적안정성에 미치는 영향을 연구하였고, Sugiyama⁽¹⁰⁾는 2자유도 분절된 수평 파이프가 부가질량과 파이프의 동적안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 그후 Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽¹¹⁾은 복수의 탄성스프링으로 지지된 수평 파이프의 동적안정성에 관한 이론 및 실험적 연구를 하였다. 위의 대부분의 연구들은 수평 파이

* 정회원, 한국원자력연구소

** 평생회원, 한밭대학교 기계공학부

*** 정회원, 충남대학교 기계공학과

**** 정회원, 충남대학교 기계공학과 대학원

프들로서 파이프의 자중에 의한 효과는 거의 고려치 않았고, 탄성지지된 파이프의 연구에 있어서도 스프링의 강성 변화에 의한 영향들을 주로 고려하였고, 위치변화는 단지 몇몇 특정위치에서만 조사된 연구들이었다.

최근 유체관련 가는 파이프 구조물이 진동과 동적안정성에 관한 상세한 연구결과들이 Paidoussis⁽¹³⁾에 의해 발표되었다.

따라서 본 논문에서는 탄성스프링지지되고 내부 감쇠와 자중효과를 고려한 외팔 수직 송수관의 동적안정성을 스프링위치 및 상수의 변화에 대해 조사하는데 연구목적이 있다.

2. 수학적 모델과 지배방정식

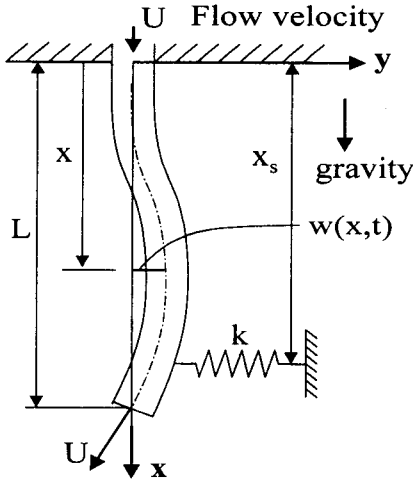


Fig. 1 Schematic of the vertical cantilevered pipe with an intermediate linear translational spring support.

Fig. 1은 병진 탄성스프링에 의해 지지되고, 유속 U 의 내부 유동유체에 의해 운동하는 외팔 수직 송수관의 모델을 보여준다.

Fig. 1 모델에 대한 운동방정식을 얻기 위해 다음과 같은 에너지 표현식을 사용한다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_f \left\{ U^2 + 2U \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^L mg(L-x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k w(x_s, t)^2 dx \quad (2)$$

$$\delta W_{nc, id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (3)$$

$$\delta W_f = -m_f U \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + U \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta w \Big|_{x=L} + m_f U^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (4)$$

식(1)-(4)에 있어서, m_p 와 m_f 는 각각 송수관과 유체의 단위길이당 질량을 나타내고, E 는 송수관의 영률, I 는 단면의 2차모멘트, m 은 $m_f + m_p$, g 는 중력가속도, H 는 Heviside 단위 계단함수를 나타낸다. 또한, E^* 는 점성저항계수(viscous resistance coefficient)를 나타낸다.

식(1)에서 (4)를 확장된 해밀톤 원리에 대입하고 변분을 정리한 후, 계산상의 편의를 위하여 다음과 같은 무차원화된 파라미터들과 좌표들

$$\beta = \frac{m_f}{m}, \quad u = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad \varphi = \frac{mgL^3}{EI},$$

$$\xi_s = \frac{x_s}{L}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad K = \frac{kL^3}{EI},$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5)$$

을 도입하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻게된다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varphi \left\{ \frac{\partial w}{\partial \xi} - (1-\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + K \delta(\xi - \xi_s) w(\xi, \tau) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^3} + \gamma \frac{\partial^4 w(1, \tau)}{\partial \xi^3 \partial \tau} = 0 \quad (8)$$

$$w(0, \tau) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (10)$$

이제 식(6)의 해 $w(\xi, \tau)$ 를 내부 유동유체가 없는 경우의 한단고정-타단자유의 경계조건을 만족시키는 고유함수(eigen-function)

$$\phi_j(\xi) = \cosh s_j \xi - \cos s_j \xi - \sigma_j (\sinh s_j \xi - \sin s_j \xi) \quad (11)$$

를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\tau) \phi_j(\xi) \quad (12)$$

여기서, s_j 는 외팔보의 j 번째 고유치(eigen-value)이며, σ_j 는 다음과 같다.

$$\sigma_j = \frac{\sinh s_j - \sin s_j}{\cosh s_j + \cos s_j} \quad (13)$$

식(12)로 가정된 해를 식(6)에 대입하여 Galerkin 적분을 최종 정리하면 다음과 같은 행렬형태의 방정식을 얻게된다.

$$[A] \{\ddot{a}\} + [B] \{\dot{a}\} + [C] \{a\} = \{0\} \quad (14)$$

여기서, $[A], [B], [C]$ 의 성분들은 다음과 같다.

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad (15)$$

$$B_{ij} = (s_j^4 \gamma) \delta_{ij} + 2u\beta \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi \quad (16)$$

$$C_{ij} = s_j^4 \delta_{ij} + \varphi \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi + (u^2 - \varphi) \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi + \varphi \int_0^1 \xi \phi_i \phi_j'' d\xi + K \phi_i(\xi_s) \phi_j(\xi_s) \quad (17)$$

식(14)는 고유치 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 1차 미분형태

$$\{\dot{Z}\} = [P]\{Z\} \quad (18)$$

로 변환되며, 여기서,

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} \dot{a} \\ a \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} -[V] & -[W] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[V] = [A]^{-1}[B], \quad [W] = [A]^{-1}[C] \quad (19)$$

이고, $[I]$ 는 단위행렬을 나타낸다.

이제 식(18)의 고유치를 λ_i 라 할 때, 송수관의 안정성은 이 고유치 λ_i 에 의해 지배되며 일반적으로 감쇠가 존재하는 경우의 고유치는 복소수 형태로 표현된다.

3. 수치해석 결과 및 검토

탄성 병진 스프링에 의해 지지되고, 내부 유동유체의 유속변화에 따른 송수관의 동적 안정성에 대한 수치해는 Galerkin방법에 의한 12항 근사해에 의해 결과를 얻었으며, 스프링이 없는 경우의 다른 문헌[Ref. 13]의 결과와 비교하여 근사한 일치를 보임으로써 본 논문의 수치해의 타당성을 검토하였다. 스프링이 없는 경우 $u_{cr}=7.38$ 로 이전의 연구결과와 일치함을 알 수 있었다.

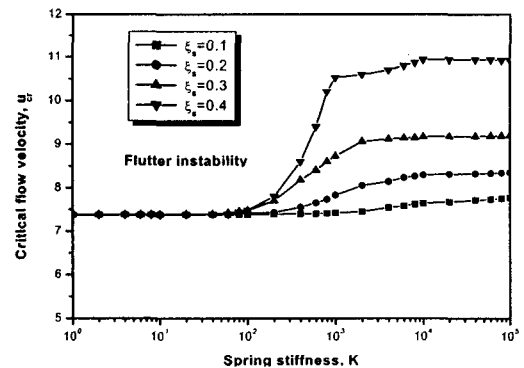


Fig. 2 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position ($\xi_s = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$).

Fig. 2는 무차원화된 스프링 위치 ξ_s 가 $\xi_s = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 일 때, 스프링 상수값의 변화에 따른 임계유속값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림을 통해 알 수 있는 것은 각각의 고정된 스프링의 위치에서 스프링 상수값이 증가될수록 임계유속값은

증가되며, 동일 스프링 상수값에서 스프링 위치가 고정단에서 멀어질수록 임계유속값이 증가된다는 것이다. 또한, Fig. 2에 나타난 스프링의 위치와 다양한 스프링상수값에 대해서 항상 플러터 형태의 불안정만이 발생됨을 알 수 있다.

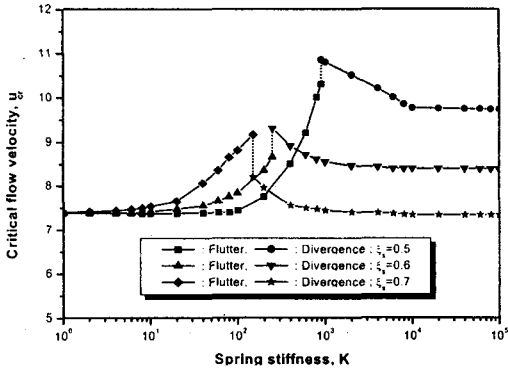


Fig. 3 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position ($\xi_s = 0.5, 0.6, 0.7$).

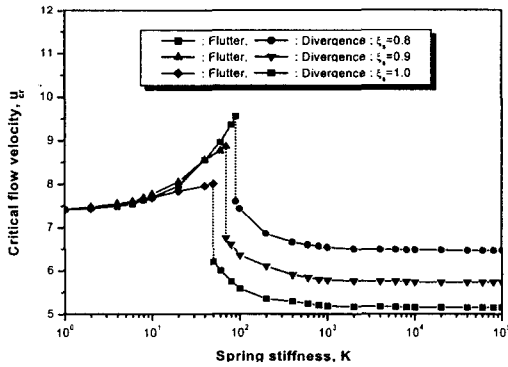


Fig. 4 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position ($\xi_s = 0.8, 0.9, 1.0$).

Fig. 3은 무차원화된 스프링 위치 ξ_s 가 $\xi_s = 0.5, 0.6, 0.7$ 일 때, 스프링 상수값의 변화에 따른 임계유속값의 변화를 나타낸 그림이다.

이 그림을 통해 알 수 있는 것은 각각의 고정된 스프링의 위치에서 스프링 상수값의 증가에 따라 송수관의 불안정 형태가 플러터 형태의 불안정에서 발산형태의 불안정으로 천이가 일어난다는 것이다. 즉, 그림에서 알 수 있듯이, $\xi_s = 0.5$ 와 $\xi_s = 0.6$

의 경우는 스프링 상수값의 증가에 따라 플러터를 일으키는 임계유속값이 증가되다가 특정 스프링 상수값에서 임계유속값이 상승점프되어 발산형태의 불안정을 일으킨다. 또한, 발산형태의 불안정이 일어나면, 스프링 상수값의 증가에 따라 임계유속값은 감소된다. 그러나, $\xi_s = 0.7$ 에 있어서는 스프링 상수값의 증가에 따라 불안정이 천이되는 현상은 $\xi_s = 0.5$ 와 $\xi_s = 0.6$ 의 경우와 동일하나, 플러터 불안정의 유속값에서 하강점프하여 발산형 불안정 임계유속값을 나타낸다.

Fig. 4도 스프링 위치 $\xi_s = 0.8, 0.9, 1.0$ 에서, 스프링 상수값의 증가에 따른 임계유속값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 경우도 $\xi_s = 0.7$ 의 경우에서와 같이 스프링 상수값이 $K = 1.0$ 부터 증가함에 따라 플러터 형태의 불안정에서 발산형 불안정으로 천이가 일어나고, 임계유속값이 점프하강하게 된다.

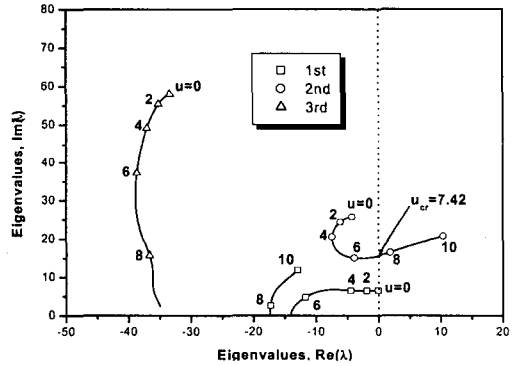


Fig. 5 Eigenvalue trajectories depending on the flow velocities ($\xi_s = 0.1, K = 10^3$).

Fig. 5와 Fig. 6은 어떤 특정 스프링 상수값과 스프링의 위치에서, 가장 낮은 처음 3개의 고유치의 변화를 보여주는 그림들이다.

먼저, Fig. 5의 경우는 유속값이 $u = 0$ 에서 증가됨에 따라 1차와 3차 모드는 안정함을 보여주지만, 2차 모드에 있어서는 $u_{cr} = 7.42$ 를 경계로 유속값이 증가됨에 따라 고유치의 실수부가 양(positive)의 값으로 변환되어 플러터 형태의 불안정을 일으킬 수 있다.

한편, Fig. 6의 경우는 유속값이 $u = 0$ 에서 증가됨에 따라 2차와 3차 모드에 있어서는 안정함을 보여주지만, 1차 모드에 있어서는 $u_{cr} = 6.35$ 에서 고유치의 실수부가 양으로, 고유치의 허수부가 영

으로 되는 발산형태의 불안정이 일어남을 알 수 있다.

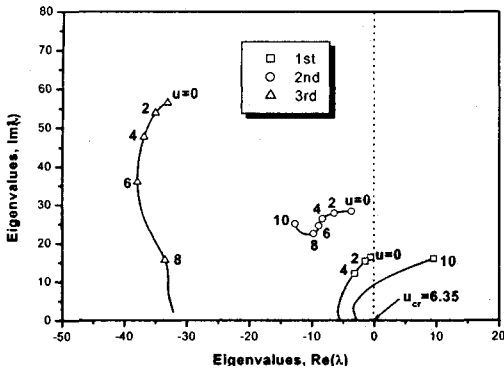


Fig. 6 Eigenvalue trajectories depending on the flow velocities ($\xi_s=0.9$, $K=10^2$).

4. 결론

탄성스프링 지지된 외팔 수직송수관의 동적안정성에 관한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 무차원화된 스프링의 위치 ξ_s 가 $\xi_s \leq 0.4$ 에서는 플러터 형태의 불안정만이 발생되며, 스프링 상수값이 증가함에 따라 임계유속값이 증가된다.
- (2) 그러나, $\xi_s = 0.5$ 이상에서는 스프링 상수값이 증가함에 따라 플러터에서 발산형태의 불안정으로의 천이가 일어난다. 또한, 발산형태의 불안정이 일어난 후에는 스프링 상수값의 증가에 따라 임계유속값은 감소된다.

참고문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.17, pp.229~232.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.457~486.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.487~499.

- (4) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(I. Theory) Proceedings of the Royal Society(London) Series A, Vol.293, pp.512~527.
- (5) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(I. Theory) Proceedings of the Royal Society(London) Series A, Vol.293, pp.528~542.
- (6) Hill, J. L. and Swanson, C. P., 1970, "Effect of Lumped Masses on the Stability of Fluid Conveying Tubes", Journal of Applied Mechanics, Vol.37, pp.494-497.
- (7) Sugiyama, Y. and Noda, T., 1981, "Studies on Stability of Two-Degree-of-Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid", Bulletin of the JSME, Vol.24, pp.1354-1362.
- (8) 류봉조, 정승호, 이종원, 2000, "유체유동에 의한 유연한 파이프의 불안정과 진동억제에 미치는 부가질량의 영향", 한국소음진동공학회지, 제10권, 제2호, pp.280-290.
- (9) Becker, O., 1979, "Zum Stabilitätsverhalten des durchströmten geraden Rohres mit elastischer Ouerstützung", Maschinenbautechnik, Vol.28, pp.325-327.
- (10) Sugiyama, Y., 1984, "Studies on Stability of Two-Degree-of -Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Spring Support and a Lumped Mass)", Bulletin of the JSME, Vol.27, pp.2658-2663.
- (11) Sugiyama, Y., Katayama, T., Akesson, B. and Sällström, J.H., 1991, "Stability of Cantilevered Pipes Conveying Fluid and Having Intermediate Spring Support", 11th International Conference on SMIRT, ToKyo, Paper J10/1.
- (12) Paidoussis, M.P., and Semler, C., 1998, "Nonlinear Dynamics of a Fluid-Conveying Cantilevered Pipe with an Intermediate Spring Support", Journal of Fluids and Structures, Vol.7, pp269-298.
- (13) Paidoussis, M.P., 1998, "Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow", Academic Press, Vol. 1, pp. 196-276.