

혼합모드 균열을 포함하는 암석의 응력확대계수와 균열전파의 수치해석적 모델링

The stress intensity factor evaluation and crack propagation of rock
with mixed mode crack using numerical analysis.

박인복, 이정인
서울대학교 지구환경시스템공학부

1. 서론

암석에 고유한 결함이 포함되어 있을 때 외부의 하중변화에 대한 균열의 거동은 지하 구조물의 설계 및 안정성 검토는 물론이고 시추공을 이용한 지하 암반의 수압파쇄의 설계에 이르기까지 그 중요성이 날로 더해가고 있다. Irwin의 연구 덕분에 균열 선단의 응력분포를 응력확대계수로 표현할 수 있게 되었다. 그러나 응력확대계수의 이론해는 기하와 하중조건이 단순한 경우에만 가능하며 일반적으로 복잡한 하중상태에 있는 지하 암반의 거동을 해석하는 데에는 적용하기 힘들기 때문에 수치해를 사용해야 한다.

응력확대계수를 수치적으로 구하는 기법은 과거의 연구자들에 의해 그 토대가 마련되었다. 균열 선단에 사분점 요소를 사용하는 변위 상관법의 경우 전통적인 유한요소 해석을 사용하여 혼합모드의 응력확대계수를 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 사분점 요소를 사용하여 공학적으로 정확한 수준의 해를 얻기 위해서는 상당히 조밀한 요소망을 필요로 하게 된다. 이에 비해 에너지 기법인 가상 균열 확장법은 조밀하지 않은 요소망을 사용하였을 때 사분점 요소와 비교할 수 없을 만큼 정확한 해를 제공한다.

본 연구에서는 변위 상관법과 가상 균열 확장법을 이용하여 응력확대계수를 수치적으로 구할 수 있는 프로그램을 제작하였고, 이를 이용하여 4점 단일노치 전단 보에 대한 균열 전파를 모사하였다. 또한 세가지 파괴기준에 따른 균열의 전파의 양상을 비교하였다.

2. 이론적 배경

응력확대계수는 균열 선단의 응력분포의 특이를 정량적으로 나타낸 값이다. 균열 주위의 응력장을 모사하기 위한 수치적인 방법은 전통적으로 4분점 요소를 사용하는 대표적인 방법으로 변위 상관법과 에너지 개방율로부터 응력확대계수를 구하는 가상균열 확장법으로 나뉜다. 변위 상관법은 전통적인 유한요소해석으로부터 나온 균열 선단에서의 변위와 이론적인 선단 변위를 상관시킴으로써 응력확대계수를 얻는 것이다(Shih, Ingraffea & Sauma, Gerstle). 이에 비해 가상균열 확장법은 균열 확장 이전의 에너지와 균열이 확장된 후의 에너지 차이를 이용하여 이로부터 응력확대계수를 얻는 것이다(Park, Hellen). 가상균열 확장법으로 혼합모드의 응력확대계수를 구하기 위해서는 얻어진 에너지를 모드 I과 모드 II로 분해하는 것이 필요한데 이를 변위 분해법을 사용함으로써 해결된다.

응력확대계수 해의 정확도는 특히 요소망의 구성에 큰 영향을 받는다. Gerstle은 Least-Dimension 개념에 기초하여 요소망 분할을 통해 구한 응력확대계수의 수치해의 오차

를 정성적으로 표현하였으며 이에 관련하여 본 프로그램에서 사용한 변위상관법과 가상 균열 확장법에 대한 요소망 기준을 확립하였다. Ingraffea, Gerstle은 요소망 기준을 다음과 같이 3가지 매개변수로 표현하였다. 첫째 균열요소의 크기 와 최소차원의 비 (L/LD), 둘째 균열 요소의 수 (N) 마지막으로 일반요소의 크기, 마지막으로 균열 선단에서 일반요소까지의 거리의 비 (b/s)가 그것이다. 여기서 LD 는 균열 선단 주위로의 응력집중이 형성되어 해를 지배하는 영역을 의미하는 근사 반경을 계산하는데 쓰이는 값으로 LD 를 결정하기 위해 고려되는 값은 균열의 곡률반경, 균열 선단으로부터 가장 가까운 불연속까지의 거리, 균열의 길이, ligament의 크기 또는 균열의 개별 kink까지 거리 등이다.

균열이 전파되는 하중과 균열 전파 방향은 잘 정의된 혼합모드의 균열 전파 기준식에 의해 결정 될 수 있다. 본 연구에서 사용된 파괴이론은 $\sigma(\theta)_{max}$, $G(\theta)_{max}$, $S(\theta)_{min}$ 등 현재 가장 널리 쓰이는 3가지 이론이다. 이 중 $S(\theta)_{min}$ 이론은 다른 이론에 비해서 K_{II} 에 대한 영향을 가장 많이 고려하는 파괴이론으로써 암석과 콘크리트와 같은 취성 재료의 특성에 부합한다.

3. 수치해석 결과

Mode I의 거동을 보이는 균열, 즉 인장균열의 경우인 Central Horizontal Crack Tension(CCT), Double Edge Horizontal Crack Tension(DENT), Single Edge Horizontal Notch Tension(SENT) 의 경우에 있어서 응력확대계수를 구한 결과를 Isida(1971), Leslie(1986), Leslie(1986)에 의하여 구해진 수치해석 결과와 비교해봤을 때 ($K_I = 4.7289$ for CCT, 4.7218 for DENT, 9.9895 for SENT) 본 해석 프로그램으로 구한 결과는 h Convergence와 p Convergence를 보였으며 요소의 수를 20x20으로 하였을 때 오차가 2% 미만이었다. 또한 본 프로그램은 요소망에 비틀린 요소가 있을 때에도 만족할 만한 결과를 얻었다.

다음에 혼합모드에서의 응력확대계수계산 결과를 제시하였고 해석 프로그램의 수렴도 조사를 하였다. 수렴도 조사에 쓰인 매개변수로는 요소크기, 요소의 종류 등이 있고 가우스 적분차수에 대한 영향을 고려하였다.

3.1. 혼합모드 응력확대계수

혼합모드에 대한 응력확대계수의 수렴과 요소민감도를 알아보았다. 해석대상은 45° 기울어진 관통균열을 포함하는 10x10 크기의 균일한 인장하중을 받고 있는 평판으로써 포함된 균열은 인장과 전단 거동을 하게 된다(Fig. 1). 해석에 사용된 요소망은 Fig. 2에서 보는 것과 같이 4가지 요소망을 사용하였다. 요소망 (a), (b), (c) 는 8개의 균열 요소를 사용하였고 16개의 균열요소를 균열선단에 배치한 요소망 (c)에서 얻은 해를 정해로 가정하였다. 요소형상의 비틀림에 대한 민감도 조사를 위해 요소망(a)의 균열 요소의 절점을 이동시켜 요소망 (d)를 작성하였다. 균열 크기 대 균열 요소의 비는 각각 0.16, 0.08, 0.05, 0.13이다. 각 요소망은 선형요소 및 이차요소로 각각 구성하였다. 정해를 구하기 위해 작성한 요소망(d)의 해석결과는 $K_I = 1.1618$, $K_{II} = 1.1319$ 로 Getstle에 의해 해석된 결과인 ($K_I = 1.15$, $K_{II} = 1.12$) 수행되었던 1% 내의 무시할 만한 오차를 갖는다.

Table 1에 요소망 매개변수와 해석 결과를 나타내었다.

요소가 조밀할수록 또는 요소형상 함수의 차수가 높을수록 정해에 수렴하는 h, p convergence를 보였다. 요소가 2배 조밀해지면 응력확대계수의 계산오차가 50% 이상 감소하고 선형요소에 비해 이차요소를 사용했을 때 90% 이상의 오차가 감소하였다. 감차적분의

오차감소 효과는 미비하였으나 소요되는 계산 시간의 관점에서 전체적분보다 훨씬 효율적이다. 요소망의 비틀어짐에 대한 계산오차는 10% 미만으로 요소망에 대해 민감하지 않았다. 가상균열 확장법이 변위 상관법보다 같은 요소망을 사용하였을 때 훨씬 정확한 응력확대계수 해를 구할 수 있음을 알 수 있다. 이는 응력확대계수를 수치적으로 구할 때 변위에 기초한 방법보다는 에너지를 통해 구하는 것이 바람직하다는 사실을 말해준다.

3.2. 혼합모드 균열전파

선형 탄성 파괴역학과 혼합모드의 균열 전파식을 사용하여 균열의 전파를 모사할 모델이 Fig. 3에 도시되어 있다. 4점 단일노치 전단보의 경우 Arrea와 Ingraffea에 의해 해석된 이후로 균열 전파에 대한 예제로 가장 자주 쓰이는 것이다 (Ingraffea & Getstle, Rots & de Borst, Gerstle & Xie). 균열 전파해석의 가정은 첫째 모든 균열 길이에 대해 선형 탄성 파괴역학이 우세해야 하고, 둘째 새로운 균열은 생기지 않고 기존의 균열만의 확장만 가능하고, 셋째 균열의 선단에서 small scale yielding 조건이 만족되어야 한다. 4점 단일노치 전단보의 요소망은 Fig. 4에 제시되어 있는 것과 같이 두 가지 요소망을 사용하였는데 요소망 (a) 는 648개의 초기 선형요소를 사용하였고 절점 개수는 663개이다. 요소망(b)는 108개의 이차요소를 사용하였고 절점 개수는 367개이다. 해석 결과는 Arrea & Ingraffea 의 해석과 실험결과와 비교하였다.

균열 전파를 해석하기 위한 과정은 다음과 같다. 1) 초기 균열 길이에 대한 탄성해를 수행하고 가상균열 확장법으로 응력확대계수를 구한다. 2) 응력확대계수와 혼합모드의 파괴기준식을 이용하여 균열이 전파되는 하중을 구한다. 이로써 파괴는 개시된다. 3) 파괴 기준식에 입각하여 균열 전파의 방향과 미리 정해진 균열 전파 길이만큼 확장시켜 요소를 재생성한다. 4) 1-3의 과정을 반복하여 균열이 자유면에 도달하면 평형방정식의 해가 존재하지 않으므로 해석이 끝나게 된다.

최대 균열 전파 길이 d_{max} 를 $0.5a$ 로 설정하여 요소망을 세분할 필요가 있는지 검사하였다. 균열 전파의 초기 예측 각도는 $S(\theta)_{min} > G(\theta)_{max} > \sigma(\theta)_{max}$ 순으로 나타났다. 균열의 궤적은 3가지 파괴기준식에 대해 거의 일치하였으며 실험적으로 보고된 것과도 매우 근접하였다 (Arrea & Ingraffea). 서로 조밀도가 다른 두 가지 요소망에 대해서도 결과는 일치하게 나타났다. Fig. 4은 $S(\theta)_{min}$ 를 사용한 경우의 최종 유한요소망 즉 균열전파의 마지막 단계를 나타냈다.

각 파괴이론으로 구한 Load-CMSD 관계를, Arrea와 Ingraffea(1982) 의 실험데이터와 de Borst (1986)의 Smearred crack model에 의한 수치해석 데이터 그리고 Gerstle의 Fictitious Crack approach에 의한 수치해석 데이터와 비교하였다. Fig. 5은 각각 요소망(b) 를 사용한 경우 각 파괴기준식에 따른 Load-CMSD 곡선과 $G(\theta)_{max}$ 이론을 사용한 경우 각 요소망에 따른 Load-CMSD 곡선을 도시한 것이다.

서로 다른 이론을 사용해 예상된 최대하중은 요소망(a) 와 요소망(b) 각각 5 %와 15% 이내에 있었으며 Arrea 와 Ingraffea의 실험데이터와 비교하였을 때 요소망(a)에서 최대하중은 13-18%, 요소망(b)에서는 6-21%의 오차를 보였다.

Fig. 6은 요소망(b)를 사용한 경우 $\sigma(\theta)_{max}$ 와 $G(\theta)_{max}$ 로 균열 전파를 예측하였을 때 각 전파 단계에서 K_I 와 K_{II} 를 파괴 궤적에 표시한 그림이다. 균열의 전파는 초기에 낮은 K_I/K_{II} 의 값을 갖는 영역에서 출발하더라도 곧 바로 높은 K_I/K_{II} 값을 갖는 영역으로 이동함으로써 Mode I으로 파괴되려는 성질을 보였다 다른 이론을 이용하여 예측한 경우에도 비슷한 결과를 보였으며 이는 세가지 파괴이론에 대한 결과가 서로 비슷함을 입증한다.

4. 결 론

본 연구에서는 전통적인 유한요소해석으로부터 얻어진 변위장을 변위분해법을 이용하여 균열에 대한 대칭과 비대칭 변위장으로 분해함으로써 Mode I 과 Mode II 에너지 개방을 결정할 수 있고 이로부터 해당하는 응력확대계수를 구할 수 있는 수치해석 프로그램을 개발하였다. 혼합모드에서 요소망에 대한 수렴도와 민감도 조사에서 여러 가지 매개변수들이 응력확대계수 해에 미치는 영향을 살펴보았다. 응력확대계수 해는 요소가 조밀할수록 Q4, Q3 요소보다는 Q8, T6 요소를 사용할 때, 균열 선단에 Rosette를 배치했을 때 그리고 요소내의 수치적분을 감차적분으로 하였을 때가 높은 정확도의 해를 얻을 수 있었다. 마지막으로 변위 상관법을 이용했을 때보다 가상 균열 확장법으로 구한 응력확대계수 해가 90% 이상 정확한 정도를 보였다. 또한 민감도 조사에서 요소망의 비틀림에 대한 영향은 없는 것으로 나타났다.

선형탄성 파괴역학과 세가지 파괴기준식을 이용하여 4점 단일노치 전단 보에 대한 균열 전파 거동에 대한 연구를 수행하고 기존의 연구와 비교하여 선형탄성파괴역학이 균열전파의 해석에 유효함을 보였다. 각 파괴기준식에 대한 초기 균열 개시 예측각도는 $S(\theta)_{min}$ 이론이 가장 크게 나타났고 Load-CMSD 곡선에서 실험치와 비교한 결과 $\sigma(\theta)_{max}$ 이론과 $G(\theta)_{max}$ 이론은 거의 비슷한 최대하중을 얻었고 $S(\theta)_{min}$ 이론은 약 15 % 높은 최대하중을 얻었다. 초기 요소망이 큰 경우에도 요소망을 세분화함으로써 조밀한 요소망과 거의 비슷한 파괴 궤적을 구할 수 있다. 모든 파괴기준식에서 공통적으로 균열의 전파는 Mode I의 파괴를 이루는 경향을 보인다.

참고문헌

1. Arrea, A. and Ingraffea, A. R., "Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete", *Rep. No. 81-13*, Cornell Univ., Ithaca, N.Y. 1982.
2. Gerstle, W. H., "Finite and boundary element modeling of crack propagation in Two- and Three- Dimensions using interactive computer graphics", *Department of Structural Engineering Report 85-8, Program of Computer Graphics and Department of Structural Engineering*, Cornell University, Ithaca, N.Y., 1985
3. Gerstle, W. H. and Abdalla, J. E., "Finite element meshing criteria for crack problems" *STP 1074-1990, ASTM*, Philadelphia, Pa., pp. 509-521, 1990
4. Kim, J D, Roh, Y R and Lee, C I, A study on the measurement of fracture toughness and fracture propagation behavior of rock under tensile stress , *Journal of the Korean Institute of Mineral and Mining Engineers*, Vol. 25, No.5, pp.309-319, 1988
5. Park, D. M., "A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors", *Int. J. Fracture*. Vol. 10(4), pp. 487-502, 1974.
6. Park, I B and Lee, C I, The stress intensity factor evaluation and crack propagation of rock with mixed mode crack using numerical analysis , *Master thesis, School of Civil, Urban & Geosystem Engineering, Seoul National University, Korea*, 1999.
7. Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., *The stress analysis of cracks handbook*, Del Research Corporation, Hellertown, Pa., 1973.
8. Xie, M. and Gerstle, W. H., "Energy-based automatic mixed-mode crack propagation modeling", *Journal of Engineering and Mechanics*, pp. 914-923, 1995.

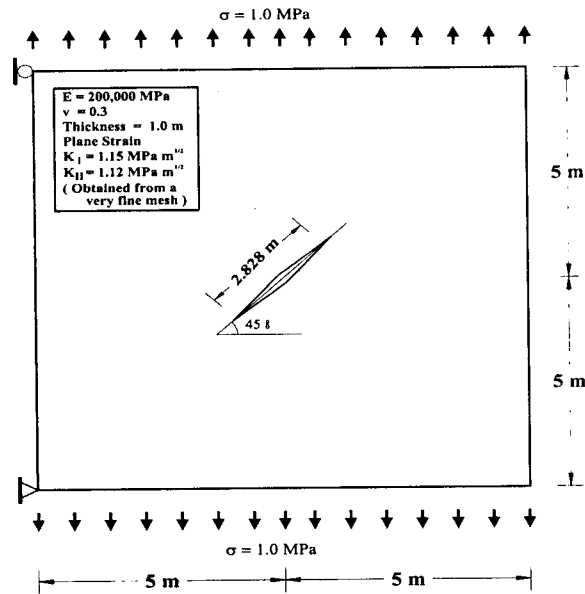


Fig. 1 Mixed Mode Slant Crack Tension Problem

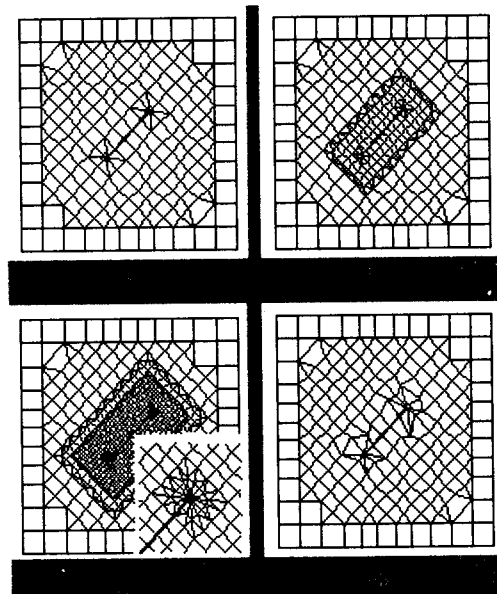


Fig. 2 Meshes for Convergence and Mesh Sensitivity Study of Mixed Mode Slant Crack Plate

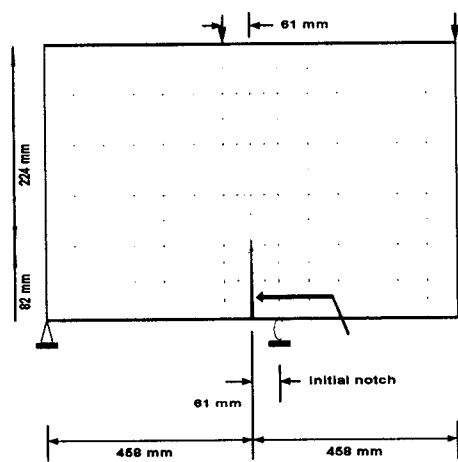


Fig. 3 Four-Point Single notched shear beam

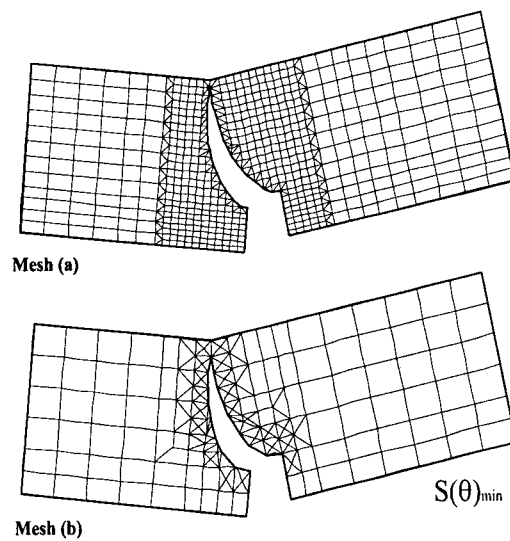


Fig. 4 Final deformed mesh of 4-point single notched shear beam using $S(\theta)_{\min}$ theory

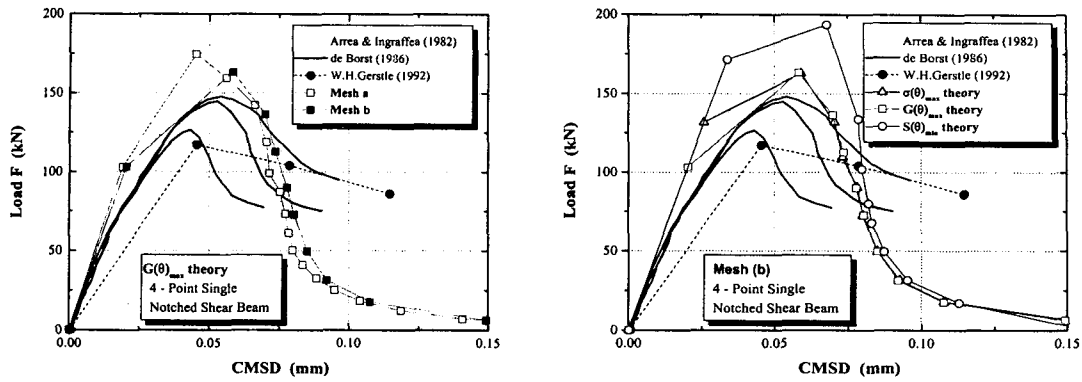


Fig.5 Load versus CMSD Curves predicted by mesh (a) & (b), and by $G(\theta)_{max}$ theory

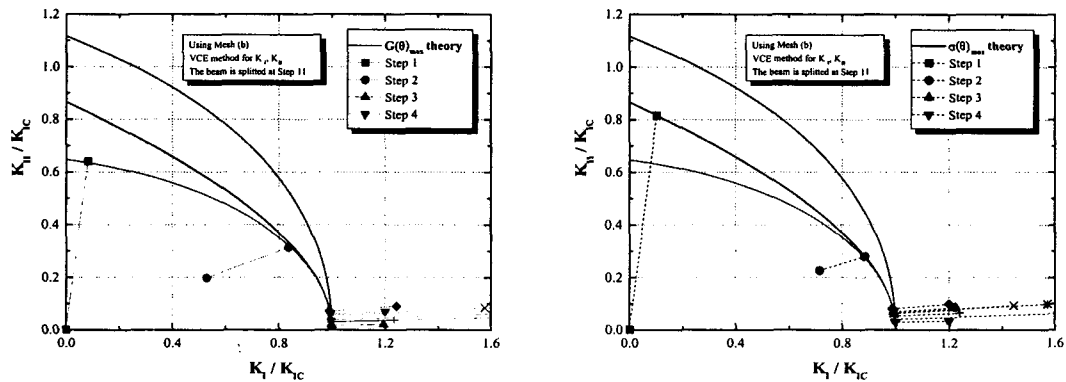


Fig. 6. Crack Propagation step on $\sigma(\theta)_{max}$ and $G(\theta)_{max}$ theory for mesh (b)

Table 1. Mesh Parameters, Results of Convergence & Mesh Sensitivity Study for Slant Crack Plate

SCP Mesh	Element (# elements, total DOF)	Gauss Integral Order	KI, % error		KII, % error	
			Displacement Correlation	Virtual Crack Extension	Displacement Correlation	Virtual Crack Extension
Mesh (a) L/a=0.16	Q4, T3 (256,516)	Reduced		1.1027 (5.09)		1.0854 (4.11)
		Full		1.2166 (-4.72)		1.0672 (5.71)
	Q8, T6 (256,1544)	Reduced	1.1760 (-1.22)	1.1627 (-0.08)	1.1600 (-2.48)	1.1382 (-0.55)
		Full	1.1800 (-1.57)	1.1637 (-0.16)	1.1520 (-1.77)	1.1381 (-0.54)
Mesh (b) L/a=0.08	Q4, T3 (386,716)	Reduced		1.2232 (-5.28)		1.0740 (5.12)
		Full		1.1225 (3.38)		1.1141 (1.57)
	Q8, T6 (386,2204)	Reduced	1.1640 (-0.19)	1.1629 (-0.09)	1.1480 (-1.42)	1.1375 (-0.50)
		Full	1.1680 (-0.53)	1.1638 (-0.17)	1.1400 (-0.71)	1.1375 (-0.50)
Mesh (c) L/a=0.05	Q4, T3 (1040,1784)	Reduced		1.1527 (0.78)		1.1053 (2.35)
		Full		1.1175 (3.81)		1.1047 (2.41)
	Q8, T6 (1040,5640)	Reduced	1.1785 (-1.44)	1.1644 (-0.23)	1.1355 (-0.32)	1.1319 (0.00)
		Full	1.1745 (-1.09)	1.1618 EXACT	1.1360 (-0.36)	1.1319 EXACT
Mesh (d) L/a=0.13	Q4, T3 (256,516)	Reduced		1.3900 (-19.64)		1.1307 (0.11)
		Full		1.1610 (0.07)		1.1458 (-1.23)
	Q8, T6 (256,1544)	Reduced	1.1785 (-1.44)	1.1729 (-0.95)	1.1695 (-3.32)	1.1502 (-1.61)
		Full	1.1680 (-0.53)	1.1674 (-0.49)	1.1505 (-1.64)	1.1449 (-1.14)