한국측량학회

# 타원체상에서 경계획선을 위한 중간점 계산의 정확도 연구

# Accuracy of Mid Point Computation for Boundary Delimitation on Ellipsoid

김병국/인하대학교 지리정보공학과 부교수
이종기/인하대학교 지리정보공학과 석사과정

## 1. 서　론

경계획선은 UNCLOS III(United Nations, 1982)에서 시작된, 국가들 사이의 협상 중 매우 중요한 쟁점이었다. 각각의 협상의 문제는 공평의 법적 원칙이 엄격하게 적용되는 국제적 경계를 결정하는 것이다. 하나의 공식이 각국의 경제적, 지형적 그리고 주위요소와의 전략적 경우에 모두 적용될 수 없기 때문에 어떠한 특별한 방법이 정해지지 않았다. 그러나 균등한 경계를 얻기 위한 몇 가지 지침 중에 하나는 등거리 원칙(the principle of equidistant)에 의거한 일반적인 규칙을 사용한다.

이 논문에서는 등거리 원칙을 기본으로 하는 알고리즘을 정립한 후, 결과를 확인할 수 있는 경계 획선 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램은 인공지물이나 지형지물이 없어 경계를 결정하기 어려운 해양경계 획선시 특히 유용하게 사용될 수 있다. 이 프로그램을 이용하여 중간점을 계산한 후 오차예측을 하였다. 또한, 3개의 기준면(plane, sphere and ellipsoid)에 따라 계산된 좌표의 오차예측을 통하여 적합한 알고리즘 및 기준면을 제안하였다.

## 2. 경계 획선 방법 및 오차예측

타원체 상에서 등거리 원칙을 적용하기 위해서는 다음부터 설명할 두 가지 알고리즘이 많이 사용된다. 첫번째 알고리즘은 해안을 따라서 인접한 한쌍의 기준선 점으로부터 균등한 거리에 있는 경계의 중간점(mid-point)의 좌표를 찾는 것이다. 두번째 알고리즘은 인접한 세점으로부터 얻어진다는 것이 다를 뿐이다.

### 2.1 Two-Point 알고리즘

Two-Point 알고리즘은 그림 1과 같이 해안선 기준선을 구성하는 점으로부터 각각 양쪽의 기준선에서 각각 한 점($P_1$, $P_2$)씩 선택한 후 등거리 원칙을 적용하여 중간점(mid-point) $P_m$을 정하는 방법이다.

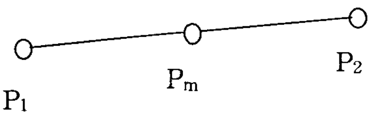


그림 1 Two-Point 알고리즘

#### 2.1.1 평면 또는 구(Plane or Sphere)

평면 또는 구 상에서 Two-Point 알고리즘은 마주보고 있는 두 점의 중간점을 계산함으

로써 얻을 수 있다. 평면 또는 구 상에서 중간점의 좌표는 점 $P_1$과 $P_2$좌표의 평균값이다.

$$X_m = (X_1 + X_2)/2, \quad Y_m = (Y_1 + Y_2)/2 \qquad (1)$$

#### 2.1.2 타원체(Ellipsoid)

타원체상에서 Two-Point 알고리즘은 첫번째로 각각의 기준선에서 선택된 두 점 $P_i$와 $P_j$ 사이의 거리 $S_{ij}$와 방위각 $a_{ij}$을 구한다.

$$S_{ij} = S(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) \alpha_{ij} = \alpha(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) \qquad (2)$$

식(2)에서 계산된 거리와 방위각을 이용하여 점 Pi를 기준으로 중간점 $P_m$의 측지좌표를 결정한다.

$$\phi_m = \phi(\phi_i, \lambda_i, S_{ij}/2, \alpha_{ij}) \lambda_m = \lambda(\phi_i, \lambda_i, S_{ij}/2, \alpha_{ij}) \qquad (3)$$

마지막으로, 중간점 Pm이 유효한 경계 중간점으로서 만족해야 할 조건은 그 거리 가 $P_i$ 또는 $P_j$에 작거나 같아야 하고 모든 다른 점들에서도 마찬가지여야 한다.

$$\frac{S_{ij}}{2} \le S_{mu} \qquad u = 1, 2, 3, \ldots, p \quad u \ne i, j \qquad (4)$$

$$\frac{S_{ij}}{2} \le S_{mv} \qquad v = 1, 2, 3, \ldots, p \quad v \ne i, j \qquad (5)$$

여기서 u와 v는 첫번째와 두번째 기준선에서 발견된 모든 점들을 나타낸다.

### 2.2 Three-Point 알고리즘

Three-Point 알고리즘은 그림 2와 같이 양쪽 기준선에서 세점($P_1$, $P_2$, $P_3$)을 선택한다. 한쪽 기준선에서 한점, 반대쪽 기준선에서 두점을 선택하여, 세점에서 등거리인 중간점($P_m$)을 찾는 방법이다.

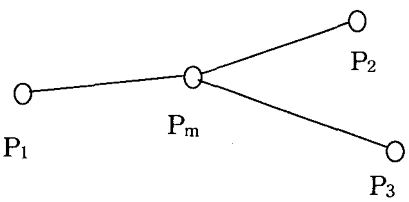


그림 2 Three-Point 알고리즘

#### 2.2.1 평면 또는 구(Plane or Sphere)

평면 또는 구 상에서 Three-Point 알고리즘은 세 점에서 등거리에 있는 중간점을 계산함으로써 얻을 수 있다. 두 점($P_1$, $P_2$)이 한쪽 기준선에 있고 나머지 한점($P_3$)이 반대쪽 기준선에 있다고 가정하면 중간점 $P_m$는 $P_1$과 $P_2$ 그리고 $P_2$와 $P_3$의 각각의 중간점에서의 수직인 두 선의 교차점이 된다.

$$Y_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_3^2 + y_3^2)\cdot(x_2 - x_1) + (x_2^2 + y_2^2)\cdot(x_1 - x_3) + (x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_3 - x_2)}{y_3\cdot(x_1 - x_2) + y_2\cdot(x_3 - x_1) + y_1\cdot(x_2 - x_3)} \qquad (6)$$

$$X_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_3^2 + y_3^2)\cdot(y_2 - y_1) + (x_2^2 + y_2^2)\cdot(y_1 - y_3) + (x_1^2 + y_1^2)\cdot(y_3 - y_2)}{y_3\cdot(x_1 - x_2) + y_2\cdot(x_3 - x_1) + y_1\cdot(x_2 - x_3)} \qquad (7)$$

### 2.2.2 타원체(Ellipsoid)

타원체 상의 세점 $P_1(\phi_1, \lambda_1)$, $P_2(\phi_2, \lambda_2)$ 그리고 $P_3(\phi_3, \lambda_3)$에서 동일한 거리를 갖는 점을 $P_m(\phi_m, \lambda_m)$이라 하고, $P_1$에서 $P_m$사이의 거리를 $s_1$이라 하면, $s_1 = s_2 = s_3$의 등거리 공식이 성립한다. 중간점 $P_m$의 초기 근사치를 $(\phi^0_m, \lambda^0_m)$ 보정치(correction)를 $(\delta\phi_m, \delta\lambda_m)$라 하면, $P_m$의 위치는 다음과 같다.

$$\phi_m = \phi^0_m + \delta\phi_m \quad \lambda_m = \lambda^0_m + \delta\lambda_m \tag{8}$$

일반적으로, 측지선(geodetic line) $s_i$는 $\phi_m$, $\lambda_m$과 $\phi_i$, $\lambda_i$ $(i=1,2,3)$의 함수이다.

$$s = s_i = f(\phi_m, \lambda_m, \phi_i, \lambda_i) = f(\phi^0_m + \delta\phi_m, \lambda^0_m + \delta\lambda_m, \phi_i, \lambda_i) \tag{9}$$

이것은 초기 근사치 좌표 $(\phi^0_m, \lambda^0_m)$을 사용하여 테일러 급수(Taylor series)로 확장할 수 있다.

$$s = s_i = f(\phi^0_m, \lambda^0_m, \phi_i, \lambda_i) + \frac{\partial f}{\partial\phi_m}\cdot\delta\phi_m + \frac{\partial f}{\partial\lambda_m}\cdot\delta\lambda_m + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\cdot(\delta\phi_m)^2 \tag{10}$$

$P_m$의 초기좌표를 알고 있으므로, 근사 측지선 $s^0_i = f(\phi^0_m, \lambda^0_m, \phi_i, \lambda_i)$ 타원체상에서 역문제가 된다. 비선형(non-linear) 항목들을 모두 무시하면, 다음과 같다.

$$s \approx s^0_i + a_i\cdot\delta\phi_m + b_i\cdot\delta\lambda_m, \quad i=1,2,3 \tag{11}$$

여기서, $a_i$, $b_i$는 다음과 같다.

$$a_i = -M^0_m\cdot\cos\alpha^0_{mi}, \quad b_i = N_i\cdot\cos\phi_i\cdot\sin\alpha^0_{im} \tag{12}$$

식(12)에서 $\alpha^0_{mi}$, $\alpha^0_{im}$은 각각 $P_m$에서 $P_i$그리고 $P_i$에서 $P_m$까지의 방위각이고, $(\phi_1, \lambda_1)$와 $(\phi^0_m, \lambda^0_m)$을 이용하여 계산한다. $M^0_m$는 위도 $\phi^0_m$에서 자오선의 곡률반경이고, $N_i$는 위도 $\phi_i$에서 묘유선의 곡률반경이다.

$$M^0_m = \frac{a\cdot(1-e^2)}{(1-e^2\cdot\sin^2\phi^0_m)^{\frac{3}{2}}} \quad N_i = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2\phi_i}} \tag{13}$$

식 (11)의 첫 번째 방정식에서 두 번째와 세 번째 방정식을 빼면, 각각 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \delta\phi_m \\ \delta\lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^0_1 - s^0_2 \\ s^0_1 - s^0_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

위 식의 첫 번째 행렬을 A라고 하면, $(\delta\phi_m, \delta\lambda_m)$는 다음과 같이 계산될 수 있다

$$[\ \delta\phi_m \quad \delta\lambda_m] = A^{-1}\cdot[\ s^0_1 - s^0_2 \quad s^0_1 - s^0_3] \tag{15}$$

$\delta\phi_m$, $\delta\lambda_m$가 계산된 후에 $P_m$의 값은 식 (7)에 의하여 구할 수 있다.

마지막으로, 중간점 Pm이 유효한 경계 중간점으로서 만족해야 할 조건은 그 거리 가 $P_i$에 작거나 같아야 하고 모든 다른 점들에서도 마찬가지여야 한다.

$$S^{(n)} \le S_{mu} \qquad \begin{matrix} u=1,2,3,\ldots,p \\ u \ne i,j,k \end{matrix} \tag{16}$$

$$S^{(n)} \le S_{mv} \qquad \begin{matrix} v=1,2,3,\ldots,p \\ v \ne i,j,k \end{matrix} \tag{17}$$

### 2.3 중간점 오차예측

#### 2.3.1 오차예측 개요

미지값들(unknown values)은 종종 원하는 미지수에 기능적으로(functionally) 관련되어 있는 다른 양들의 직접관측을 통하여 간접적으로 결정된다. 그리고 미지수는 계산된다. 거리 및 각도 관측을 통한 삼각점 좌표계산, 차분 레벨의 읽음으로서 삼각점 높이값 계산, 천문관측을 통한 선의 방위각을 결정하는 측량의 예가 있다. 그러나 모든 직접 관측치는 에러를 가지고 있으므로, 이 직접관측치로 계산한 값도 에러를 가지고 있다.

그러므로 이 에러의 간섭(intrusion) 또는 전파(propagation), 직접 관측치로부터 계산된 것으로부터 에러가 생기는 것을 오차전파(Error Propagation) 또는 오차예측(Error Estimation)이라 한다.

본 연구에서는 단지 임의에러(Random Error)만 직접관측에 남아있다고 가정하기 위하여 모든 규칙적인 에러(systematic error)는 제거한다

#### 2.3.2 Three-Point 알고리즘 오차예측

만약 3개의 기준점 $P_1$, $P_2$, $P_3$이 에러를 포함하고 있다면, 이 에러들은 자동적으로 위 식 (8)과 (15)에서 얻어진 중간점 $P_m$의 좌표 $(\phi_m^0, \lambda_m^0)$로 전파된다. 중간점 $P_m$을 위한 좌표 보정치 $(\delta\phi_m, \delta\lambda_m)$와 기준점 $P_i$(i=1, 2, 3)을 위한 좌표 보정치$(\delta\phi_i, \delta\lambda_i)$의 관계는 $P_m$에서 $P_i$사이의 거리 $s_i$의 선형화를 통하여 구성할 수 있다.

$$s_i = f(\phi_m^0 + \delta\phi_m, \lambda_m^0 + \delta\lambda_m, \phi_i + \delta\phi_i, \lambda_i + \delta\lambda_i) \approx s_i^0 + a_i \cdot \delta\phi_m + b_i \cdot \delta\lambda_m + c_i \cdot \delta\phi_i + d_i \cdot \delta\lambda_i \quad (18)$$

여기서, $s_i, a_i$ 그리고 $b_i$는 이미 정의하였다. 그리고 $c_i$, $d_i$는 다음과 같다.

$$c_i = -M_i \cdot \cos\alpha_{im}^0 d_i = -b_i = -N_i \cdot \cos\phi_i \cdot \sin\alpha_{im}^0 \quad (19)$$

식 (18)에서 두 번째와 세 번째 방정식을 첫 번째 방정식에서 빼면, 각각 다음과 같다

$$[\delta\phi_m, \delta\lambda_m]^T = A^{-1} \cdot [s_1^0 - s_2^0 \quad s_1^0 - s_3^0] + B \cdot [\delta\phi_1 \ \delta\lambda_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\lambda_2 \ \delta\phi_3 \ \delta\lambda_3]^T \quad (20)$$

여기서 A는 식 (15)와 같고 B는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$B = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & -c_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & -c_3 & -d_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

식 (20)에 오차 전파 법칙을 적용하면 $P_m$ 좌표에 대한 variance-covariance 행렬 $\Sigma_m$은 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\Sigma_m = B \cdot \Sigma \cdot B^T \quad (22)$$

여기서 $\Sigma$는 세 기준점 $P_1$, $P_2$, $P_3$에 대한 좌표 벡터 $X_c$의 variance-covariance 행렬이다.

$$X_c = [\phi_1 \ \lambda_1 \ \phi_2 \ \lambda_2 \ \phi_3 \ \lambda_3]^T \quad (23)$$

## 3. 해양경계 획선 프로그램 개발

본 연구에서 개발한 경계획선 소프트웨어는 인접한 국가간의 경계를 결정하기 위한 컴퓨터 프로그램이다. 이 프로그램은 타원체상의 거리, 좌표변환 등의 측지학적 계산이 가능하며, 특히 해양경계 획선에 유용하게 사용될 수 있다.

### 3.1 테스트 및 오차예측 결과

위 두 알고리즘 결과를 보기 위하여 서해(The Yellow Sea)를 중심으로 중국지역 기준점 8개와 우리나라 지역 기준점 9개를 선택하였고 선택된 기준점 좌표는 표1과 같다.

| 기준점 (Base Point) | 중 국(China) | | 대한민국(Korea) | |
|---|---|---|---|---|
| | 위도(Latitude) | 경도(Longitude) | 위도(Latitude) | 경도(Longitude) |
| 1 | 37-24-00 | 122-42-18 | 36-58-38 | 125-45-02 |
| 2 | 36-57-48 | 122-34-12 | 36-36-36 | 125-32-30 |
| 3 | 36-53-42 | 122-31-06 | 36-07-05 | 125-58-11 |
| 4 | 36-44-48 | 122-15-48 | 35-53-10 | 126-04-15 |
| 5 | 35-53-30 | 120-53-06 | 35-39-30 | 126-06-16 |
| 6 | 35-00-12 | 119-54-12 | 35-20-03 | 125-59-14 |
| 7 | 33-21-48 | 121-20-48 | 34-43-03 | 125-11-25 |
| 8 | 33-00-54 | 121-38-24 | 34-40-18 | 125-10-25 |
| 9 | | | 34-06-51 | 125-04-42 |

표 1 테스트에 사용한 기준점(Base Point)

표1의 기준점을 두 알고리즘을 적용하여 중간점을 계산한 결과는 표2에 정리되어 있다. 그림 3은 Two-point 알고리즘을 사용하였을 때 5개의 중간점이 계산되어 해안의 굴곡에 따른 중간선을 충분히 표현할 수 없었으나, 그림4와 같이 Three-point 알고리즘을 사용하였을 경우 8개의 중간점이 계산되어 양쪽 기준선간의 중간 지역을 충분히 표시할 수 있었다.

| 중간점 (Turning Point) | Two-Point 알고리즘 사용 | | Three-Point 알고리즘 사용 | |
|---|---|---|---|---|
| | 위도(Latitude) | 경도(Longitude) | 위도(Latitude) | 경도(Longitude) |
| 1 | 37-00-48.5532 | 124-07-50.4192 | 37-17-40.8516 | 124-15-10.5660 |
| 2 | 36-47-45.4164 | 124-03-33.2820 | 35-10-33.9600 | 123-09-41.2848 |
| 3 | 35-48-49.5648 | 123-52-21.1476 | 34-37-42.5316 | 122-56-56.8104 |
| 4 | 33-34-35.5800 | 123-20-53.7756 | 36-53-13.4520 | 124-04-33.6612 |
| 5 | 34-49-25.4152 | 122-54-46.1801 | 36-12-35.7780 | 123-57-19.3284 |
| 6 | | | 35-31-52.9428 | 123-31-38.4492 |
| 7 | | | 34-54-25.7292 | 122-52-46.5708 |
| 8 | | | 34-07-23.7072 | 123-05-49.4376 |

표 2 알고리즘별 중간점 결과

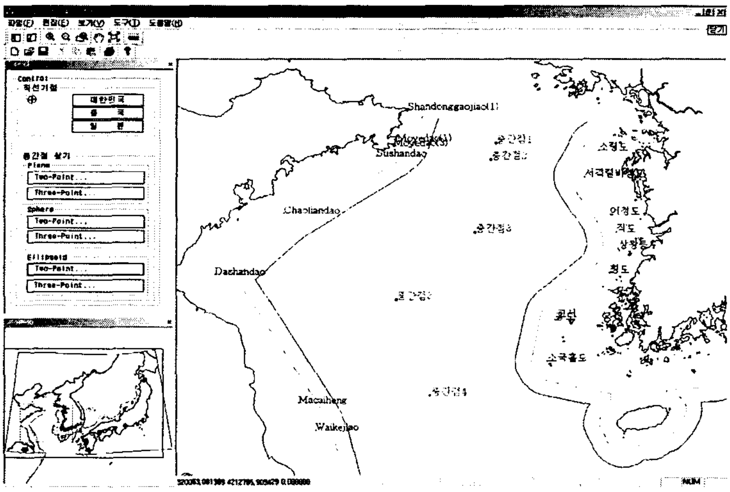

그림 3 Two-Point 알고리즘 결과

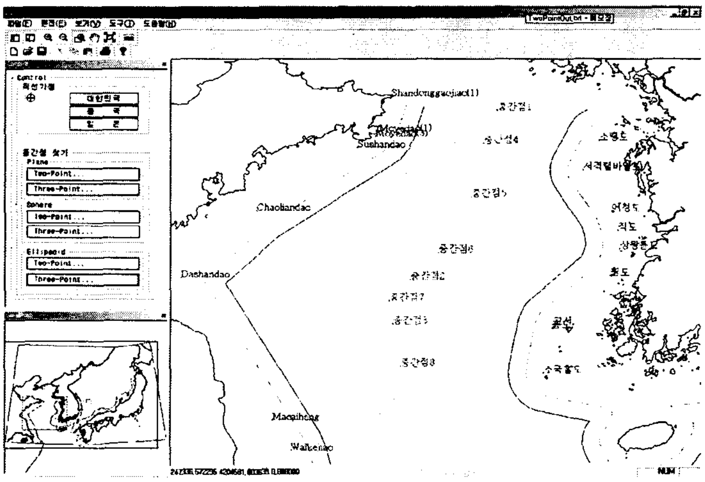

그림 4 Three-Point 알고리즘 결과

위 결과를 Delmar 1.0과 비교하기 위하여 중국과 한국의 기준점을 선택하여 3개의 중간점을 계산하였다. 본 연구에서 개발한 프로그램의 보정치 오차는 $10^{-13}$이며, 비교 결과 표 3에서 보듯이 본 연구에서 개발한 프로그램이 정확한 결과를 나타내었다.

| | | Delmar 1.0 | KMBD |
|---|---|---|---|
| 1 | 중국 1<br>~<br>한국1, 한국2 | 37-17-40.6831<br>124-15-10.5452 | **37-17-40.683074**<br>**124-15-10.545162** |
| 2 | 중국 1<br>~<br>한국 2, 한국 3 | 34-52-19.5108<br>123-13-46.7727 | **34-52-19.510751**<br>**123-13-46.772715** |
| 3 | 중국 2<br>~<br>한국 3, 한국 4 | 35-13-18.3904<br>123-25-54.4249 | **35-13-18.390424**<br>**123-25-54.424873** |

표 3 Delmar 1.0과 Ocean_Master 2.0 결과 비교

중간점은 해안선의 기준점에서 등거리 조건을 만족하는 경계이다. 중간점을 결합하여 그려진 경계는 내삽(interpolation)을 이용한 방법이므로 오차를 수반하게 된다. Three-Point 알고리즘의 오차예측을 수행하기 위하여 임의의 세 점 $P_1$, $P_2$ 그리고 $P_3$을 선정한 후, $P_1$과 $P_2$의 거리를 10km $P_2$와 $P_3$의 거리를 1000km로 두었다. 표 4는 세 점의 표준편차가 각각 0.05m일 때 오차결과이다. 구와 타원체상에서의 결과는 큰 차이가 없는 이유는 타원체상에서 작은 이심률 때문이다. 북쪽방향으로 에러가 많은 이유는 $P_1$-$P_2$기준선이 $P_1$-$P_3$기준선보다 더 짧기 때문이다.

| Point | Sphereical solution | | Planar solution | | Ellipsoidal solution | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\sigma_n$[m] | $\sigma_e$[m] | $\sigma_n$[m] | $\sigma_e$[m] | $\sigma_n$[m] | $\sigma_e$[m] |
| Pm | 3.472 | 0.468 | 3.535 | 0.035 | 3.478 | 0.468 |

표 4 Three-Point 알고리즘 오차예측 결과

## 4. 결 론

경계 획선 알고리즘 정립과 프로그램개발을 통하여 중간점을 계산하고 오차예측한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 타원체상에서 등거리원칙에 기초한 알고리즘을 정립하여 지도 투영에 의한 어떤 왜곡도 없이 적용할 수 있고 평면이나 구에서 적용한 것 보다 오차가 적으므로 중간점은 *타원체상에서 계산해야 한다.*
2) 해양경계 획선 프로그램 개발을 통하여 도면을 이용한 수작업에 의한 여러 오차를 제거 할 수 있고, 해양경계협상시 신속히 대처할 수 있다.
3) 기준선의 기준점 위치에러는 계산된 중간선의 중간점으로 전파된다.
4) 오차전파는 알고리즘에 따라 다르며 기준면(평면, 구, 타원체)에 따라 다르다. 기준면에 따른 중간점 좌표의 차이는 몇 킬로미터이지만, 계산된 에러는 단지 몇 센티미터에 불과 하다. 그러므로 일정한 지역에 대한 정확도를 높이기 위해서는 지역에 맞는 기준면을 선택하는 것이 중요하다.

## 참고문헌

1. 해양수산부 해양법에 따른 국제연합협약, 1998 pp. 3-11
2. 한국해양연구소 주변해양 경계획선 방식에 관한 연구, 1992
3. Carrera G. A method for the delimitation of an equidistant boundary between coastal states on the surface of a geodetic ellipsoid. Int. hydrogr. Rev (Monaco), 1992, LXIV(1):147-159
4. Sjoberg, Lars E. Error propagation in maritime delimitation. In: Proceedings: Geodetic Aspects of the Law of the Sea, Denpasar, bali, Indonesia: 1996, 153-168