

특별직교이방성 이론에 의한 포스트 텐션된 교량의 해석(Ⅱ) - 강 판형교 -

김덕현*·원치문**·이정호***

Analysis of Post-tensioned Bridge by Specially Orthotropic Laminate Theory (Ⅱ) - Steel Plate Girder Bridge

Kim, D. H., Won, C. M. and Lee, J. H

Key Words: Specially Orthotropic Laminates, Post-tensioned Bridge, Finite Difference Method, Steel Plate Girder Bridge

Abstract

A post-tensioned steel plate girder bridge with cross-beams is analyzed by specially orthotropic laminate theory. The cross-sections of both girders and cross-beams are WF types. The result is compared with that of the beam theory. This bridge with simple support is under uniformly distributed vertical load, and axial loads and moment due to post-tension.

In this paper, finite difference method for numerical analysis of simple supported bridge is developed. Relatively exact solution is obtained even with small number of meshes. Theory and analysis method of specially orthotropic laminate plates used in this paper can be used in design of new bridges, and maintenance and repair of old bridges.

1. 서론

강 판형교 시스템에 대한 해석 방법에는 보 해석방법, 콘크리트와 강보의 합성보 이론을 사용하는 방법과 거더와 가로보에 대한 격자해석방법 [1,2] 등을 들 수 있다. 일례로 1967년에 설계되고 건설된 서울의 3.1 고가 도로는 격자해석, 합성작용, 용접사용, 혼합재료사용, 고장력 볼트사용 등의 방법을 도입함으로써 건설에 소요된 강재량은 그 당시 최상으로 설계된 것의 절반 이하로 줄일 수 있었다.[1] 이와 같은 예에서처럼 설계 및 해석에 어떠한 방법을 사용하느냐에 따라 강재의 사용량에 큰 차이를 나타냄을 알 수

있다.

이 논문에서는 단순지지된 I-형 플레이트 거더에 프리스트레스 힘이 작용할 때 특별직교이방성 판 이론에 의해 해석하였다. 이때 상부 콘크리트 슬래브는 강성이 없이 사하중으로 작용한다고 가정하였고 편미분방정식은 유한차분법을 이용하여 해석하였으며 본 해석방법의 정확도를 입증하기 위해 망의 크기에 따라 등분포 하중을 받는 플레이트 거더의 중앙점 처짐과 비교.검토했다.

연구 결과 프리스트레스의 작용위치와 크기에 따른 모멘트와 처짐을 계산하여 강판형교 교량의 설계와 기존 교량의 유지.보수시 실무자료로 이용할 수 있도록 도표와 그림으로 나타내었다.

2. 기본 이론

2.1 강성계산

본 논문에서는 해석의 편리성을 위해 강판형교의 콘크리트 슬래브의 강성을 무시하고 슬래브를 하중

* Korea Composites 대표
** 한라대학교 건축토목공학부 전임강사
*** 영동대학 토목과 전임강사

으로만 고려하였다. 따라서 고려된 주 거더는 그림 1과 같이 I-형 거더이며 일반적인 휨 강성은 다음 식(1)과 같다.

$$ST_b = [2(D_{11})b + 2(A_{11})b\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (A_{11})\frac{h^3}{12}] \approx A_{11}(6h^2b + h^3)/12 \quad (1)$$

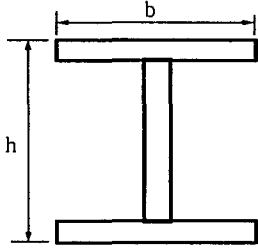


그림 1. I형 거더의 단면

이때 중립면에 대하여 대칭을 이루는 1차원의 얇은 구조부재의 경우, Q_{11} 은 다음 식(2)와 같다.

$$Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \quad (2)$$

이것으로부터 휨 강성인 ST_b 와 E_1I 와 같다는 것을 알 수 있다. 즉, $ST_b = E_1I$ 이다.

따라서 본 연구에서는 대칭이면서 균질(isotropic)한 I형 거더에 대해 휨 강성을 계산하고 이를 거더의 간격으로 나누어 단위길이당 휨 강성을 구하여 사용하였다.

2.2 교량 상판 시스템의 수치 Modeling

등분포 수직하중과 축방향 등분포 하중을 동시에 받는 특별직교이방성 복합적층판의 평형방정식은 다음 식(3)과 같다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y) \quad (3)$$

이 때 단면력과 처짐과의 관계는 다음 식(4), (5), (6)과 같다.

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

식(6)을 식(3)에 대입하면 평형방정식은 다음 식(7)의 형태로 된다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q(x, y) \quad (7)$$

식(7), (4), (5)를 차분식으로 전개하고

$$C_1 = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad C_2 = \frac{1}{\Delta y^2}, \quad C_3 = \frac{4D_{66}}{\Delta x^2 \Delta y^2},$$

$$C_4 = \frac{D_{11}}{\Delta x^2}, \quad C_5 = \frac{D_{12}}{\Delta y^2}, \quad C_6 = \frac{D_{12}}{\Delta x^2}, \quad C_7 = \frac{D_{22}}{\Delta y^2},$$

$$C_8 = \frac{N_x}{\Delta x^2} \text{ 라고 정의하면 다음 식(8), (9), (10)을 얻는다.}$$

$$C_1 [M_{x,i-1,j} - 2M_{x,i,j} + M_{x,i+1,j}] - C_3 \begin{bmatrix} w_{i-1,j+1} & -2w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} \\ -2w_{i-1,j} & 4w_{i,j} & -2w_{i+1,j} \\ w_{i-1,j-1} & -2w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} M_{y,i,j+1} \\ -2M_{y,i,j} \\ M_{y,i,j-1} \end{bmatrix} - C_8 [w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}] = -q(i, j) \quad (8)$$

$$M_x + C_4 [w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}] + C_5 \begin{bmatrix} w_{i,j+1} \\ -2w_{i,j} \\ w_{i,j-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$M_y + C_6 [w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}] + C_7 \begin{bmatrix} w_{i,j+1} \\ -2w_{i,j} \\ w_{i,j-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

교량의 지간방향을 x축으로하고 교량의 폭 방향을 y축으로 하여 그림 2와 같이 정하고 상부 자유지단에서 경계조건을 고려하면 다음 식(11), (12)와 같다.

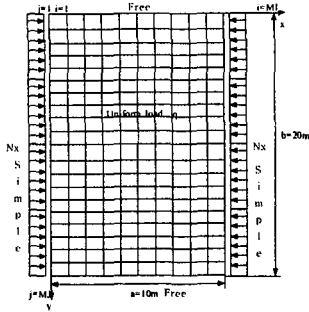


그림 2. 교량 상판의 모델링

$$M_y = -C_6[w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}] - C_7 \begin{bmatrix} w_{i,j+1} \\ -2w_{i,j} \\ w_{i,j-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} - 2D_{66} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (12)$$

식(11)에서 영역밖의 처짐을 영역안의 처짐으로 표시하면 다음 식(13)으로 된다.

$$w_{i,j-1} = -C_{13}w_{i-1,j} + (2+2C_{13})w_{i,j} - C_{13}w_{i+1,j} - w_{i,j+1} \quad (13)$$

식(12)의 두 번째 항을 전향차분법으로 전개하여 정리하면 식(14)로 된다.

$$\begin{aligned} M_{y,i,j-1} &= M_{y,i,j+1} - 4C_{14}w_{i,j+1} + 10C_{14}w_{i+1,j+1} \\ &- 8C_{14}w_{i+2,j+1} + 2C_{14}w_{i+3,j+1} - 2C_{13}C_{14} \\ &w_{i-1,j} + (4+9C_{13})C_{14}w_{i,j} - (10+16C_{13})C_{14}w_{i+1,j} \\ &+ (8+14C_{13})C_{14}w_{i+2,j} - (2+6C_{13})C_{14}w_{i+3,j} \\ &+ C_{13}C_{14}w_{i+4,j} \end{aligned} \quad (14)$$

식(13)과 식(14)를 식(8), (9), (10)에 대입한 후

$$\begin{aligned} C_9 &= \frac{4D_{66}}{\Delta x^2}, \quad C_{10} = \frac{\Delta x^2}{D_{11}} = \frac{1}{C_4}, \quad C_{11} = \frac{1}{2\Delta y}, \\ C_{12} &= \frac{D_{66}}{\Delta x^2 \Delta y}, \quad C_{13} = \frac{C_6}{C_7}, \quad C_{14} = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \\ F_1 &= C_4 + C_5, \quad F_2 = C_6 + C_7, \quad F_4 = -2C_2C_9, \\ F_5 &= -C_8 - C_2C_9, \quad F_6 = 2C_3 - C_8, \quad F_7 = 2C_2C_9 + 2C_8, \\ F_8 &= -4C_3 + 2C_8, \quad A_1 = C_2C_{14}, \\ A_2 &= 14C_3C_{13} - 10C_2C_{14} - 14C_2C_{13}C_{14}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= -14C_3C_{13} + 8C_2C_{14} + 14C_2C_{13}C_{14}, \\ A_4 &= 6C_3C_{13} - 2C_2C_{14} - 6C_2C_{13}C_{14}, \\ A_5 &= -C_3C_{13} + C_2C_{13}C_{14}, \\ A_6 &= -C_8 + 2C_3C_{13} - 2C_2C_{13}C_{14}, \\ A_7 &= 2C_8 - 9C_3C_{13} + 4C_2C_{14} + 9C_2C_{13}C_{14}, \\ A_8 &= -C_8 + 16C_3C_{13} - 10C_2C_{14} - 16C_2C_{13}C_{14}, \\ A_9 &= C_4 - C_5C_{13}, \quad A_{10} = C_6 - C_7C_{13}, \end{aligned}$$

$B_1 = 2C_3 - C_8$, $B_2 = C_4 + C_5$, $B_3 = C_6 + C_7$, 로 정의하여 정리하면 상부 자유단의 시작부분에 대해 다음 식(15), (16), (17)과 같다.

$$\begin{aligned} &(A_6)w_{i-1,j} + C_1M_{x,i-1,j} \\ &+ (A_7)w_{i,j} - 4A_1w_{i,j+1} - 2C_1M_{x,i,j} + 2C_2M_{y,i,j+1} \\ &+ (A_8)w_{i+1,j} + 10A_1w_{i+1,j+1} + C_1M_{x,i+1,j} \\ &+ (A_3)w_{i+2,j} - 8A_1w_{i+2,j+1} \\ &+ (A_4)w_{i+3,j} + 2A_1w_{i+3,j+1} \\ &+ (A_5)w_{i+4,j} = -q(i,j) \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_x + (A_9)w_{i-1,j} - 2A_9w_{i,j} + (A_9)w_{i+1,j} = 0 \quad (16)$$

$$M_y + (A_{10})w_{i-1,j} - 2A_{10}w_{i,j} + (A_{10})w_{i+1,j} = 0 \quad (17)$$

마찬가지로 상부 자유단의 끝부분에 대해 식(12)의 두 번째 항을 후향차분법으로 전개한 후 정리하면 다음 식(18), (19), (20)으로 된다.

$$\begin{aligned} &(A_6)w_{i-1,j} + C_1M_{x,i-1,j} \\ &- 4A_1w_{i,j-1} + (A_7)w_{i,j} - 2C_1M_{x,i,j} + 2C_2M_{y,i,j-1} \\ &+ 10A_1w_{i+1,j-1} + (A_8)w_{i+1,j} + C_1M_{x,i+1,j} \\ &- 8A_1w_{i+2,j-1} + (A_3)w_{i+2,j} \\ &+ 2A_1w_{i+3,j-1} + (A_4)w_{i+3,j} \\ &+ (A_5)w_{i+4,j} = -q(i,j) \end{aligned} \quad (18)$$

$$M_x + (A_9)w_{i-1,j} - 2A_9w_{i,j} + (A_9)w_{i+1,j} = 0 \quad (19)$$

$$M_y + (A_{10})w_{i-1,j} - 2A_{10}w_{i,j} + (A_{10})w_{i+1,j} = 0 \quad (20)$$

마찬가지로 하부 자유단의 시작부분에 대한 차분식은 다음 식(21), (22), (23)으로 된다.

$$\begin{aligned}
& (A_6)w_{i-1,j} + C_1M_{xi-1,j} \\
& -4A_1w_{i,j-1} + (A_7)w_{i,j} - 2C_1M_{xi,j} + 2C_2M_{yi,j-1} \\
& + 10A_1w_{i+1,j-1} + (A_8)w_{i+1,j} + C_1M_{xi+1,j} \\
& -8A_1w_{i+2,j-1} + (A_3)w_{i+2,j} \\
& + 2A_1w_{i+3,j-1} + (A_4)w_{i+3,j} \\
& + (A_5)w_{i+4,j} = -q(i,j)
\end{aligned} \quad (21)$$

$$M_x + (A_9)w_{i-1,j} - 2A_9w_{i,j} + (A_9)w_{i+1,j} = 0 \quad (22)$$

$$M_y + (A_{10})w_{i-1,j} - 2A_{10}w_{i,j} + (A_{10})w_{i+1,j} = 0 \quad (23)$$

하부 자유단의 끝 부분에 대한 차분식은 다음 식 (24), (25), (26)으로 된다.

$$\begin{aligned}
& (A_5)w_{i-4,j} + (A_4)w_{i-3,j} + 2A_1w_{i-3,j+1} \\
& + (A_3)w_{i-2,j} - 8A_1w_{i-2,j+1} \\
& + (A_8)w_{i-1,j} + 10A_1w_{i-1,j+1} + C_1M_{xi-1,j} \\
& + (A_7)w_{i,j} - 4A_1w_{i,j+1} - 2C_1M_{xi,j} + 2C_2M_{yi,j+1} \\
& + (A_6)w_{i+1,j} + C_1M_{xi+1,j} = -q(i,j)
\end{aligned} \quad (24)$$

$$M_x + (A_9)w_{i-1,j} - 2A_9w_{i,j} + (A_9)w_{i+1,j} = 0 \quad (25)$$

$$M_y + (A_{10})w_{i-1,j} - 2A_{10}w_{i,j} + (A_{10})w_{i+1,j} = 0 \quad (26)$$

단순지지된 경계선에서는 처짐과 모멘트가 "0"이므로 차분식을 적용하지 않았으며 상기차분식을 전체 절점에 적용하고 단순지지 경계선에 해당되는 모멘트 M_x 에 대해서는 프리스트레스 힘과 편심거리의 곱으로 계산되는 모멘트를 대입하여 행렬식을 풀면 해를 얻을 수 있다.

3. 수치해석

3.1 해석의 타당성과 정확성 검토

본 연구의 해석방법에 대한 정확성을 입증하기 위해 등분포 수직 하중이 작용할 경우 단순보의 처짐과 슬래브 중앙에서의 처짐을 비교하였다. 먼저 고려한 슬래브의 형상은 그림 3과 같고 망의 크기별 슬래브 중앙에서의 처짐과 단순보의 처짐 비교치를 표 1에 나타내었다.

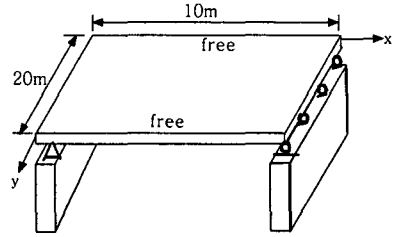


그림 3. 강판형교의 지지상태

표 1에서 보여지듯이 적은 망 분할에서도 매우 높은 정도의 해석결과를 얻을 수 있으므로 본 연구에서는 망의 크기를 1.0m로 고정하고 프리스트레스의 작용 위치인 편심거리 e 와 축방향력인 N_x 의 변화에 따른 구조물의 처짐, 모멘트에 관해 고찰 하고자 한다.

표 1. F.D.M프로그램의 정확도
($L=10m$, $B=20m$, $q=8000 N/m^2$)

Mesh	0.5 ^m	1.0 ^m	1.1 ^m	1.2 ^m
Analysis	×	×	×	×
F.D.M.	0.002184 0467	0.002193 5618	0.002079 1225	0.001869 7391
Beam theory	0.0021526073			
Difference(FDM/ Beam theory)(%)	1.46	1.9	3.41	13.14

3.2 강판형교의 해석

수치해석에서 고려한 대상구조물은 그림 4와 같다. 그림 4에서 보는바와 같이 거더와 가로보를 갖는 지간길이가 10m, 폭이 20m인 교량 시스템을 고려하였다. 작용하중은 자중을 포함한 등분포 하중 17700 N/m를 재하시켜 수치해석을 수행하였다.

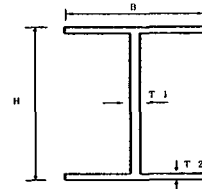


그림 4. 거더와 가로보의 단면

거더와 가로보의 단면 형상은 그림 4와 같으며 I형강의 물성 및 형상은 다음과 같다.

$$E_s = 2,000,000 \text{ kgf/cm}^2, \quad \nu = 0.3$$

- 거더 - - 가로보 -
 $H_L = 500\text{mm}$ $H_T = 300\text{mm}$
 $B_L = 200\text{mm}$ $B_T = 150\text{mm}$
 $T_{1L} = 15\text{mm}$ $T_{1T} = 10\text{mm}$
 $T_{2L} = 20\text{mm}$ $T_{2T} = 18.5\text{mm}$

위의 단면 특성을 고려하고 휨 강성을 계산하면 표 2로 된다[2].

표 2. 강판형교의 휨 강성 D_{ij} (N-m)

D_{11}	62820308.00000
D_{12}	18846094.00000
D_{22}	13504002.00000
D_{66}	21987108.00000

본 논문에서 고려한 강판형 교량 시스템은 그림 5와 같으며, 프리스트레스 힘은 주 거더에 작용시키는 것으로 고려하였다. 축하중의 크기와 작용 위치에 따른 구조 거동을 파악하기 위해 주 거더 하면에서부터 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5m의 편심 거리를 두어 해석하였으며, 이때 축하중은 100000 N으로 고정하였다.

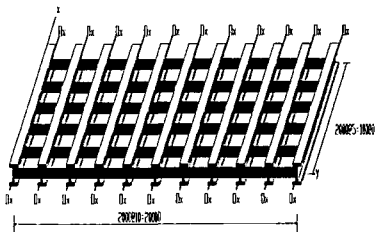


그림 5. 고려된 강판형교

수치해석을 수행한 결과는 표 3 ~ 표 5, 그림 6 ~ 그림 8에 도시하였다.

표 3. 편심거리 증가에 따른 교량중심선상 지점으로부터 위치별 처짐

$$(N_x = 10^5 \text{ N}, q = 1770\text{N/m}), \quad (m)$$

e(m) 위치(m)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	0.01467 9209	0.01380 7012	0.01293 4762	0.01206 2557	0.01119 0383
3	0.03828 3568	0.03620 4658	0.03412 5682	0.03204 6802	0.02996 7902
5	0.04720 1566	0.04470 8658	0.04221 556	0.03972 2499	0.03722 9586
7	0.03828 8832	0.03621 0142	0.03413 1322	0.03205 2536	0.02997 3783
9	0.01468 2441	0.01381 0345	0.01293 8219	0.01206 609	0.01119 3982

표 4. 편심거리 증가에 따른 교량중심선상 지점으로부터 위치별 모멘트, M_x

$$(N_x = 10^5 \text{ N}, q = 1770\text{N/m}), \quad (N-m)$$

e(m) 위치(m)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	89394.7 3438	78564.1 0156	67733.7 2656	56903.2 8906	46072.5 8594
3	227474. 25	215332. 5625	203190. 9375	191049. 4688	178907. 6719
5	275057. 8125	262428. 3125	249798. 125	237168. 7813	224538. 9219
7	227584. 3125	215445. 875	203306. 6563	191168. 1875	179029. 2969
9	89458.6 4844	78630.1 1719	67800.8 3594	56972.5	46143.3 5547

표 5. 편심거리 증가에 따른 교량중심선상 지점으로부터 모멘트, M_y

$$(N_x = 10^5 \text{ N}, q = 1770\text{N/m}), \quad (N-m)$$

e(m) 위치(m)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1m	25371.6 9336	22181.4 2383	18991.1 6602	15800.9 707	12610.7 3828
3m	64460.9 7266	60971.7 5781	57482.3 4375	53993.1 5625	50503.8 8672
5m	77840.8 5938	74240.7 8125	70640.3 125	67040.2 5	63439.9 6094
7m	64483.1 2891	60994.5 8594	57505.9 6484	54017.5 3125	50528.8 8281
9m	25385.8 0664	22196.2 5391	19006.3 457	15816.4 7656	12626.7 6953

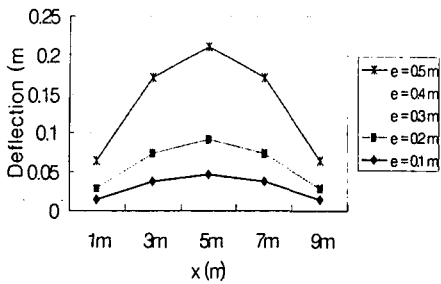


그림 6. 지간방향 거리에 따른 처짐
($N_x=10^5$ N, $q=1770$ N/m)

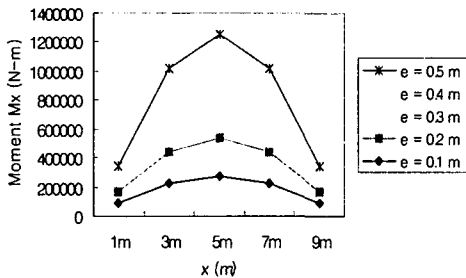


그림 7. 지간방향 거리에 따른 모멘트, M_x
($N_x=10^5$ N, $q=1770$ N/m)

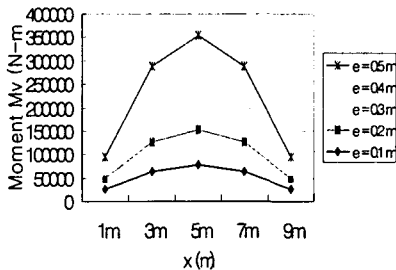


그림 8. 지간방향 거리에 따른 모멘트, M_y
($N_x=10^5$ N, $q=1770$ N/m)

4. 결론

본 논문은 포스트 텐션된 강상판 교량에 대해 특별직교 이방성 이론을 이용한 해석방법을 제시하였다.

프로그램의 신뢰도를 확인하기 위해 단순지지되고 등분포 수직하중을 받는 슬래브에 대해 망

의 크기별로 단순보의 경우와 비교하여 본 해석법의 타당성과 정확성을 입증하였다.

본 논문에서 제시한 축방향 압축력과 단부 모멘트 그리고 등분포 수직하중을 받는 강 판형교 교량에 대한 해석 방법 그리고 해석 결과는 기존 교량의 유지 및 보수·보강뿐만 아니라 복합재료 교량 상판의 설계에 매우 유용하게 쓰일 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- (1) Kim, D. H., Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, E & FN SPON, London, 1995.
- (2) Kim, Duk Hyun(1998) et al., "Design of Steel Slab Systems by Means of Special Orthotropic Plate Theory", Pro., PSSC'98.
- (3) 김덕현, 원치문, 심도식, 이원석, "양단단순-타단자유 지지된 적층복합판의 처짐에 대한 중방향 모멘트 무시효과", 한국전산구조공학회 가을학술발표회 논문집, 1998, pp.77-83.
- (4) 김덕현, 원치문, "복합적층판으로 구성된 토목건설용 구조물의 예비설계를 위한 간편해석법", 한국복합재료학회지, 제13권 2호, 2000, pp.30-39.
- (5) Kim, D. H., "Design of Composite Material Structures", Proc. of China-Japan-USA Trilateral Symposium/Workshop on Earthquake Engineering, Nov.5~9, Harbin, 1991, pp 1-5-1~1-5-10.
- (6) Tsai, S. W., Composite Design, 4th Ed., Think Composite, Dayton, Ohio, 1998.