

# 구조연성을 고려한 복합재료 상자형 보의 강성계수 예측에 관한 연구

정성남\*, 동경민\*\*

## A Study on the Calculation of Stiffness Properties for Composite Box-Beams with Elastic Couplings

Sung Nam Jung\*, Kyung Min Dong\*\*

**Key Words:** thin-walled, box-beams, elastic couplings, mixed beam theory, constitutive relations, stiffness constants

### Abstract

In the present work, a linear static analysis is presented for thin-walled prismatic box-beams made of generally anisotropic materials. A mixed beam theory has been used to model and carry out the analysis. Three different constitutive relations are assessed into the beam formulation. Simple layup cases having symmetric or anti-symmetric configuration have been chosen and tested to clearly show the effects of elastic couplings of the beam. Both 2D and 3D finite element structural analysis using the MSC/NASTRAN has been performed to validate the current analytical results. Results show that appropriate assumptions for the constitutive equations are important and prerequisite for the accurate prediction of beam stiffness constants and also for the beam behavior.

### 1. 서 론

상자형 단면 보는 폐곡선 형상을 가지며 굽힘 하중을 감당하기에 적합한 구조형태로 알려져 있다. 상자형 보는 인장이나 비틀림 하중에 대한 저항력 또한 커서 전통적으로 토목이나 건축용 주요 구조재로 폭 넓게 이용되어 왔다. 70년대 이후 섬유강화 복합재료가 항공기용 소재로 각광 받기 시작하면서 복합재료를 이용하여 제작된 상자형 보가 항공기의 주요 하중감당 부재의 하나로 이용되기 시작하였으며, 현재는 항공기 날개

나 헬리콥터 블레이드 등의 스파구조로 자주 응용되고 있다.

보 구조물은 단면의 제원에 비하여 길이가 매우 큰 특징을 이용하여 1차원 보로 해석하는 것이 일반적이다. 이 경우 본질적으로 3차원 특성을 보이는 보 구조에 대해 적절한 가정 및 모델링을 통하여 2차원 단면해석을 수행하고 동시에 이들을 1차원 보 해석과 결합하는 것이 관건이다. 재료가 복합재료로 이루어진 경우에는 재료의 이방성에 기인하는 비고전적 보의 특징을 효과적으로 고려할 수 있어야 하며, 특히 적절한 구성방정식의 설정은 해석의 정확도를 가늠하는 매우 중요한 요소이다. 이러한 복합재료 상자형 보의 이론 정립 및 해석에 관한 연구가 80년대

\* 전북대학교 자동차신기술연구소

\*\* 전북대학교 대학원

중반 이후 국내외를 중심으로 활발히 수행되어 왔다[1-7].

본 연구에서는 폐곡선 단면 형상을 갖는 복합재료 상자형 보의 연계거동 특성을 해석적인 관점에서 고찰하였다. 특히 복합재료 보 벽면에 대한 구성방정식의 설정이 결과적인 해의 정확도에 미치는 영향이 절대적이라는 사실에 기초하여 기존의 연구들이 사용한 가정 및 이의 문제점들에 대하여 체계적인 분석을 가하였다. 본 연구에서 다룬 2차원 구성방정식에 대한 가정은 크게 세 가지로 대별하였다. 첫 번째 가정으로는 단면 벽 내 접선변형률(hoop strain and curvature) 성분의 크기가 충분히 작아서 이들을 무시할 수 있다는 것이다[2,3]. 다음으로는 단면의 벽면(wall) 내 접선응력 및 접선모멘트(hoop stress and hoop moments) 성분의 크기가 충분히 작다고 가정하여 이들을 무시하는 것이다[4-6]. 마지막으로 상자형 보에 대한 보다 개선된 가정으로 접선모멘트에 대한 크기에는 제한을 두지 않고 접선응력 성분만을 무시하는 경우이다. 위에 예시한 각각의 가정을 기초로 참고문헌 7의 혼합 보 이론에 적용하여 복합재료 상자형 보에 대한 강성계수를 구하고, 이들을 NASTRAN을 이용한 2차원 및 3차원 정밀 유한요소 해석 결과와 비교하여 그 유효성을 검증하였다.

## 2. 이론

복합재료 보에 외부하중이 작용할 경우 기하학적 보의 특성 및 재료의 이방성에 따라 인장-굽힘-비틀림이 서로 연성되어 나타나며, 적절한 보 모델이라면 이러한 보의 연성거동을 제대로 기술할 수 있어야 한다. Fig. 1은 길이가  $l$ 인 상자형 단면 보의 좌표계 및 변위 성분들을 보여주고 있다. 여기서 보의 변형은 탄성축  $x$ 와 여기에 수직인  $y, z$  좌표축을 따라 각각 인장( $U$ ), 수직 및 수평 방향 변위( $V, W$ ), 그리고 보의 탄성축에 대한 회전 성분인 비틀림 변형  $\phi$ 로 구분한다.

보의 상자형 단면 벽은 두께가 얇은 특성을 이용하여 4개의 독립된 판으로 구성되어 있다고 가정하고, 이러한 2차원 판 요소에 대한 힘 성분들과 이에 대응되는 변형을 성분들에 대한 관계식은 고전 적층판 이론에 입각하여 구한다. 이를 수식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{ss} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{ss} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{ss} \\ \chi_{xs} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 는 각각 복합재료 적층판의 환원강성계수를 나타낸다. 위의 구성방정식에서 단면 벽의 중심선에 대한 접선 변형을 성분의 크기는 충분히 작다고 가정하여 무시하거나 ( $\epsilon_{ss} = \chi_{ss} = 0$  : 이하 평면변형을 가정) 혹은 접선합응력 및 합모멘트 성분을 무시할 경우 ( $N_{ss} = M_{ss} = 0$  : 이하 평면응력 가정), (1)식은 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & B_{16} & B_{66} \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xs} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{xs} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

이 때 기호 '은 평면변형을 및 평면응력 가정에 입각하여 환원된 강성계수를 나타낸다. 한편, 단면 벽에 대한 합응력 성분은 무시한다고 가정할 수 있으나 합모멘트는 무시할 수 없는 경우에 대해 위의 (1)식을 부분 역변환 형태로 고쳐 쓰면 다음과 같다[7].

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{ss} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{xs} \\ N_{xs} \\ M_{ss} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

위의 식 (3)과 같이 부분 역변환 형태로 표현된 구성 방정식을 고려하기 위하여 Reissner가 제안한 반보족 에너지함수를 도입한다[7]. 이를 변분식의 형태로 기술하면 다음과 같다.

$$\delta \int_0^l \int_s (\Phi_R + \gamma_{xs} N_{xs} + \gamma_{ss} M_{ss}) ds dx = 0 \quad (4)$$

여기서 Reissner 함수  $\Phi_R$ 는 다음으로 정의한다.

$$\Phi_R = N_{xx} \epsilon_{xx} + M_{xx} \chi_{xx} + M_{xs} \chi_{xs} - N_{xs} \gamma_{xs} - M_{ss} \gamma_{ss} \quad (5)$$
 구성방정식 (3)과 변형률-변위 관계식[7]을 변분 에너지식 (4)에 대입하면 보의 최종적인 지배방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (6)$$

여기서  $[K]$ 는 보의 강성계수를 나타내며,  $\{q\}$ 는 보의 일반화 변위벡터, 그리고  $\{F\}$ 는 하중벡터이다. 가장 일반적인 보의 경우 강성계수는  $[7 \times 7]$

행렬로 표시되며, 정식화에 도입한 근사정도 (level of approximation)에 따라 다양하게 표현 될 수 있다.

### 3. 결과 및 검토

복합재료 상자형 보의 연계거동 및 모델링 특성을 효과적으로 나타내기 위해 Table 1과 같이 상자형 단면을 구성하는 4개의 벽면을 단면의 중심선에 대해  $[\theta_3/-\theta_3]$ 과  $[-\theta_3/\theta_3]$ 의 조합을 사용하여 대칭 혹은 반대칭 적층하였다. 상자형 보의 폭과 높이는 각각 0.953 in와 0.537 in이며, 사용된 복합재료는 흑연-에폭시이다[5].

Fig. 2는 Table 1에 예시된 4가지의 서로 다른 적층 형상에 대해 복합재료 적층각  $\theta$ 에 따른 보의 굽힘강성( $EI_y$ )의 변화를 도시한 결과이다. 적층각의 변화에 대한 굽힘강성의 크기는 최대 14.3배의 차이가 발생하며, 4가지 적층형상의 조합에 따른 굽힘강성의 변화는 없음을 보여준다. 이는 상자 단면의 중심축을 기준으로 상하 및 좌우 편이 서로 균형을 이루고(balanced) 있기 때문이다. 하지만 Fig. 3에 보듯이 적층형상의 변화에 따른 비틀림 강성의 변화는 매우 커서 적층각 45°의 경우(반대칭) 약 1.9배의 강성도 차이가 발생함을 알 수 있다. 이는 비틀림 강성의 크기가 단면을 구성하는 벽면의 중심선(contour line)을 따라 변화하고 있기 때문이다. 참고로 대칭 적층의 경우에 대한 비틀림 강성도는 적층형상에 무관함을 알 수 있다. 계속하여 Fig. 4는 대칭적층 형상의 경우에 대해 앞절에서 언급한 세가지 다른 구성방정식을 사용하여 얻은 비틀림 강성에 대한 해석결과를 MSC/NASTRAN을 이용한 2차원 및 3차원 해석결과와 비교하여 나타낸 그림이다. 단면벽면의 접선응력 만을 무시하여 기술한 1차원 혼합 보 해석 결과는 다른 두 가지 경우에 비해 복합재료의 연성특성을 제대로 기술하고 있으며, NASTRAN 해석결과와 비교하여 2D는 1.5%, 그리고 3D는 최대오차 4.8% 이내에서 정확히 예측하고 있음을 보여주고 있다.

### 4. 결론

본 연구에서는 폐곡선 단면 형상을 갖는 복합재료 상자형 보의 연계거동 특성과 상자형 벽면

에 대한 구성방정식의 설정이 최종적인 해의 정확도에 미치는 영향에 대해 해석적인 관점에서 고찰하였다. 기존의 평면변형을 및 평면응력 가정을 이용한 해석에 비해 단면벽면의 접선응력만을 무시하고 기술한 1차원 혼합 보 해석 결과는 복합재료의 연성특성을 제대로 기술하고 있으며, 2차원 및 3차원 정밀 유한요소 해석결과와도 잘 부합하고 있음을 보였다.

### 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (2001-1-30500-001-2) 지원으로 수행되었음.

### 참고문헌

- (1) Hodges, D. H., "Review of Composite Rotor Blade Modeling," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 28, No. 3, 1990.
- (2) Hong, C. H. and Chopra, I., "Aeroelastic Stability Analysis of a Composite Rotor Blade," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 30, No. 2, 1985.
- (3) Berdichevsky, V. L., Armanios, E., Badir, A., "Theory of Anisotropic Thin-Walled Closed Cross-Section Beams," *Composites Engineering*, Vol. 2, Nos. 5-7, 1992.
- (4) Rehfield, L. W., et al., "Nonclassical Behavior of Thin-Walled Composite Beams with Closed Cross Sections," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 35, No. 2, 1990.
- (5) Smith, E. C. and Chopra, I., "Formulation and Evaluation of an Analytical Model for Composite Box-Beams," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 36, No. 3, July 1991.
- (6) Stemple, A. D. and Lee, S. W., "Finite Element Model for Composite Beams with Arbitrary Cross Sectional Warping," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 12, Dec. 1988.
- (7) 정성남, 임의의 단면형상을 갖는 복합재료 보의 첨단 구조해석 모델 개발에 관한 연구, 한국항공우주학회지, 제28권, 제1호, 2000.

Table 1 Layup cases of box section.

|    | Anti-symmetric | Symmetric |
|----|----------------|-----------|
| I  |                |           |
| II |                |           |

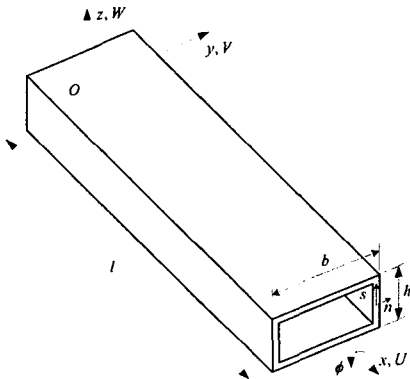


Fig. 1 Geometry of a box-beam.

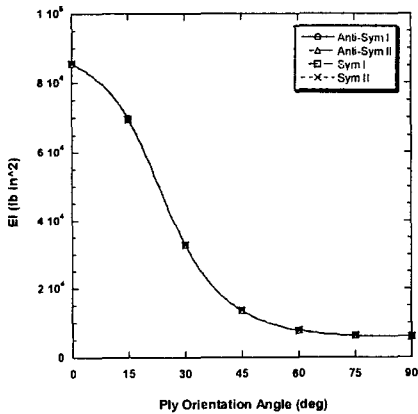


Fig. 2 Variation of bending stiffness with ply angle changes.

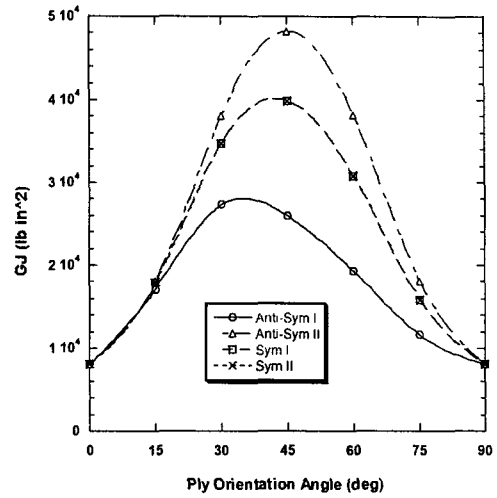


Fig. 3 Variation of torsional stiffness with ply angle changes.

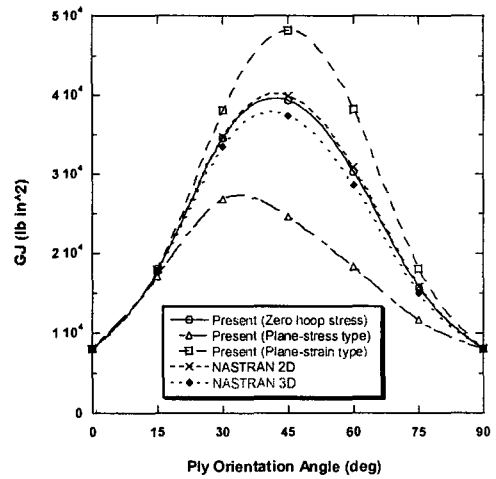


Fig. 4 Comparison of torsional stiffness for the symmetric box-section beam.