

# 움직이는 소스와 구형셸의 상호작용 해석

이 민형\* · 이 범헌\*\* · 이 승엽\*\*

## Transient interactions between submerged elastic shells and acoustic shock waves from a moving source

Minhyung Lee, Beomheon Yi, Seung-Yup Lee

### Abstract

The problem of the transient interaction of a plane acoustic shock wave which has an infinitely steep wave front with a cylindrical or spherical elastic shell has been studied analytically from early fifties based on the integral transform and series solution techniques. Huang adopted an inverse Laplace transform, and used a finite number of terms of the infinite series expansion of the equations for the shells. In the 1990s, the results have been used by many authors for validation of computer codes. The object of this paper is to discuss the interaction between a moving source and submerged spherical shells. Since the center of source is moving the first contact location between the waves and shell changes depending on the source velocity and distance. These are considered in the analysis. Furthermore, constant source strength and decreasing strength are considered in the analysis. Radial velocities at several locations on the structure are obtained and the results are discussed.

### 1. 서론

충격파의 영향에 의한 무한실린더 또는 구형 셸의 비정상 진동 특성해석이 50년대부터 시도되었다. 이러한 연구의 중요한 응용분야중의 하나는 해저폭발에 의한 수중 또는 수상구조물의 진동특성을 해석이다. 즉, 잠수함 및 함정에 탑재되는 주요 장비의 안정성 평가에 아주 중요한 자료를 제공하여 주므로 시급한 과제이다. 탄성 셸에 부딪힌 충격파(입사파)는 여러곳으로 흩어지며(반사파), 충격파에 의해 시작된 셸의 강체운동은 주위 매질로 에너지를 전파한다(방사파). 따라서 이 문제를 완

전히 해결하기 위해서는 충격파의 반사문제와 탄성셸의 역학 및 방사문제에 대한 문제를 동시에 풀어야할 필요가 있다. 이 문제에 대해서 60년대부터 해가 알려졌지만 상세한 조사는 Huang에 의해 60년대 말에 구하여졌다 [1, 2]. 최근에는 같은 저자에 의해 무한 시리즈합의 정확도에 대한 연구가 발표되었다 [3]. 90년대에는 복잡한 수중 구조물을 다루기 위하여 수치계산 프로그램들의 개발이 진행되었는데 이들 프로그램들의 검증 자료로 Huang의 결과가 사용되어지고 있다 [4]. 따라서 엄밀해의 정확도가 무엇보다도 요구되어진다.

최근에는 움직이는 소스 [5]에 의한 잠겨진 구조물의 진동 특성에 대한 연구의 필요성이 제기되었다. 따라서 본 논문에서는 임의의 속도를 움직이는 소스를 정의하고 Hunag의 접근 방식을 채택하여

\* 세종대학교 기계공학과

\*\* 서강대학교 기계공학과

비정상 진동특성을 구하였다.

## 2. 문제 정의

편의상 구형셸의 형태와 좌표축을 그림 1에 나타내었다. 그리고 구형셸 주위 매질은 밀도  $\rho$ 와 파의속도  $c$ 로 정의되어지는 유체이다. 진파된 충격파는 충분히 약하다는 가정하에 선형 파방정식이 적용된다. 구조물은 탄성체로 가정하며, 반지름  $r$ , 두께  $2h$ , Young's modulus  $E$ , 밀도  $\rho_s$ 로 정의된다.  $\delta_r$ ,  $\delta_\theta$ 는 각각 반경방향과 회전방향 변형을 나타낸다. 초기 입사파는 셸의 탄성운동과 강체운동을 일으키며 또한 반사된다. 또한 탄성 구조물의 운동에 의하여 방사파가 형성되는 아주 복잡한 해석이 요구된다. 여기서 파는 선형이고 크기가 매우 작아 중첩법을 사용할 수 있다고 가정한다. Huang [1]의 수식과 같이 사용하여 다음과 같이 무차원화된 변수를 사용한다.

$$w = \frac{\delta_r}{a}, u = \frac{\delta_\theta}{a}, T = \frac{ct}{a}, R = \frac{r}{a}, Z = \frac{z}{a},$$

$$C^2 = \frac{E}{\rho_s(1-\nu)c^2}, M = \frac{\rho a}{2h\rho_s}, \Pi = \frac{b}{\rho c^2} \quad (1)$$

여기서 Huang에 의해 연구된 단일파원에 대한 해를 제시하고 이를 응용하여 움직이는 다중파원에 의한 셸의 진동특성에 대한 해석을 시도해보았다.

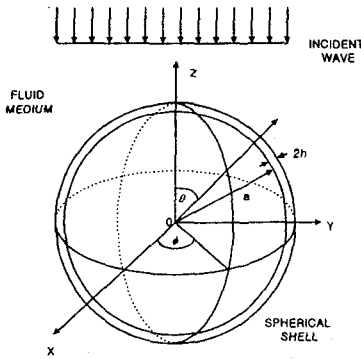


Fig. 1 Schematic sketch of the spherical shell and the coordinate system

## 3. 엄밀해

제시된 문제에 대한 해석이 많이 현존하므로 여기서는 간략히 기술한다. 대체로 두가지 접근 방법이 있다. 첫째로는 모드 합산 방법인데 여기서는 유체 속도와 구조물의 반응 특성을 공간함수와 시간함수 곱의 무한시리즈 합으로 표현한다. 다른

접근 방식은 적분변환 방식이다.

유체-구조물 상호작용 계산은 유체와 구조물이라는 두 가지 부(sub) 시스템을 가지므로 각 시스템에 대한 해석이 요구되며 이들의 연계가 필요하다. 즉 Lagrangian 셸 운동방정식과 선형 파방정식이 동시에 계산되어져야 한다. 셸의 변형과 유체의 압력은 연속적이어야 한다는 기초에 의하여 구형 좌표계에서는 각 방향의 변위 및 외력이 Legendre 함수로 다음과 같이 표시된다.

### 구형좌표계

$$w(\theta, T) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(T) P_m(\cos m\theta) \quad (2)$$

$$u(\theta, T) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(T) \frac{d}{d\theta} P_m(\cos m\theta) \quad (3)$$

$$P(R, \theta, T) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(R, T) \frac{d}{d\theta} P_m(\cos m\theta) \quad (4)$$

일반화된 좌표계,  $w_m$ 과  $u_m$ 는 다음과 같은 Lagrangian 운동방정식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w_m} - \frac{\partial T}{\partial w_m} + \frac{\partial V}{\partial w_m} = Q_m \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_m} - \frac{\partial T}{\partial u_m} + \frac{\partial V}{\partial u_m} = 0 \quad (6)$$

여기서  $K$ 와  $V$ 는 각각 운동에너지와 포텐셜 에너지를 나타내며, 각 변수를 식 (5)와 (6)에 대입하여 두 개의 운동방정식을 유도한다.

### 3.1 정지 소스

식 (5)의  $Q_m$ 은 파의 압력에 의하여 셸에 주어지는 일이다. 앞에서 언급하였듯이 전체 압력은 다음의 세가지 성분으로 구성된다: 입사파, 반사파와 방사파. 초기 입사파는 시간  $T=0$ 에 셸의 충돌하도록 좌표축을 조정하여 다음과 같이 일반적으로 표시된다.

$$P^{inc} = F(R \cos \theta - 1 + T) H(Z - 1 + T) \quad (7)$$

여기서  $H$ 는 계단함수이다. 그리고 임의의 지수함수 형태는  $F(Z - 1 + T) = \exp[-\beta(Z - 1 + T)]$ 로 정의 가능하며 여기서  $\beta=0$ 이면 크기가 일정한 계단파함수가 정의된다. 반사파와 방사파는 선형 파방정식을 만족하여야 하는데 구형 좌표계에서 방사파는 Legendre 함수와 변형된 Bessel 함수의 곱의 시리즈 합으로 표시된다.

마지막으로 중요한 내용인 구조물과 유체에서의 경계조건은 아래와 같다.

$$-\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} \quad \text{at } R=1 \quad (8)$$

그림2에는 계단과 함수에 대한, 구형셸의 초기 입사점 ( $\theta=0^\circ$ )과 입사방향과 수직인 점( $\theta=90^\circ$ ), 그리고 입사방향의 반대방향( $\theta=180^\circ$ )에서의 반경방향 속도를 나타내었다. 또한 그림 3에서는 계단과 함수와 지수함수에 의한 구형셸의 초기 입사점에서의 반경속도를 비교하였다. 그림에서 알수 있듯이 계단파함수인 경우 시간이 지남에 따라 강제운동속도 주위를 진동하며 지수함수파의 경우 감소하여 0으로 접근한다. 두 경우 모두 초기에 최대치를 보이며 정확한 초기 기속도의 예측이 중요하다.

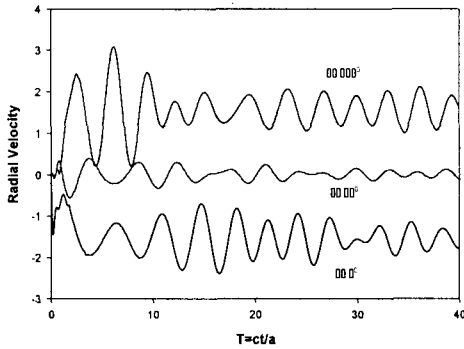


Fig. 2 Radial Velocity for step incident wave

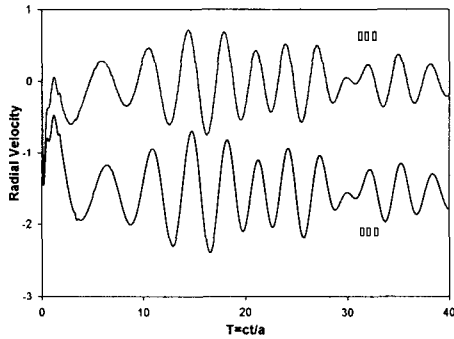


Fig. 3 Comparison for step input and exponentially decaying input at  $\theta=0^\circ$

### 3.2 움직이는 소스

지금까지는 정지 소스에 대한 결과를 알아보았다. 이제부터는 움직이는 소스에 대한 해석에 대하여 살펴볼도록 하자 [그림 4]. 이 해석은 움직이는 소스에 의하여 연속적인파원이 일정한 시간차이를 두고 각기 다른 각도에서 구형셸을 향해 파를 방출할 때, 이러한 파에 의한 구조물의 진동을 해석하는 것이다. 마찬가지로 중첩

원리를 이용하여 해석한다.

운동방정식은 위의 경우에서 정의한 것과 같다. 단지 여기서는 구형셸과 파원과의 거리 및 충돌각도를 고려하여 Huang[2]의 수식을 움직이는 파원에 맞게 변환하였다. 즉 소스의 각 위치에서 출발한 파들은 구조물에 도달하여 다음소스에 의한 파가 도달하는 시간 차이  $\Delta T$  동안만 영향을 주게된다. 따라서 입의 위치에서의 소스가 작동하는 시간과 변하는 거리에 대한 항을 넣어서 정리하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$P^{inc} = \Omega_0 \frac{F(T-L+D+\Delta D-1)}{L} \times (H(T-L+D+\Delta D-1) - H(T+\Delta T-L+D+\Delta D-1)) \quad (9)$$

이 식에서 H는 계단함수를 나타내며, 식의 뒷부분은 시간  $\Delta T$  동안만 함수가 구조물에 작용함을 의미하는 항이다. 이를 Laplace Transform 하여 정리하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{P}^{inc} = \Omega_0 s(f(s) \text{Exp}(D+\Delta D-1)s(1-\text{Exp}(\Delta Ts)) \times \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2s(D+\Delta D)}} K_{n+1/2}((D+\Delta D)s) \times \sqrt{\frac{\pi}{2Rs}} I_{n+1/2}(Rs) P_n(\cos \theta) \right\} \quad (10)$$

반사파와 방사파는 앞에서 언급한 바와 같은 선형파 방정식을 만족하여야 하고, 같은 경계조건을 적용하여 운동방정식을 풀었다.

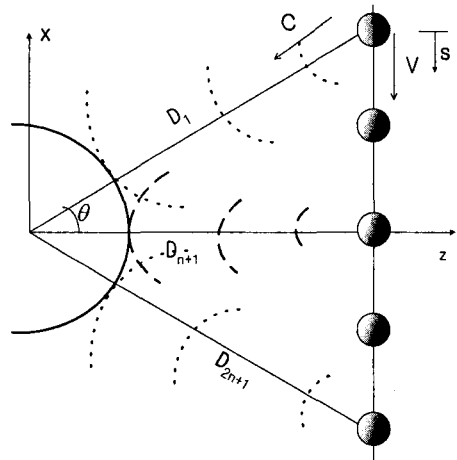


Fig. 4 Schematic sketch of the interaction between the spherical shell and the moving sources

여기서 우리는 두 가지 경우에 대하여 살펴보았는데 하나는 모모든 소스의 크기가 위치에 관계없이 동일한

크기를 갖는 경우이다 [그림 5]. 즉 셀의 z축 상에서 작동하기 시작하는 파의 크기는 그 이동거리가 가장 짧기 때문에 구형셀에 도착했을 때 파의 세기가 가장 크며, 고려한 각도 최 외곽에서 전파되는 파의 크기는 가장 작게 된다. 즉 파의 크기는 z축을 중심으로 대칭이다. 그리고 파원이 에너지를 방출하기 시작하는 시간이 각각 다르므로 일정한 속도 C로 전달되는 파는 일정한 시간간격을 두고 셀에 도착하게 된다. 각각의 파가 도착하는 시간은 아래와 같다.

$$t = \frac{D_i}{c} + \frac{\sum_{i=0}^n \Delta s}{v} \quad (11)$$

$\Delta s$ 는 각 파원 사이의 거리를 나타내며 아래와 같은 식으로 정의된다.

$$\Delta s = \sqrt{D_i^2 + D_{i+1}^2 - 2D_i D_{i+1} \cos \frac{\theta}{n}} \quad (12)$$

여기서 n은 움직이는 단일소스의 전체 개수이다.

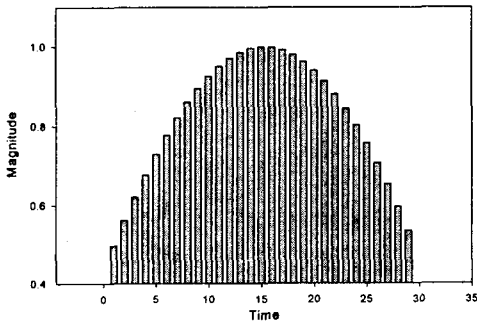


Fig. 5 The magnitude change of the wave sources in time

아래 보인 그래프들은 셀의 축을 중심으로  $\pi/3$ 부터  $-\pi/3$ 구간까지 파원이 작동하는 경우를 보여준다. 각각  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ , 그리고  $180^\circ$  지점에서의 셀의 반경방향 속도를 보여주며, 이는 파원이 움직이는 속도  $V$ 에 따라서 각각 나타내었다. 이 그래프들을 보면 중간 부분이 불룩하게 나타남을 알 수 있는데, 이는 파원이 작동하는 전체 시간중 반정도가 흘러갔을 때 셀로부터 가장 가까운 거리에서 크기가 가장 큰 파가 들어오기 때문이다. 즉, 이동 거리에 반비례하는 파의 세기와 이에 반응하는 셀의 운동을 효과적으로 나타내고 있다. 그리고 파원이 운동하는 속도를 변화시켜 줄에 따라서, 같은 각도 내에서 반응이 완결되는 속도가 달라지는 것 또한 알 수 있다.

다른 하나의 경우는 소스의 강도가 전체 이동 거리에

반비례하는 경우로서, 소스가 음의 x방향으로 움직이는 동안 소스의 크기 감소를 고려한 경우이다. 소스의 강도를 다음과 같은 임의의 식으로 표시하였다.

$$\Omega_0 = \frac{1}{\Omega(D-1)} \left(1 - \frac{1}{S} x\right) \quad (13)$$

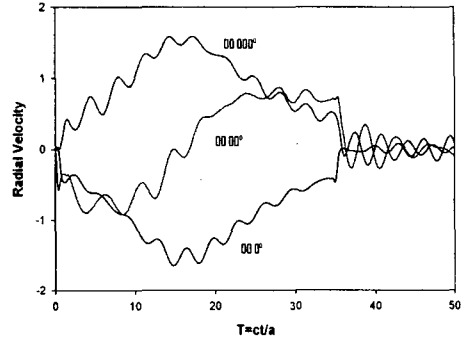


Fig. 6 Time histories for  $0 \leq T \leq 50$  at  $V = c$ .

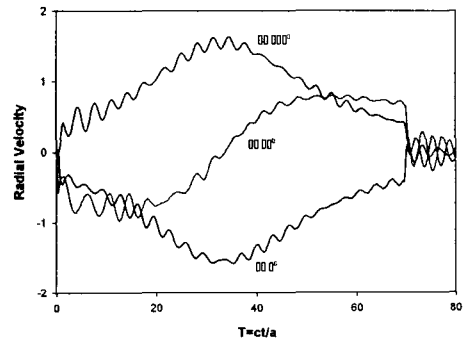


Fig. 7 Time histories for  $0 \leq T \leq 80$  at  $V = c/2$

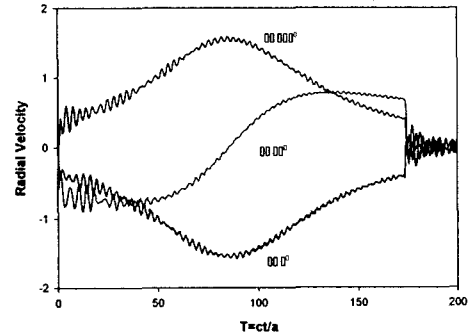


Fig. 8 Time histories for  $0 \leq T \leq 200$  at  $V = c/5$ .

식(13)은 앞에서 정의한 이동거리에 따른 파의 크기를 나타내는 항과 소스의 강도가 감소하는 파원의 크기를 나타내는 항으로 구성되어 있다. 여기서

x는 소스가 움직이는 거리이고 S는 측정각도 내에서 파원이 움직이는 총거리이다. Figure 10은 시간에 따라 변하는 소스의 크기를 나타낸 항이다. 특이한 점은 파원이 이동하면서 그 크기가 감소함에도 불구하고 초반에는 파의 크기가 증가한다는 것이다.

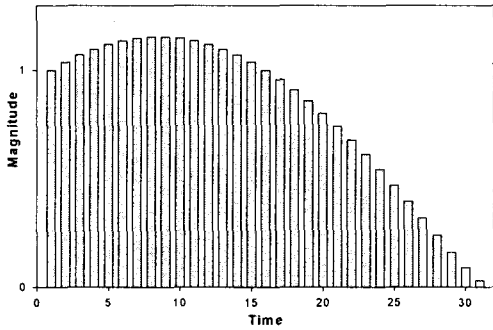


Fig. 9 The magnitude change of the wave sources in time

Figure 10 와 Fig. 11을 보면 앞부분에서 보여준 그래프들과의 차이점이 보이는데, 우선 가장 눈에 띄는 것은 뒷부분이 자연스럽게 0으로 수렴하는 것이라 할 수 있겠다. 앞의 경우 z축을 중심으로 서로 크기가 서로 대칭인 파가 구조물에 작용하지만, 여기서는 시간에 따라 그 크기가 점차 감소하여 측정 각도 끝부분에서는 파원이 그 에너지를 거의 손실하게 된다. 그 결과 구형셸에 미치는 영향이 거의 없어지게 되기 때문이다.

#### 4. 결과

본 연구는 정지소스와 움직이는 소스에 의한 잠겨진 구형 탄성 셸의 비정상 진동 특성을 알아보는 것에 관해 진행되었다. 우선 정지소스에 대한 해가 Huang에 의해 발표된 이후, 많은 사람들에 의해 검증되고 이용되어 확인되었다.

움직이는 소스에 의한 경우는 파의 크기가 충분히 작다는 가정 하에 중첩법을 이용하여 수행되었다. 이러한 경우는 실제로 어떠한 물체가 매질 속에서 움직일때, 운동에너지 소스인 경우에 좀 더 실제적으로 설명할 수 있는 방법이라고 하겠다. 또한 파원의 이동속도  $V$ 가 파의 전달속도보다 충분히 느릴 경우엔 초기 반응 반경 방향 속도는, 각도 보정을 해주었을 때 단일 파원에 의

한 결과와 같아야한다. 또한 다중파원의 경우, 구형셸의 초기 최대 속도 값과 시간에 따라 변화하는 속도변화율을 관찰 할 수 있다. 그러므로 움직이는 소스에 의한 구형셸의 진동특성에 관한 연구는 기존의 정지소스에 의한 결과를 모두 포함하는 결과라고 할 수 있다.

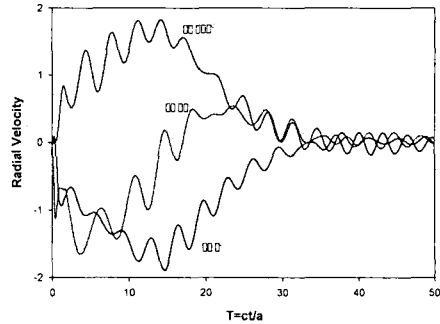


Fig. 10. Time histories for  $0 \leq T \leq 40$  at  $V = c$

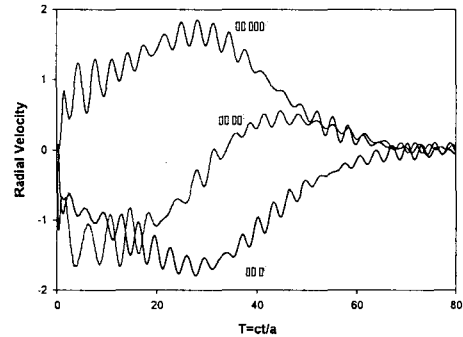


Fig. 11 Time histories for  $0 \leq T \leq 80$  at  $v = c/2$

#### 5. 참고문헌

- [1] Huang, H., "Transient interaction of acoustic plane waves with a spherical elastic shell," *The J. of the Acoustical Society of America*, Vol. 45, 661-670, 1969.
- [2] Huang, H., "An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 37, 1091-1106, 1970.
- [3] Huang, H and Mair, H.U., "Neoclassical solution of transient interaction of plane acoustic waves with a spherical elastic shell," *J. of Shock and Vibration*, Vol. 3(2), 85-98, 1996.
- [4] Hibbit, ABACUS-Example Problems Manual, K & S Inc., 1992.
- [5] Lee, M., Longoria, RG and Wilson, DE., "Ballistic Waves in High-Speed Water Entry" *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 11 (7) 819-844, 1997.