면내 선형분포하중을 받으며 두 변이 탄성구속되고 수평보강된 직교이방성판의 탄성좌굴

권성미*·정재호**·채수하**·윤순종***

Elastic Buckling of Elastically Restrained Orthotropic Plate with a Longitudinal Stiffener under In-plane Linearly Distributed Load

Kwon, S. M., Jeong, J. H., Chae, S. H., and Yoon, S. J.

Key Words: elastic buckling, elastically restrained orthotropic plate, longitudinal stiffener, Lagrangian multiplier method

Abstract

This paper presents the results of an elastic buckling analysis of elastically restrained orthotropic plate with a longitudinal stiffener under in-plane linearly distributed load. It is assumed that the loaded edges of web plate are simply supported and other two edges are elastically restrained against rotation. The stiffener is modeled as a beam element and its torsional rigidity is neglected. For the buckling analysis Lagrangian multiplier method is employed. The effects of restraint and longitudinal stiffener are presented in a graphical form.

기호설명

A_s :보강재의 단면적
b, t :판의 폭과 두께
D_{11}, D_{22}, D_{66} :재료의 성질방향 1, 2에 대한 판의 휨강성과 비틀림강성
E_{11}, E_{22} :재료의 성질방향 1, 2에 대한 탄성계수
E_{11s} :보강재의 탄성계수
I_s :보강재의 단면2차모멘트
k :판의 좌굴계수
l_1, l_2, l_3 :Lagrangian Multiplier
w_p :판의 면외처짐
w_s :x-y면에 수직방향으로 발생하는 보강재의 처짐
y_0, η_0 :보강재의 설치위치(압축연단으로부터의 거리, $\eta_0=y_0/b$)
ν_{12}, ν_{21} : 재료의 성질방향 1, 2에 대한 포아슨 비

* 홍익대학교 대학원 토목공학과 석사과정
** 홍익대학교 대학원 토목공학과 박사과정
*** 홍익대학교 토목공학과 부교수

1. 서 론

기존 구조재에 비해 단위중량당 강도와 부식에 대한 저항성이 크고 비전도성, 비자성을 갖는 등의 장점으로 인해 최근 토목분야에서 그 사용이 증가되고 있는 섬유보강플라스틱 구조재는 생산공정의 특성상 직교이방성재료로 간주되어 진다. 그러나 직교이방성 재료로 구성된 부재에 대한 설계규준은 아직 미흡한 실정이기 때문에 많은 이론적, 실험적 연구가 필요하다[1].

본 연구에서는 면내 선형분포하중을 받으며 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석식을 Lagrangian Multiplier Method를 사용하여 유도하였다. 판의 경계조건은 하중이 재하되는 두 변은 단순지지되

어 있고 하중이 재하되지 않은 두 변은 탄성구속된 것으로 가정하였다. 보강재는 비틀림강성을 무시한 보요소로 간주하였으며 판의 중립면에 대해 대칭으로 설치하였다. 유도된 좌굴해석식을 사용하여 순수휨으로 인해 면내 선형분포하중을 받는 경우에 압축측과 인장측의 탄성구속정도가 판의 좌굴강도에 미치는 영향을 조사하였으며 수평보강된 판의 휨강성비 변화에 따른 좌굴계수를 그래프로 나타내었다. 또한 보강재가 임의 위치에 설치된 경우 탄성구속정도에 따른 판의 좌굴계수의 상한계값을 제시하였다.

2. 기본 방정식

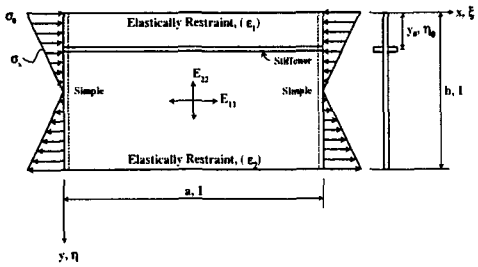


그림 1. 직교이방성판

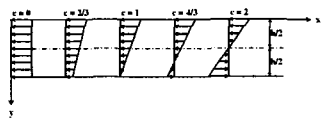


그림 2. c값의 변화에 따른 면내하중의 분포

그림 1은 면내 선형분포하중을 받으며 두 변이 탄성구속되고 수평보강된 직교이방성판을 나타낸 것이다. ε_1과 ε_2는 각각 y=0인 변과 y=b인 변에서 탄성구속정도를 나타내는 값으로 단순지지된 경우 $\varepsilon=0$이며, 고정지지된 경우 $\varepsilon=\infty$이다.

면내 선형분포하중은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있으며, c는 하중의 분포를 나타내는 값으로 본 연구에서는 순수휨에 의한 면내 선형분포하중만을 고려하였으므로 c는 2이다. c값에 따른 하중분포는 그림 2와 같다.

$$\sigma_x=\sigma_0\left(1-\frac{c}{b}y\right) \tag{1}$$

그림 1과 같은 직교이방성판에 좌굴이 발생할 경우 판의 내부에 축적된 변형에너지(U_p)는 식 (2)와 같고, 보강재에 축적된 변형에너지(U_s)는 식 (3)과 같다[2]. 그리고 하중이 재하되지 않은 두 변에 탄성구속효과를 주는 요소의 내부에 축적된 변형에너지(U_r)는 식 (4)와 같다[3].

$$U_p=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\left\{D_{11}\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2}\right)^2+2D_{11}\nu_{21}\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}\right)+D_{22}\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}\right)^2+4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy \tag{2}$$

$$U_s=\frac{E_{11s}I_s}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)^2dx \tag{3}$$

$$U_r=\frac{S_1}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial w_p}{\partial y}\right)^2_{y=0}dx+\frac{S_2}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial w_p}{\partial y}\right)^2_{y=b}dx \tag{4}$$

식 (4)에서 S_1과 S_2는 각각 y=0, y=b인 변에서 탄성구속요소의 구속력에 의해 단위길이당 작용하여 단위회전각을 일으키는 모멘트로서 각각 ε_1과 ε_2의 식으로 표현된다.

그림 1과 같은 판에서 면내 선형분포하중이 판에 대해 한 일(T_p)과 보강재에 대해 한 일(T_s)은 각각 식 (5), (6)과 같다.

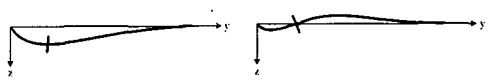
$$T_p=\frac{\sigma_0 t}{2}\int_0^b\int_0^a\left(1-\frac{c}{b}y\right)\left(\frac{\partial w_p}{\partial x}\right)^2dxdy \tag{5}$$

$$T_s=\frac{\sigma_0 A_s}{2}\int_0^b\int_0^a\left(1-\frac{c}{b}y_0\right)\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2dxdy \tag{6}$$

총포텐셜에너지(total potential energy)는 식 (7)과 같다.

$$\Pi=U_p+U_s+U_r-T_p-T_s \tag{7}$$

3. 좌굴해석식의 유도



(a) (b)

그림 3. 판의 y-z면에 발생하는 처짐모양

두 변이 탄성구속되어있고 수평보강된 직교이방성판에 좌굴이 발생할 경우 y-z면에 발생하는 처짐모양은 그림 3의 (a), (b)와 같으며 이 두 경우에 대해 Lagrangian multiplier method를 사용하여 좌굴해석식을 유도하였다. 그림 3의 (a)

는 보강재의 휨강성이 작아 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하는 경우이며, (b)는 보강재의 휨강성이 충분히 커서 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우로 이 때 판의 좌굴응력은 최대가 된다.

그림 1과 같은 직교이방성판의 좌굴해석식을 유도하기 위해서 판과 보강재의 처짐식을 무차원변수 ξ(=x/a)와 η(=y/b)를 사용하여 각각 식 (8-1,2)와 같이 가정하였다.

$$w_p = \sin m\pi\xi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi\eta \qquad (8\text{-}1)$$

$$w_s = \sin m\pi\xi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi\eta_0 \qquad (8\text{-}2)$$

또한 y=0인 변과 y=b인 변에서 발생하는 처짐각의 크기를 각각 식 (9-1,2)와 같이 정의하였다[4].

$$\theta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (n\pi) \qquad (9\text{-}1)$$

$$\theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (n\pi)(-1)^n \qquad (9\text{-}2)$$

판의 좌굴응력은 식 (10)과 같이 정의되며, 좌굴계수 k를 제외한 나머지 항은 재료의 역학적 성질과 판의 치수에 의해 결정되므로 좌굴계수 k만 구하면 좌굴응력은 쉽게 구할 수 있다.

$$\sigma_{cr} = k\frac{\pi^2\sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})(b/t)^2} \qquad (10)$$

3.1 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하는 경우

식 (8)과 식 (10)을 식 (7)에 대입하고 정리하면 두 변이 탄성구속되고 수평보강된 직교이방성판의 총포텐셜에너지를 구할 수 있다. 총포텐셜에너지에서 A_n은 총포텐셜에너지가 최소가 되도록 결정되어야 하며 동시에 식 (9)를 만족해야 한다. 따라서, Lagrangian Multiplier Method를 적용하여 간단히 나타내면 식 (11)과 같다[5].

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(a_n - \frac{k}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} A_p\left\{\gamma\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 S_{np} + ckj_{np} - \delta k(1-c\eta_0)S_{np}\right\} + Q_r \sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)\{l_1 + l_2(-1)^n\} = 0 \qquad (11)$$

식 (11)에서 γ와 δ는 보강재와 판의 휨강성비와 면적비로서 각각 식 (12-1,2)와 같이 정의된다.

$$\gamma = \frac{E_{11s}I_s}{\sqrt{D_{11}D_{22}}b}, \quad \delta = \frac{A_s}{bt} \qquad (12\text{-}1,2)$$

식 (11)은 A_n과 l_1, l_2에 대한 제차선형연립방정식으로 전개되며 A_n이 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다. 이 조건으로부터 하중이 재하되지 않은 변의 탄성구속정도가 각각 ε_1, ε_2인 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수를 구할 수 있다.

그림 4는 인장측의 탄성구속정도에 따른 판의 좌굴계수 변화를 알아보기 위해 보강재가 없는 경우 직교이방성판의 좌굴계수를 나타낸 것이다. (a)는 압축측(y=0)이 단순지지(ε_1=0)되어있는 경우 인장측(y=b)에서 인접판요소의 구속정도를 나타내는 값인 ε_2의 변화에 따른 판의 좌굴계수를 나타내었으며, (b)는 압축측이 고정지지(ε_1=∞)되어있는 경우이다.

3.2 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우

보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우는 앞 절에서 사용한 경계조건에 추가로 보강재와 판의 접합면에서의 처짐이 0이라는 조건이 필요하며 조건식은 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi\eta_0 = 0 \qquad (13)$$

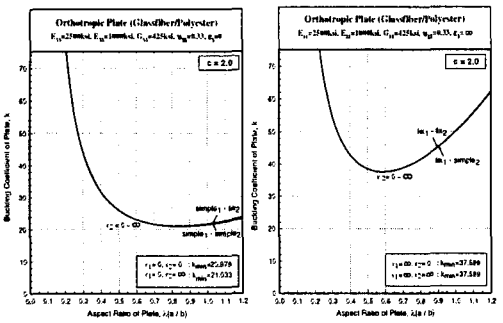
총포텐셜에너지에서 A_n은 총포텐셜에너지가 최소가 되도록 결정되어야 하며 동시에 식 (9)와 (13)을 만족해야 하므로 Lagrangian Multiplier Method를 적용하여 간단히 나타내면 식 (14)와 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(a_n - \frac{k}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} A_p(ckj_{np}) + Q_r \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n\pi)\{l_1 + l_2(-1)^n\} - l_3 \sin n\pi\eta_0\right] = 0 \qquad (14)$$

식 (11)에 적용한 방법과 같은 방법을 식 (14)에 적용하면 하중이 재하되지 않은 변의 탄성구속정도가 각각 ε_1, ε_2인 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수의 상한계값을 구할 수 있다.

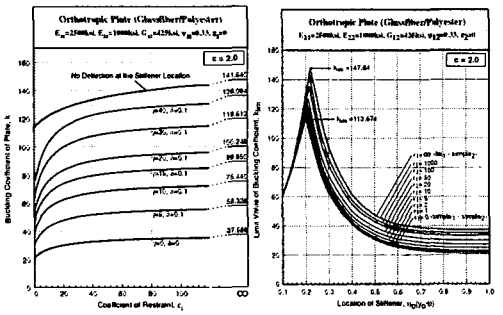
그림 5의 (a)는 ε_1와 휨강성비 변화에 따른

수평보강된 판의 좌굴계수를 나타낸 것이며. (b)는 보강재의 위치와 좌굴계수의 상한계값과의 관계를 나타낸 그래프이다.



(a) (b)

그림 4. ε_2변화에 따른 판의 좌굴계수



(a) (b)

그림 5. 수평보강된 판의 좌굴계수

4. 결 론

본 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 면내 선형분포하중을 받으며 두 변이 탄성구속 되어있고 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석식을 Lagrangian multiplier method를 사용하여 유도하였다.

(2) 유도된 좌굴해석식을 사용하여 하중이 재하되지 않은 두 변이 단순지지($\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$)된 경우와 고정지지($\varepsilon_1=\varepsilon_2=\infty$)된 경우에 대하여 좌굴해석을 수행한 결과 기존 문헌의 결과와 잘 일치하였다[6],[7].

(3) 인장측에서 인접판요소의 구속정도는 좌굴계수값에 거의 영향을 미치지 않았다. 탄성구속된 직교이방성판의 좌굴계수는 압축측의 경계조건이 단순지지된 경우와 고정지지된 경우의 사이에 존재하였으며, 탄성구속 정도가 증가할수록 고정지지된 경우의 좌굴계수값에 수렴해가는 것을 확인할 수 있었다.

(4) 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우의 좌굴해석을 통해 수평보강재가 설치된 직교이방성판의 좌굴계수의 상한계값(k_{lim})을 결정하였으며 수평보강된 판의 휨강성비가 증가함에 따라 좌굴계수의 상한계값으로 수렴하였다.

참고문헌

(1) 윤순종, 문환두, 이원복 (1995) "직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계규준에 관한 연구," *대한토목학회 논문집*, 제15권, 3호, pp. 533-544.

(2) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1961) *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

(3) Bulson, P. S. (1969) *The Stability of Flat Plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York.

(4) Johnson, J. H. JR. and Noel, R. G. (1953) "Critical Bending Stress for Flat Rectangular Plates Supported Along All Edges and Elastically Restrained Against Rotation Along the Unloaded Compression Edge," *Journal Aero. SCI.*, Vol. 20, pp. 535-540.

(5) Bleich, F. (1952) *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York.

(6) 정재호, 채수하, 윤순종 (1998) "면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 직교이방성판의 탄성좌굴," *학술발표회 논문집(I)*, 대한토목학회, 제1권, pp. 385-388.

(7) S.J. Yoon, J. H. Jung, D. J. Ahn (2000) "Elastic Buckling Behavior of Orthotropic Web Plate with a Longitudinal Stiffener," *Proceedings of the second Asian-Australian Conference on Composite Materials (ACCM-2000)*, KSCM, pp. 95-100.

단위환산

1 ksi = 6.895 Mpa = 70.31 kg/cm^2

1 in = 2.54 cm