

# 물성치의 불확실성을 고려한 자유단이 있는 복합재료 적층평판의 최적화

조맹효\* · 이승윤\*\*

## Layup Optimization of Composite Laminates with Free Edge Considering Bounded Uncertainty

Maenghyo Cho, Seung-Yun Rhee

**Key Words:** Genetic Algorithm , Convex Modeling , Interlaminar Strength , Kantorovich Method

### Abstract

The layup optimization by genetic algorithm (GA) for the strength of laminated composites with free-edge is presented. For the calculation of interlaminar stresses of composite laminates with free edges, extended Kantorovich method is applied. In the formulation of GA, repair strategy is adopted for the satisfaction of given constraints. In order to consider the bounded uncertainty of material properties, convex modeling is used. Results of GA optimization with scattered properties are compared with those of optimization with nominal properties. The GA combined with convex modeling can work as a practical tool for light weight design of laminated composite structures since uncertainties are always encountered in composite materials.

기호설명

$\int_D$  : 이중적분

$\int_T$  : 삼중적분

### 1. 서론

자유단이 있는 복합재료 적층평판의 경우, 각 층 간의 물성치의 불연속으로 인해 자유단 근처에서 극심한 응력 집중이 발생하게 된다. 자유단에서 발생하는 층간응력은 층간분리를 야기시키고, 면내방향으로의 파손이 일어날 경우 파괴하중보다 작은 하중에서도 파괴가 일어나게 된다. 따라서 강도해석 및 설계 시에는 자유단 근처에서의 층간응력을 해석하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 M.Cho[1,2]의 extended Kantorovich Method를 이용한 해석 방법을 이용하여 시간비용

을 적게 들고도 어느 정도 정확한 층간응력을 계산한다.

전통적인 최적화 방법들은 도함수가 존재해야 하며 좁은 영역에서만 효율적이라는 단점이 있다. 게다가 이산적인 최적화 문제에 있어서는 적용하기가 불편하다. 복합재료의 적층평판의 적층 배열은, 제조상의 문제로 인해 그 섬유배열각이 대개의 경우  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ 로 제한되기 때문에, 이산적인 변수로 취급된다. 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm, GA)은 이러한 이산적인 배열 문제를 다루는 데 있어 적합하다[3,4]. 유전자 알고리즘은 초기에 임의의 염색체들로 구성된 해집합(population)을 선택, 교배, 그리고 돌연변이(selection, crossover and mutation)의 주요한 세 과정을 반복적으로 거쳐 최적해를 확률적으로 탐색한다.

한편, 복합재료 적층 구조물에서 물성치는 생산 공정상의 결함, 물성치 측정상의 오차, 사용 환경 등의 여러 원인으로 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이게 마련이다. 따라서, 컨벡스 모델링(Convex Modeling) 기법을 이용하여 그 편차

\* 서울대 기계항공공학부

\*\* 서울대 기계항공공학부

를 고려함으로써 설계의 안전성과 신뢰성을 얻을 수 있게 될 것이다.

본 논문에서는 유전자 알고리즘을 사용하여 자유단이 있는 적층평판의 강성을 최대화 하는 적층배열을 결정하는 것을 연구 목표로 한다. 이때 물성치들의 불확실성을 고려하여 그 민감도를 살펴보고 어느 물성치가 강성에 큰 영향을 미치는지를 결정할 것이다. 더불어 물성치의 scattering을 고려한 경우에도 유전자 알고리즘을 적용시켜 그 최적화의 결과를 조사· 비교해 본다.

## 2. Strength Analysis

### 2.1 Extended Kantorovich Method

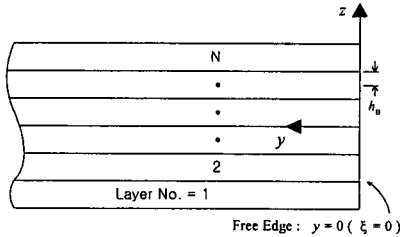


Fig.1. Composite Laminate with Free Edge

자유단이 있는, 각 층의 두께가 일정한 복합재료 적층평판의 개형이 Fig.1에 주어졌다. 선형 탄성을 가정하면 각 층에서 다음과 같은 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (1)$$

주어진 적층평판에 대해, 자유단과 아래면·윗면에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0 & \quad \text{at } y=0, b \\ \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 & \quad \text{at } z = \pm h/2 \end{aligned} \quad (2)$$

평형방정식을 자동적으로 만족시키기 위해 Lekhnitskii 응력함수를 도입한다. 이 응력함수들은 면내방향과 두께방향 함수로 나뉘어져 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \sigma_2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \sigma_3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} = -\sigma_4, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi} = -\sigma_5, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta} = \sigma_6 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $\eta$ 와  $\xi$ 는 각각  $x$ ,  $y$  좌표를 무차원화시킨 좌표이다.

여기서, 인장·압축에 대해서는,

$$F = \sum_i f_i(\xi) g_i(\eta), \quad \Psi = \sum_j p_j(\xi) g_j(\eta) \quad (4)$$

면내방향 함수들은 초기에 가정된 두께방향 함수들의 기저 집합으로부터 결정되고, 반드시 아래면·윗면에서의 traction-free 조건을 만족시켜야 한다. 초기에 두께방향 함수  $g_i(\eta)$ 는 각각 양

끝이 고정된 보와 단순지지 보의 고유모드로 가정된다.

지배방정식은 보쪽 가상일의 원리를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_T u_i \delta \sigma_{ij} dx dy dz \\ &= \int_D u_i \delta \sigma_{ij} n_j dA - \int_T \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dx dy dz \end{aligned} \quad (5)$$

경계조건을 이용하면, 다음 식을 구할 수 있다.

$$\int_D (\Delta u \delta \sigma_{xx} + \Delta v \delta \sigma_{yy} + \Delta w \delta \sigma_{zz}) dy dz = \int_D \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dy dz \quad (6)$$

식(3)을 식(6)에 대입하면, 응력들이  $f_i$ 와  $g_i$ 로 표현된다.  $f_i$ 와  $g_i$ 에 대한 Euler 방정식은 식(6)에서 구할 수 있고, 따라서 초기에 가정된 기저함수 집합으로 면내방향 함수들을 구할 수 있다.

두 번째 과정에서는, 식(6)으로 주어지는 원래의 보쪽 가상일에 Kantorovich 방법이 다시 적용된다. 첫 번째 과정에서 구한  $f_i$ 와  $g_i$ 를 대입하면, 보다 나은 두께방향 함수들이 구해진다. 세 번째 과정은 첫 번째 과정과 비슷하다.

### 2.2 Independent Maximum Stress Criterion

본 연구에서 사용된 파괴기준은 크게 두 가지로 나누어진다. 면내방향의 응력들에 대해서는, 다음과 같이 최대 응력 척도를 사용한다.

$$-X_c < \sigma_{xx} < X_t, \quad -Y_c < \sigma_{yy} < Y_t, \quad |\sigma_{xy}| < S \quad (7)$$

여기서,  $X$ 와  $Y$ 는 각각 섬유각에 면한 방향과 수직인 방향의 파괴강도를 의미하며,  $S$ 는 전단강도를 나타낸다. 인장과 압축은 각각 첨자  $t$ 와  $c$ 로 표시된다.

층간응력들에 대해서는 Whitney와 Nuismer[5]가 제안한 최대 평균응력을 이용하여 Brewer와 Lagace[6]가 제시한 Quadratic Delamination 척도를 사용한다. 평균응력은 아래 식(8)로 계산하고, Quadratic Delamination 척도는 식(9)로 표현된다.

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} \sigma_j d\xi \quad (j=3,4,5) \quad (8)$$

$$(\bar{\sigma}_3/Y_t)^2 + (\bar{\sigma}_5/S)^2 < 1 \quad (9)$$

## 3. Convex Modeling

컨벡스 모델링은, 불확실성을 보이는 양을 다루기 위해 확률 분포를 가정하는 확률적인 접근법과 달리, 분포 범위에 대한 정보만을 필요로 하는 방법이다. 물성치의 분포 범위로부터 그 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들고 목적함수들이 편차에 대해 선형화하게 된다. 따라서 목적함수의 최대값은 편차로 이루어지는 컨벡스 집합의 경계에 존재하게 되므로 계산량을 줄이며 물성치의 불확실성을 고려할 수 있다. 컨벡스 모델링 기법을 도입하는 과정은 다음과 같으며 적용에는 참고문헌[7~10]에서 찾아볼 수 있다.

### 3.1 Formulation of Convex Modeling

첫 단계로 목적함수를 불확실성을 갖는 물성치

의 편차에 대해 선형화시켜야 한다. 여기서는  $E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$ 가 공칭값을 중심으로 일정 범위 내에 분포한다고 가정한다. 최적화를 위한 목적함수  $F$ 는 적층평판을 파괴하지 않는 최대 허용하중이며, 이를  $\delta_i$ 의 일차항까지 고려하여 테일러 전개를 하면 다음과 같다.

$$F|_{E_i+\delta_i} = F|_{E_i} + \sum_{i=1}^4 \left. \frac{\partial F}{\partial E_i} \right|_{E_i} \cdot \delta_i = F|_{E_i} + (f)^T \{\delta\} \quad (10)$$

$$(E_1 = E_L, E_2 = E_T, E_3 = \nu_{LT}, E_4 = G_{LT})$$

여기서,  $E_i^0$ 는 각 물성치의 공칭값이고, 목적함수의 일차도함수와 편차는 다음과 같다.

$$(f)^T = \left[ \left. \frac{\partial F}{\partial E_1} \right|_{E_i^0}, \left. \frac{\partial F}{\partial E_2} \right|_{E_i^0}, \left. \frac{\partial F}{\partial E_3} \right|_{E_i^0}, \left. \frac{\partial F}{\partial E_4} \right|_{E_i^0} \right] \quad (11)$$

$$\{\delta\}^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$$

$\delta_i$ 가 컨벡스 집합을 구성한다고 하면, 식(10)의 선형성으로부터 최대값은 컨벡스 집합의 경계에 있게 된다. 타원체로 구성된 컨벡스 집합은 다음과 같이 구해진다.

$$Z(e) = \left\{ \delta : \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \right\} \quad (12)$$

변분법을 이용하여 다음의 Lagrangian을 최소화하면 식(14)와 같이  $e_i$ 를 구할 수 있다.

$$L = C e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda \left( \frac{\Delta_1^2}{e_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{e_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{e_3^2} + \frac{\Delta_4^2}{e_4^2} - 1 \right) \quad (13)$$

$$e_i = \sqrt{n \Delta_i} \quad (14)$$

이상의 과정으로 물성치의 편차가 존재하는 컨벡스 집합이 유도되었다. 따라서 불확실성을 보이는 물성치가  $\delta_i$ 의 편차를 가질 때 목적함수를 최대화하는 문제는 다음 형태로 나타낼 수 있다.

$$F_{\max} = \text{Max}[F|_{E_i} + (f)^T \{\delta\}], \{\delta\} \in Z(e) \quad (15)$$

최대값  $F_{\max}$ 를 구하기 위해 변분법을 사용하면 최대값을 갖는  $\{\delta\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\delta\} = \pm \frac{1}{\sqrt{(f)^T \{e\}^{-1} \{f}\}} \{e\}^{-1} \{f\} \quad (16)$$

따라서 물성치의 불확실성을 고려한 허용하중의 최대값  $F_{\max}$ 는 다음과 같다.

$$F_{\max} = F|_{E_i} \pm \sqrt{(f)^T \{e\}^{-1} \{f\}} \quad (17)$$

여기서,  $F_{\max}$ 를 보수적으로 평가하기 위해 음의 부호를 채택한다.

$$F_{\max} = F|_{E_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left[ 2\Delta_i \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial E_i} \right|_{E_i} \right]} \quad (18)$$

#### 4. Genetic Algorithm

섬유배열각이  $0^\circ, 90^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$ 로 제한되기 때문에 해집합(population)을 구성하는 각각의 염색체(chromosome)는 0, 1, 2, 3, 4로 이루어진다. 0은  $0^\circ$ , 4는  $90^\circ$ 로, 1, 2, 3은 그 위치에 따라 각각  $\pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$ 로 decoding된다.

[ 홀수번째 : +, 짝수번째 : - ]

최적화에 있어서 구속조건은 두 가지가 적용된다. 적층배열은 balanced symmetric 적층으로 하

며, matrix의 균열(cracking)을 방지하기 위해 연속으로 같은 섬유배열각을 가진 lamina를 4장 이상 연속으로 적층하지 않는다. 이러한 구속조건을 고려하기 위해 본 연구에서는 'recessive-gene repairing'을 적용한다. 즉, 임의로 만들어진 해집합을 구속조건을 만족하도록 고치는 것이다. 균형을 이루게 하기 위해 1의 개수가 홀수인 경우, 그 중 가장 안쪽의 1을 0이나 2로, 혹은 가장 안쪽의 0이나 2를 1로 바꾸어준다. 1의 개수가 짝수면 자동적으로 균형을 이루게 된다. 2, 3의 경우도 마찬가지로 한다. 4장 연속에 관한 구속조건은, 4장 연속된 0이나 4 중 가장 안쪽을 4나 0으로 바꾸어주면 된다. 이러한 repairing 기법은 A. Todoroki와 R.T. Haftka의 연구[11]에서 그 신뢰성이 검증되었다.

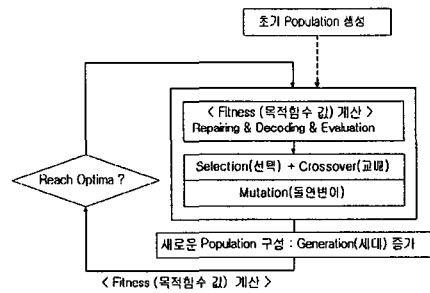


Fig.2. Flowchart of GA

#### 5. Numerical Results

본 연구에서는 적층판의 층의 수를 16장으로 고정하였다. 불확실성을 고려하지 않은 경우와 고려한 경우 모두, 최대 허용하중을 갖는 적층배열은  $[0_3/30/0_3/-30]_s$ ,  $[0_3/30/0_2/-30/0]_s$ ,  $[0_2/30/0_3/-30/0]_s$ 가 나왔다.

각 물성치가 5% 편차를 가질 때, 허용하중의 민감도가 Table.1에 정리되어 있다.  $E_L$ 이 가장 큰 영향을 미치고, 다음으로  $E_T$ 의 영향이 클 수 있다.

Table.1. Sensitivities of Objective Function

| Properties | Sensitivity          |
|------------|----------------------|
| $E_L$      | $-2.936 \times 10^4$ |
| $E_T$      | $+1.982 \times 10^4$ |
| $\nu_{LT}$ | $-0.457 \times 10^4$ |
| $G_{LT}$   | $+0.961 \times 10^4$ |

Table.2에 표시된 파라미터들의 영향을 알아보기 위해, 최적화를 여러 번 수행한 후 신뢰도를 조사하여 그 결과를 Fig.3~5에 도시했다.  $N_{op}$ 를 전역 최적해에 도달한 횟수,  $N_{it}$ 를 최적화 수행 횟수라고 하면, 신뢰도  $R$ 은 다음 같이 정의된다.

$$R = 100 \times \frac{N_{op}}{N_{it}} \quad (19)$$

신뢰도가 100%인 경우에는 그 성능을 비교하기

위해, 필요한 경우 전역 최적해에 도달한 세대수의 평균값을 같이 나타내었다.

Table.2. GA parameters [ ( ) ; default ]

| Parameters                     | Values        |
|--------------------------------|---------------|
| Generation Upper Limit         | 200           |
| Population Size (PopSize)      | 3~50 (16)     |
| Probability of crossover (Pcr) | 0.0~1.0 (0.9) |
| Probability of mutation (Pmu)  | 0.0~1.0 (0.1) |

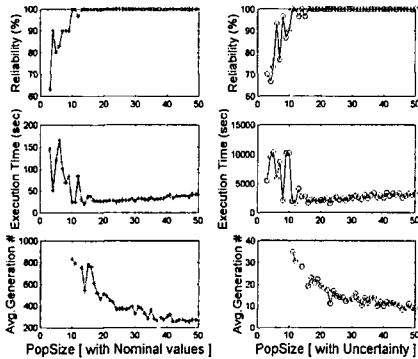


Fig.3. Reliability & Avg. Execution Time & Avg. Generation # for various PopSize

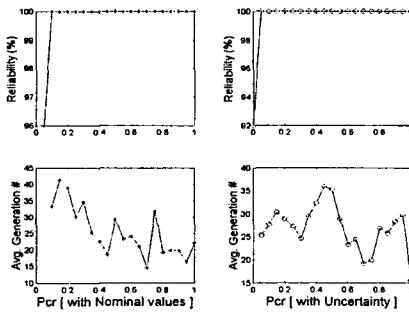


Fig.4. Reliability & Avg. Generation # for various Pcr

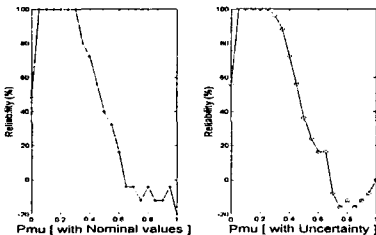


Fig.5. Reliability for various Pmu

Fig.3과 4를 보면, 교배율에 대해서는 대체로 높은 신뢰도(reliability)를 보였고, 돌연변이율에 대해서는 0.05~0.25 범위에서 100%의 신뢰도를

보였다. 돌연변이율이 0.3~0.4 이상이 되면, 최적해 근처에 도달했던 염색체가 엉뚱하게 바뀔 확률이 높아지기 때문에 신뢰도가 많이 떨어짐을 알 수 있다. Fig.5를 보면, 해집합 크기가 16 이상이면 100%의 신뢰도를 보이며, 그 크기가 커질 수록 전역 최적해에 도달하는 세대수는 빠르게 감소하는 반면 최적화 수행시간은 완만하게 증가한다.

## 6. 결론

Repairing 기법을 이용한 GA를 사용하여, 복합재료 적층평판의 층간응력을 고려한 강도를 최대화하기 위해 적응각 배열을 최적화하였다. 유한요소해석에 비해 아주 적은 시간비용을 들여 층간응력을 계산했고 이로써 층간강도를 고려한 최적화가 가능했다. 또한 범위가 주어진 물성치의 불확실성을 컨벡스 모델링을 통하여 고려하였고 그 결과를 제시하였다. 본 방법은 설계 변수에 불확실성이 있는 실제적인 적층배열 최적화 문제에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단되며 보다 다양한 문제로의 확장 연구가 진행 중이다.

## 참고문헌

- [1] Cho,M., Yoon,J., Free-edge interlaminar stress analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method, *AIAA Journal*, Vol.37, No.5, 1999, pp.656-660.
- [2] Cho,M., Kim,H.S., Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting, and thermal loadings, *Int J Solids and Struct*, Vol.37, 2000, pp.435-459.
- [3] R. Riche, R.T. Haftka "Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm", *AIAA Journal*, Vol.31, No.5, 1993, pp.951-956.
- [4] B. Liu, R.T. Haftka, M.A. Akgün, A. Todoroki, "Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates", *Comput Methods Appl Mech Engrg*, Vol.186, 2000, pp.357-372.
- [5] Whitney,J.M., Nuismer,R.J., Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *J Compos Mater*, 1974, Vol.8, pp.253-265.
- [6] Brewer,J.C, Lagace,P.A, Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination, *Journal of Composite Materials*, Vol.22, 1988, pp.1141-1155.
- [7] Y. Ben-Haim, I. Elishakoff, "Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics" Elsevier, Amsterdam, 1990, 1994, pp.1401-1405.
- [8] I. Elishakoff, P. Colombi, "Combination of probabilistic and convex models of uncertainty when scarce knowledge is present on acoustic excitation parameters", *Comput Methods Appl Mech Engrg*, Vol.104, 1993, pp.187-209.
- [9] I. Elishakoff, R.T. Haftka, J. Fang, "Structural design under bounded uncertainty- optimization with anti-optimization", *Comput Struct*, Vol.53, 1994, pp.1401-1405.
- [10] 김태욱, 신효철, "불확실한 물성치를 갖는 복합재료 적층 평판의 파괴 예측", *대한기계학회논문집 A권*, 제24권 제1호, 2000, pp.259-268.
- [11] Todoroki,A., Haftka,R.T., Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy, *Composite Part B*, Vol.29, No.3, 1998, pp.277-285.