열차의 좌석용량 배분을 위한 비선형계획모형

A Nonlinear Programming Model for the Solution of the Train Seat Capacity Distribution Problem

김성호* 홍순흠**
Kim, Seongho Hong, Soon-Heum

ABSTRACT

In this paper we present a nonlinear programming model for the solution of the train seat capacity distribution problem (TSCDP) with a numerical example. The TSCDP model finds the optimal capacity distribution methods which minimize the sum of the differences between the demands and the seat capacities. Also the TSCDP provides the information on the degree of the discrepancy between the demand and the seat capacities. One can use the TSCDP model as a tool for planning train seat capacity planning.

1. 서론

최근 세계 각국의 철도회사들은 철도자원의 효율적 활용을 통해 이익을 극대화하기 위한 다양한 노력을 기울이고 있다. 경영과학(operations research)이론을 활용하여 철도자원의 이용 효율성을 높일 수 있다는 사실은 많은 철도회사들이 인식하고 있으며 실제로 많은 사례를 찾아 볼 수 있다. 열차계획(train scheduling)분야는 가장 활발하게 경영과학이론이 활용되는 분야이며(Cordeau, Toth, and Vigo 1998), 최근에는 철도회사의 수익관리시스템(yield management system)에도 활용되고 있는 추세에 있다(Ciancimino, Inzerillo, Lucidi, and Palagi 1999).

본 논문에서는 열차의 좌석용량배분문제(train seat capacity distribution problem: TSCDP)의 해를 구하기 위한 비선형계획모형(nonlinear programming model)을 제시하고자 한다. TSCDP는 열차의 좌석용량을 열차가 서비스하는 다수의 기종점(orgin-destination: 이하 OD라 칭함)에 배분하는 문제를 의미한다. TSCDP는 열차계획에 포함되는 수익성 있는 용량계획작성을 위해 필수적이다. 일반적으로 수송수요는 OD별로 추정되며 따라서 수요를 고려하여 열차의 용량계획을 수립하기 위해서는 열차의 좌석용량을 OD별로 변환하는 것이 필요하다.

---

* 한국철도기술연구원 철도운영시스템연구팀 선임연구원
** 한국철도기술연구원 철도운영시스템연구팀 책임연구원

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 절에서 TSCDP 에 대해서 설명하고 3 절에서는 TSCDP 의 해를 구하기 위한 비선형계획모형을 제시한다. 4 절에서는 수치예제를 제시하고 5 절에서 결론을 맺는다.

2. 열차의 좌석용량배분문제

열차의 좌석용량배분문제(train seat capacity distribution problem: TSCDP)는 열차의 좌석용량을 열차가 서비스하는 다수의 기종점(orgin-destination: 이하 OD 라 칭함)에 배분하는 문제를 의미한다. 열차계획[1]에서 열차의 좌석용량은 수요(여객수)와 공급(좌석수)을 일치시킴으로서 여객만족도 또는/그리고 철도회사의 수입을 최대화하도록 할당되어야 한다. 이를 위해서는 열차에 할당된 용량에 따른 수요와 공급의 불일치 정도를 나타내는 함수가 필요하다. 그런데 열차에 할당된 용량과 수요·공급의 불일치 정도간의 관계는 용량을 OD 에 배분하는 방법에 따라 달라지게 되며 본 논문에서 제시하고자 하는 TSCDP 모형은 수요·공급의 불일치 정도를 최소화하는 용량배분방법을 찾고 동시에 최소화된 수요·공급의 불일치 정도에 관한 정보를 제공한다.

2.1 레그와 OD 간의 관련성

레그(leg)는 이웃한 두 정차역 구간을 의미하며 일반적으로 1 개 이상의 OD 를 포함한다. 예를 들어 어떤 열차가 서울발 부산행이며 대전과 동대구에서 정차한다고 하자. 이 경우 그림 1에 나타낸 바와 같이 L_1, L_2, L_3 등 3 개의 레그가 형성되며 이 열차는 OD_1, OD_2, OD_3, OD_4, OD_5, OD_6 등 6 개의 OD 에 수송서비스를 제공할 수 있다.

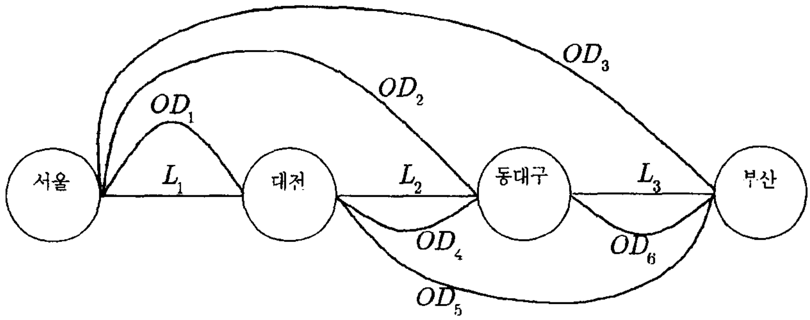

그림 1 레그와 OD 간의 관계

그림 1에서 L_1 은 OD_1, OD_2, OD_3 을 포함한다. 즉 서울-대전 구간에서는 서울에서 대전까지 가고자 하는 여객, 서울에서 동대구까지 가고자 하는 여객, 서울에서 부산까지 가고자 하는 여객들이 열차에 함께 승차하게 된다.

[1] 열차계획(train schedule)은 열차의 시·종착역 구간내의 각 레그별 출발시각, 도착시각 및 열차의 용량에 대한 계획으로서 철도운영기관의 종업원들이 수행해야 할 직무일 뿐만 아니라 철도운영기관이 생산하는 수송서비스의 상품목록이라 할 수 있다. 열차계획은 수요의 변화에 따라 주기적으로 개정되는데 프랑스의 SNCF 나 대만의 대만철도국 등은 6 개월에 한번씩 개정하고 있으며 우리나라의 경우는 1~2 년에 한번씩 개정하고 있다.

레그에 여러 개의 OD가 포함되므로 레그용량을 각 OD에 배분하는 방법은 여러 가지가 가능하게 되며 어떻게 배분하는가에 따라 수요와 공급의 차이가 달라지게 된다. 예를 들어 L_1의 좌석용량의 대부분이 서울-부산 여객에게 배분될 경우 서울-대전 여객과 서울-동대구 여객은 좌석부족으로 승차하지 못할 가능성이 높아진다. L_1의 용량배분은 다른 레그에 포함된 OD에도 영향을 주게 된다. L_2 및 L_3의 좌석용량 배분도 서로 관련되어 있는 OD에 영향을 주게 된다. Kniker and Barnhart(2000)는 항공교통의 상황에서 레그의 좌석용량 배분이 OD여객의 스필발생 가능성에 주는 영향을 네트워크효과(network effect)라는 개념으로 설명한 바 있다.

2.2 스필의 개념

스필(spill)은 좌석용량의 제약으로 승차하지 못한 여객수를 의미한다. 즉 스필은 수요·공급의 불일치 정도를 나타내 주는 지표라 할 수 있으며, 스필의 발생은 여객불만족의 증가 또는 잠재수입의 상실을 의미한다. 스필을 추정하기 위한 스필모형은 1970년대 중반부터 항공분야를 중심으로 많은 연구가 이루어 졌으며(Shlifer and Vardi 1975), 수익관리시스템에 통합되어 특정 노선에 투입할 항공기의 규모 또는 유형의 결정, 신규도입 항공기의 유형 결정 등에 필요한 정보를 생성하는데 활용되어 왔다.

어떤 OD의 수요를 X라하고 용량을 C라하자. 수요 X를 확정변수로 가정하면 스필 S는 수식 1로 나타낼 수 있다.

$$S = X - C \qquad \text{수식 1}$$

수식 1에 나타낸 스필모형은 계산이 편리하다는 장점이 있으나 수요의 불확실성을 반영하지 못한다는 단점이 있다. 수요의 불확실성을 효과적으로 나타내는 방법은 수요 X를 그림 2와 같이 확률분포로 표현하는 것이다. 그림 2에서 $f(x)$는 수요 X의 확률밀도함수(probability density function)이며 음영으로 나타낸 부분의 면적은 스필 S가 발생할 확률을 의미한다. 수요 X는 용량 C보다 작은 값으로 발생할 수도 있고 용량 C보다 큰 값으로 발생할 수도 있다. 스필 S는 $X > C$의 경우에만 발생하며 그 기대값 $\tilde{S}$은 수식 2와 같이 나타낼 수 있다.

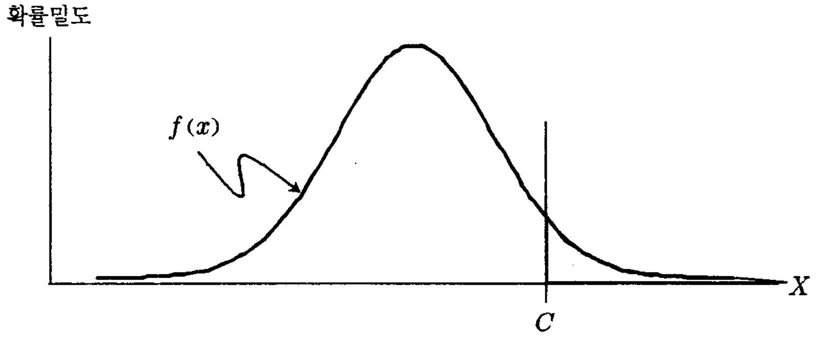

그림 2 수요의 분포

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= E(S|X > C) \\ &= E(X - C|X > C) \\ &= \int_C^{\infty}(x - C)f(x)dx\end{aligned} \qquad \text{수식 2}$$

Swan(1984)은 수요 X의 확률분포로 평균이 μ, 표준편차가 σ인 정규분포를 가정하고 기대스필(expected spill) $\tilde{S}$을 결정하기 위한 스필모형을 수식 3과 같이 유도하였다.

$$\tilde{S} = \sigma\left[\phi(b) - b\left(1 - \Phi(b)\right)\right] \qquad \text{수식 3}$$

여기서 $b = (C - \mu)/\sigma$

$$\phi(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left\{-0.5x^2\right\}$$

$$\Phi(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-0.5t^2\right\}dt$$

본 논문에서 제시하는 TSCDP 모형은 열차가 서비스하는 각 OD의 수요·공급의 불일치정도를 Swan의 스필모형을 사용하여 나타낸다.

3. 비선형계획모형

본 논문에서 제시하는 TSCDP 모형은 OD 수요가 정규분포를 따르는 확률변수인 것으로 가정한 상태에서 열차의 좌석용량을, 열차가 서비스하는 다수의 OD에 대해서 각 OD의 수요·공급의 불일치정도 즉 기대스필이 최소가 되도록 배분하는 방법을 찾는 비선형계획모형(nonlinear programming model)이다.

모형을 수식으로 표현하기 위해 다음과 같은 기호를 가정한다.

L = 레그들의 집합을 의미하며 이 집합의 원소는 l, k로 나타냄.

J = OD들의 집합을 의미하며 이 집합의 원소는 j로 나타냄.

J_l = J의 부분집합으로 레그 l에 포함된 OD들의 집합을 의미함.

$\bar{J}_l$ = $J_l - \bigcup_{i=1}^{l-1} J_i$ (J_0는 공집합)

p = 스필비율의 하한값을 의미함(모수).

x_j^l = 레그 l의 용량 중에서 OD j에 배분된 용량을 의미함(모형의 결정변수임).

C_l = 레그 l의 용량

μ_j = OD j 수요의 평균을 의미함.

σ_j = OD j 수요의 표준편차를 의미함.

$\tilde{S}_j$ = OD j 의 기대스필을 의미하며 다음의 수식 4로 계산됨.

$$\tilde{S}_j = \sigma_j \left[\phi\left(b_j\right) - b_j \cdot \left(1 - \Phi\left(b_j\right)\right) \right] \qquad \textbf{수식 4}$$

여기서 $b_j = \left(x_j^l - \mu_j\right) / \sigma_j, \quad j \in \bar{J}_l, \; l \in L$

기대스필을 최소화하는 TSCDP 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} \tilde{S}_j \qquad \textbf{수식 5}$$

Subject to

$$\sum_{j \in J_l} x_j^l \le C_l, \quad l \in L \qquad \textbf{수식 6}$$

$$x_j^l = x_j^k, \quad j \in J, \; l,k \in L \qquad \textbf{수식 7}$$

$$\tilde{S}_j / \mu_j \ge p, \quad j \in J \qquad \textbf{수식 8}$$

$$x_j^l \ge 0, \quad j \in J, \; l \in L \qquad \textbf{수식 9}$$

수식 5는 각 OD 별 기대스필의 합을 최소화한다는 의미이다. 수식 6은 각 레그별로 OD에 배분되는 용량의 합 $\sum_{j \in J_l} x_j^l$ 이 레그에 할당된 용량 C_l 을 초과할 수 없음을 의미한다. 수식 7은 OD j 에 배분된 용량은 레그가 달라져도 일정함을 의미한다. 예를 들어 그림 1에서 L_1 의 용량이 100석이라 하자. OD_1 은 L_2 와 L_3 에도 포함되어 있으므로, L_1 의 100석중 OD_1 에 40석이 배분된 경우 L_2 와 L_3 의 용량중 40석이 OD_1 에 배분되어야 한다. 만약 L_2 에서 OD_1 에 30석이 배분된다면 서울에서 부산을 가고자 하는 여객중 10명이 대전에서 내려야 하는 결과를 초래하게 된다. L_2 에서 OD_1 에 50석을 배분한다면 이는 서울에서 부산을 가고자 하는 여객중 10명이 대전에서 승차한다는 의미로 모순이다. 수식 8에서 S_j / μ_j 은 OD j 의 평균수요 μ_j 중에서 스필될 것으로 기대되는 사람들 S_j 의 비율(스필비율)을 의미하며, 이 수식은 각 OD 별 스필비율이 p 보다 크거나 같아야 함을 의미한다. 이 제약조건은 비정상적인 극단적 해가 발생하지 않도록 해준다. 수식 9는 모든 결정변수의 값이 음수가 아님을 의미한다.

4. 수치예제

여기서는 대전과 동대구에 정차하는 서울발 부산행 새마을호 열차의 과거수송실적 자료에 근거하여 재구성한 수송수요 및 용량자료에 대해서 앞의 수식 5 ~ 수식 9에서 제시한 TSCDP 모형을 적용한 수치예제를 제시한다. 도표 1에 나타낸 수요자료는 1998년 3월 4일부터 4월3일까지의 31일간,

대전과 동대구에 정차하는 서울발 부산행 새마을호 열차의 과거수송실적 자료를 기초로 구성한 것이다.

도표 1 수요자료

OD	j	평균(μ_j)	표준편차(σ_j)
서울-대전	1	94	14
서울-동대구	2	147	23
서울-부산	3	166	28
대전-동대구	4	25	4
대전-부산	5	58	7
동대구-부산	6	126	21

열차의 용량은 좌석이 20개인 새마을동차 2량과 좌석이 64개인 객차 3량, 그리고 좌석이 60개인 객차 1량으로 이루어진 292석 편성으로 가정한다.

대전과 동대구에 정차하므로 레그는 서울-대전, 대전-동대구, 동대구-부산 등 3개가 형성되며 OD는 도표 1에 나타나 있듯이 6개가 가능하다. 즉 $L = \{1, 2, 3\}$, 여기서 1 = 서울-대전, 2 = 대전-동대구, 3 = 동대구-부산 레그이다. 그리고 $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 여기서 1 = 서울-대전, 2 = 서울-동대구, 3 = 서울-부산, 4 = 대전-동대구, 5 = 대전-부산, 6 = 동대구-부산 등이다. 각 레그별로 포함된 OD는 그림 1로부터 쉽게 알 수 있으며 이를 기호로 나타내면 $J_1 = \{1,2,3\}$, $J_2 = \{2,3,4,5\}$, $J_3 = \{3,5,6\}$이다. 각 레그별로 $\bar{J}_1 = \{1,2,3\}$, $\bar{J}_2 = \{4,5\}$, $\bar{J}_3 = \{6\}$이 된다.

각 OD별로 기대스필 $\tilde{S}_j$, $j \in J$을 나타내면 아래의 도표 2와 같다.

도표 2 OD별 기대스필

OD (j)	레그 (l)	$\tilde{S}_j$
1	1	$\tilde{S}_1 = 14\left[\phi\left(\frac{x_1^1 - 94}{14}\right) - \frac{x_1^1 - 94}{14}\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{x_1^1 - 94}{14}\right)\right)\right]$
2	1	$\tilde{S}_2 = 23\left[\phi\left(\frac{x_2^1 - 147}{23}\right) - \frac{x_2^1 - 147}{23}\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{x_2^1 - 147}{23}\right)\right)\right]$
3	1	$\tilde{S}_3 = 28\left[\phi\left(\frac{x_3^1 - 166}{28}\right) - \frac{x_3^1 - 166}{28}\cdot\left(1 - \Phi\left(\frac{x_3^1 - 166}{28}\right)\right)\right]$

4	2	$\tilde{S}_4 = 4\left[\phi\left(\frac{x_4^2 - 25}{4}\right) - \frac{x_4^2 - 25}{4} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{x_4^2 - 25}{4}\right)\right)\right]$
5	2	$\tilde{S}_5 = 7\left[\phi\left(\frac{x_5^2 - 58}{7}\right) - \frac{x_5^2 - 58}{7} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{x_5^2 - 58}{7}\right)\right)\right]$
6	3	$\tilde{S}_6 = 21\left[\phi\left(\frac{x_6^3 - 126}{21}\right) - \frac{x_6^3 - 126}{21} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{x_6^3 - 126}{21}\right)\right)\right]$

292석 편성의 용량과 도표 1에 나타낸 수요자료에 적용한 TSCDP 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

Minimize $\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4 + \tilde{S}_5 + \tilde{S}_6$ **수식 10**

Subject to

$x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 \le 292$ **수식 11**

$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \le 292$ **수식 12**

$x_3^3 + x_5^3 + x_6^3 \le 292$ **수식 13**

$x_2^1 = x_2^2$ **수식 14**

$x_3^1 = x_3^2 = x_3^3$ **수식 15**

$x_5^2 = x_5^3$ **수식 16**

$\tilde{S}_1 / 94 \ge 0.1$ **수식 17**

$\tilde{S}_2 / 147 \ge 0.1$ **수식 18**

$\tilde{S}_3 / 166 \ge 0.1$ **수식 19**

$\tilde{S}_4 / 25 \ge 0.1$ **수식 20**

$\tilde{S}_5 / 58 \ge 0.1$ **수식 21**

$\tilde{S}_6 / 126 \ge 0.1$ **수식 22**

$x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_3^3, x_5^3, x_6^3 \ge 0$ **수식 23**

수식 10부터 수식 23까지의 TSCDP 모형에 대한 해를 Excel solver[2]를 이용하여 구한 결과는 다음과 같다.

[2] Excel solver의 비선형 최적화 코드는 Generalized Reduced Gradient 법을 사용하고 있다.

$x_1^1 = 77$, $x_2^1 = x_2^2 = 103$, $x_3^1 = x_3^2 = x_3^3 = 112$, $x_4^2 = 23$, $x_5^2 = x_5^3 = 53$, $x_6^3 = 119$,
$\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4 + \tilde{S}_5 + \tilde{S}_6 = 137$

이 결과는 예제열차에 292석 편성으로 용량을 할당할 경우 예상되는 스필은 137명이며 스필이 137명보다 더 작게 발생하도록 좌석용량을 배분하는 방법은 찾을 수 없음을 의미한다.

5. 결론

본 논문에서는 열차의 좌석용량배분문제(train seat capacity distribution problem: TSCDP)의 해를 구하기 위한 비선형계획모형을 제시하였다. 열차계획에서 열차의 좌석용량은 수요와 공급을 일치시킴으로서 여객만족도 또는/그리고 철도회사의 수입을 최대화하도록 할당되어야 하며 이를 위해서는 열차에 할당된 용량에 따른 수요와 공급의 불일치 정도를 나타내는 함수가 필요하다. 본 논문에서는 수요·공급의 불일치 정도를 Swan(1984)의 스필개념으로 나다내고 이를 최소화하는 용량배분방법을 찾기 위한 비선형계획모형을 제시하였고 그에 대한 수치예제도 함께 제시하였다. 본 논문에서 제시한 TSCDP 모형은 수요를 확률변수로 가정함으로서 수요에 대한 불확실성을 모형에서 명시적으로 고려한다는 특성을 가지고 있으며, 수요와 공급의 불일치 정도를 최소화하는 좌석용량배분방법과 더불어 수요·공급간의 불일치정도에 관한 정보를 함께 제공한다.

참고문헌

Cordeau, J.- F., P. Toth, and D. Vigo, "A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling," *Transportation Science*, vol. 32, no 4, pp. 380-404, 1998.

Ciancimino, A., G. Inzerillo, S. Lucidi, and L. Palagi, "A Mathematical Programming Approach for the Solution of the Railway Yield Management Problem," *Transportation Science*, vol. 33, no 2, pp. 168-181, 1999.

Kniker, T. S., and C. Barnhart, "Itinerary-Based Airline Fleet Assignment," Center for Transportation Studies, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2000.

Shlifer, R., and Y. Vardi, "An Airline Overbooking Policy," *Transportation Science*, vol. 9, pp. 101-114, 1975.

Swan, W. M., "Traffic Losses at High Load Factors," Paper Presented at the 24th Annual AGIFORS Conference, Strasbourg, France, 1984.