

이산시스템 설계를 위한 확장된 마크흐름선도의 수학적 해석

김희정* · 백형구** · 김종민*** · 여정모****

부경대학교

The Mathematical Analysis of an Extended Mark Flow Graph for Design of the Discrete-event Control System

Hee-jung Kim* · Hyung-goo Paek** · Jong-min Kim*** · Jeong_mo Yeo****

Pukyong National University

E-mail : heejung_99@hanmail.net

요 약

확장된 마크흐름선도(EMFG: Extended Mark Flow Graph)는 이산 시스템을 개념적으로 또는 상세하게 설계할 수 있는 강력한 도구일 뿐만 아니라 시스템을 직접적으로 구현하기 위한 적당한 표현이다. 본 논문은 EMFG의 트랜지션들이 점화하는 과정 및 트랜지션이 점화 완료하였을 때의 각 박스들의 마크 수 변화를 집속 행렬 및 상태천이 방정식을 이용한 점화 결정 알고리즘으로 표현하고자 한다. EMFG의 동작이 수학적으로 해석 가능해짐으로 인해 시스템의 분석 및 설계가 용이하며 컴퓨터를 이용한 자동화 시스템의 분석과 설계가 가능하다.

ABSTRACT

The EMFG(Extended Mark Flow Graph) is not only a powerful tool for designing the discrete-event system conceptually or specifically but also a good representation tool for implementing the system directly. We present a transitions-firing process and automatic changes of the number of marks in each box as a firing determination algorithm with the incident matrix and the state transition equation. The convenient analysis and design of a system as well as Computer Aided Design is possible because the operations of an EMFG can be represented in the mathematical analysis with ease.

1. 서 론

일반적으로 Petri Net는 시스템 상에서 정보와 제어의 흐름을 그래프 모델로서 나타내며, 특히 비동기적이고 동시적인 시스템을 모델링하는데 많이 이용되고 있다. Petri Net에서 모든 place의 안전성을 유지하기 위하여 제안된 모델로 마크흐름선도(MFG:Mark Flow Graph)[1-2]와 세이프 페트리 넷(Safe Petri Net)[3-4]이 있다. Petri Net 및 마크흐름선도들은 회로의 분석 및 해석에 이용되었으며, 이산제어 시스템의 표현 및 구현에도 이용되었고, 공장 자동화 등에도 응용되었다.

동기나 비동기의 이산제어 시스템을 설계하여 구현하거나 분석하는데 적합하도록 확장된 마크

흐름선도(EMFG: Extended Mark Flow Graph) [5-8]가 제안되었다. EMFG는 Petri Net나 각종 선도로서 시스템을 설계하는 것과 마찬가지로 시스템의 동시성이나 병렬성을 잘 표현할 수 있을 뿐만 아니라 시스템을 개념적으로 설계할 수 있게 하고, 시스템의 동작을 상세하게 설계할 수 있게 한다. 또한 이산 시스템을 표현한 EMFG인 경우에는 구성하고 있는 요소를 각각 일대일로 변환하여 직접적인 회로를 얻을 수 있어 시스템의 구현이 아주 쉽다.

본 연구에서는 확장된 세이프 페트리 넷(ESPN : Extended Safe Petri Net)[3-4]의 해석을 이용하여 EMFG[5-8]를 수학적으로 해석하여 시스템의 설계가 용이하도록 하고, 시스템의 분석이나 해석이 쉽게 이루어지고 컴퓨터 프로그램에 의해서도 그 분석 및 해석이 가능하도록 하였다.

집속행렬과 상태천이 방정식을 이용한 ESPN의 수학적 해석[3-4]에서는 Petri Net의 점화가능벡터

* 부경대학교 교육대학원 전산교육학과

** 부경대학교 산업대학원 전산정보학과

*** 부경대학교 전자계산학과

와 접화계열을 구하는 알고리즘의 단계와 상태전이 방정식에 이르는 과정이 복잡한데 비하여 EMFG의 수학적 해석은 좀더 적은 행렬과 단순해진 알고리즘을 통하여 접화가능벡터와 접화계열을 구해낼 수 있다.

II. 본 론

1. 확장된 마크호름선도(EMFG)

1.1 EMFG의 구성

EMFG는 박스(box), 트랜지션(transition), 아크(arc)들로 구성되는 마크를 갖는 방향성 선도로 정의된다.[6] 박스는 상태를 나타내며, 상태의 만족 여부는 박스 내에 마크를 두어 표시한다. EMFG는 안전(safe)한 그래프이므로 상태를 나타내는 박스의 마크수를 0이나 1로 나타낼 수 있다. 트랜지션은 박스(들)의 상태가 조합되어 박스 자신의 상태가 변화하거나 다른 박스(들)의 상태를 변화시키는 곳, 즉 전이가 일어나는 곳이다. 그리고 트랜지션에서 전이가 일어나는 과정을 트랜지션이 접화(fire)한다고 한다. 아크는 일반아크와 역아크로 구분되고, 박스와 트랜지션 사이에서 트랜지션의 접화조건을 결정하고, 트랜지션이 접화될 때의 박스의 마크 상태를 결정한다.

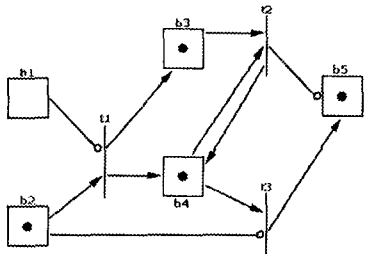


그림 1. EMFG의 예

1.2 EMFG의 성질

1.2.1. 트랜지션의 접화조건

트랜지션의 접화조건은 트랜지션의 모든 입력 박스(들)의 마크 상태가 모두 조건에 부합되어야 한다. 이 조건들은 연결된 아크의 종류에 따라 달라진다. 즉 일반/역 아크로 연결된 입력 박스에는 마크가 있/없어야 조건에 부합된다.[6-7]

1.2.2. 트랜지션의 접화동작

트랜지션이 접화하는 경우, 트랜지션에 연결된 박스의 마크상태는 연결된 아크의 종류에 따라 다르게 변화한다. 즉, 일반/역 아크로 연결된 입력 박스의 마크는 그대로 소멸/보존되고, 트랜지션에서 일반/역 아크로 연결된 출력 박스에는 마크가 없/있으면 생성/소멸시키고, 마크가 있/없으면 그대로 유지시킨다. 또한 EMFG는 충돌박스(conflict box : 두 개 이상의 출력 아크를 가진

박스)의 마크가 다수의 출력 트랜지션의 접화조건을 동시에 만족시키는 경우, 모든 트랜지션이 동시에 접화된다.[6]

예를 들어, 그림 1에서는 트랜지션 t1과 t2가 접화조건이 만족되므로 접화하여 박스의 마크 상태가 아래와 같이 변화한다.

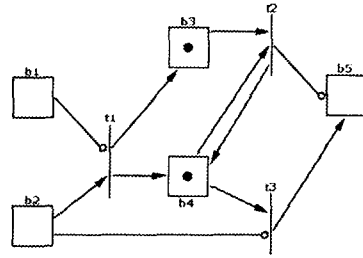


그림 2. t1과 t2가 접화한 EMFG

2. EMFG의 수학적 해석

이 절에서는 EMFG의 접속 행렬을 정의하고 이 접속 행렬을 이용하여 임의의 박스 마크상태가 있을 때의 접화 가능한 마크벡터를 구하고, 이 마크벡터를 통하여 박스의 다음 상태를 구한다.

2-1. EMFG의 접속 행렬

2-1-1. 일반아크만 있는 경우의 접속 행렬

트랜지션과 박스의 접속관계를 행렬로 나타낸 것이 접속행렬이다. 접속행렬은 B 로 표기하고 다음과 같이 구성된다.[3-4]

$$B = B^+ - B^- \quad [식 1]$$

$$B^+(i, j) = (b_i, O(t_j)) \leq 1 \quad [식 2]$$

$$B^-(i, j) = (b_i, I(t_j)) \leq 1 \quad [식 3]$$

$I(t_j) = \{\text{트랜지션 } t_j \text{로 입력되는 박스들}\}$

$O(t_j) = \{\text{트랜지션 } t_j \text{에서 출력되는 박스들}\}$

단, $B^+(i, j) = (b_i, O(t_j))$ 는 트랜지션 t_j 에서 박스 b_i 로 연결된 아크가 있는 경우 1이 되고, $B^-(i, j) = (b_i, I(t_j))$ 는 박스 b_i 에서 트랜지션 t_j 로 연결된 아크가 있는 경우에 1이 된다.

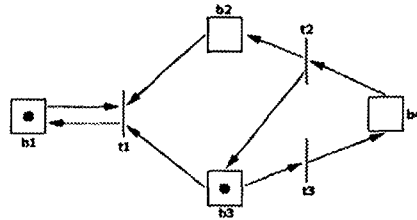


그림 3. 일반아크만 존재하는 EMFG

$$B^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

그림 4. 그림 3의 접속 행렬

여기까지의 접속 행렬은 역 아크가 존재하지 않은 EMFG에서의 접속 행렬이었다. 만일 역 아크가 설계한 EMFG내에 존재한다면 지금까지의 방법만으로는 접속 행렬을 구하지 못한다. 그래서 역 아크가 존재하는 경우에는 다음과 같이 접속 행렬을 구하여야 한다.

2-1-2. 역 아크가 있는 경우의 접속행렬

역 아크가 존재하는 경우 이들의 접속 행렬을 구하는 방법을 기술한다.

- 1) 행렬을 구성할 때 역 아크가 존재한다면 행렬 원소로 1 이나 0 대신 I 로 표기한다.
- 2) 접속 행렬 B를 구하고 이때 B행렬의 I 는 -1 로, -I 는 0으로 바꾸어 새로운 접속 행렬 B를 구한다. 이때 I는 트랜지션에서 박스로 가는 역 아크를 나타내므로 -1로 바꾸어 줄으로써 마크를 소거시킬 수 있고, -I는 박스에서 트랜지션으로 가는 역 아크를 나타내므로 트랜지션이 점화하여도 박스의 마크상태에는 영향을 주지 않으므로 0으로 바꿔준다.

$$B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & I & 1 \end{bmatrix} \quad B^- = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 1 & 0 & I \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -I \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & I & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

그림5. 그림1의 접속 행렬

2-2. 마크 벡터(Mark Vector)

박스들의 마크 상태는 EMFG의 각 박스들과 대응되고 마크수는 0이거나 1이므로 박스들의 마크 상태를 벡터로 표현할 수 있다. 마크 벡터 M 은 각 박스들의 마크상태를 나타내며 표기는 다음과 같이 한다.

$$M = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n]^T \text{ [식 4]}$$

여기서 μ_i 는 박스 b_i 의 마크 수이며, n은 EMFG내에서 존재하는 박스의 수이다. 이렇게 표시된 마크상태가 곧 시스템의 상태를 표시한다.

그림 1의 마크 벡터를 나타내면 다음과 같다.

$$M = [0, 1, 1, 1, 1]^T$$

2-3. 점화 가능 벡터

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n]^T \text{ [식 5]}$$

여기서 f_i 는 트랜지션 t_i 의 점화조건 만족 여

부를 나타내고, n은 트랜지션의 수이다.[7]

2-3-1. 트랜지션의 점화 결정 알고리즘

먼저 정의 몇 가지를 기술한다.

[정의 1]

다음과 같이 \diamond 연산을 정의한다.

먼저 벡터 X 와 Y 를 다음과 같을때,

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \text{ [식 6]}$$

이때 X \diamond Y연산은 다음 식과 같이 정의된다.

$$X \diamond Y = (x_1 \diamond y_1) \times (x_2 \diamond y_2) \times \dots \times (x_n \diamond y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^n (x_i \diamond y_i)$$

단, x_i 가 I 가 아닐 때는

$$x_i \diamond y_i = 1 \quad (x_i \leq y_i)$$

$$0 \quad (x_i > y_i)$$

x_i 가 I 일 때는

$$x_i \diamond y_i = 1 \quad (y_i = 0)$$

$$0 \quad (y_i = 1)$$

[식 7]

이 연산을 논리 표로 구성하면 표 1이 된다.

표1. \diamond 연산의 논리 표

$x_i \diamond y_i$	결과값
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1
I 0	1
I 1	0

[정의 2]

함수 L(x)은 EMFG의 안전성을 유지하기 위한 함수로써 다음과 같이 정의한다.

$$L(x) = 1 \quad (x \geq 1)$$

$$0 \quad (x < 1)$$

[식 8]

1) 점화가능 벡터

F는 트랜지션을 원소로 하는 벡터이며 각 트랜지션이 점화하면 1, 그렇지 않으면 0 이 된다. 이러한 F를 다음 식에서 구할 수가 있다.

$$F = (B^-)^T \diamond M \text{ [식 9]}$$

(증명)

j번째 트랜지션 t_j 가 점화가능이기 위해서는 t_j 에 일반 아크로 연결된 모든 입력 측 박스에 마크가 존재하여야 한다. 그리고, t_j 에 역 아크로 연결된 모든 입력박스에는 마크가 존재하지 않아야 한다. 따라서 표 1의 논리도가 형성되고 트랜지션의 모든 입력에 대해 만족되어야 하므로 다음 식과 같이 된다.

$$F = (B^-)^T \diamond M$$

그림 1의 점화가능 벡터 F 를 계산하면

$$F = (B^-)^T \diamond M = \begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & I & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \diamond \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1, 1, 0]$$

2) 상태전이 방정식

상태전이 방정식은 한 마크 상태에서 다음 마크 상태로의 마크의 전이를 방정식으로 나타낸 식이며 식은 다음과 같다.

$$M(k+1) = L(M(k) + B \times U(k)) \quad [식 10]$$

여기서 $M(k)$: 현재의 마크상태

$M(k+1)$: 점화후의 마크 벡터

B : 접속 행렬

$U(k)$: 점화 벡터

(증 명)

점화한 트랜지션의 영향을 받는 박스의 동작과 현재의 마크 상태를 더해 줌으로써 다음 마크 상태를 알 수 있다. 이 벡터를 EMFG에 적용하기 위해서는 $L(x)$ 함수를 이용하여 0과 1로 사상하여야 한다. 그 결과가 다음 식과 같다.

$$M(k+1) = L(M(k) + B \times U(k))$$

그림 1의 상태전이 방정식을 계산하면

$$M(k+1) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

결과에서 보이는 것처럼 그림 1은 t1과 t2가 점화하여 박스의 마크상태가 [0,0,1,1,0]로 변하는 것을 알 수 있다.

3) 점화 결정 알고리즘

EMFG의 점화계열은 다음과 같은 단계로 구한다.

[단계 1] B^+ , B^- 행렬을 구하고, 그로부터 접속 행렬 B 를 구한다.

[단계 2] 시스템의 시작 상태인 초기마크벡터 M 를 구한다.

[단계 3] [식 9]로 점화가능벡터 F 를 구한다.

[단계 4] 단계 3의 점화가능 트랜지션을 점화하고 상태전이 방정식을 이용하여 점화 후의 마크 벡터 $M(k+1)$ 을 구한다.

[단계 5] 다시 단계 3으로 되돌아가서 $M(k+1)$ 을 $M(k)$ 에 대치하여 원하는 마킹상태가 될 때까지 앞의 단계를 되풀이하여 실행한다.

[단계 6] 점화한 트랜지션을 순서대로 나열하면 점화계열을 구할 수 있다.

III. 결 론

EMFG는 시스템의 동시성이나 병렬성을 잘 표현할 수 있으며 동기 및 비동기 시스템에도 그

적용이 쉽다. 뿐만 아니라 시스템을 EMFG를 사용하여 설계하면 실제회로로 쉽게 변환될 수 있으므로 이산제어시스템 및 공장자동화의 제어회로 등을 모델링하고 설계할 때 강력한 도구로 사용될 수 있다. 하지만, 규모가 큰 시스템인 경우에 설계된 EMFG가 제대로 동작하는지 검사하는데 많은 시간을 요하며 이를 설계에 반영하는데도 어려움이 있다.

본 연구에서는 마크 상태변화를 체계적으로 판단할 수 있는 알고리즘을 제시하여, 시스템의 상태변화 즉 EMFG의 마크 상태변화를 쉽게 판단할 수 있도록 하였다. 특히, 기존의 ESPN에서는 상태전이 방정식을 구하기 위해 많은 행렬과 계산식이 필요했으나, EMFG의 상태전이 방정식에서는 B^+ 행렬과 B^- 행렬, 2개의 행렬만이 필요하므로 방정식을 구하는 시간을 줄일 수 있다. 또, 점화 결정 알고리즘의 단계를 간소화시킴으로써 시뮬레이션시 EMFG의 다음 마크 상태를 확인하는 시간을 단축할 수 있다.

따라서 시스템을 EMFG로 설계하였을 때, 설계된 EMFG를 제안된 알고리즘에 따라 해석하게 되면 시스템의 동작을 쉽게 분석할 수 있으므로 설계에 재 반영하거나 시스템의 성능향상에 크게 도움이 될 것이다. 또한 컴퓨터 시뮬레이션으로 제안된 알고리즘을 EMFG에 적용하게 되면 시스템의 설계도 자동화될 수 있을 것으로 본다.

참고문헌

[1] 여정모, "마크호름선도의 확장", 부산대학교 대학원 석사학위 논문, 1982. 2.
 [2] 여정모, 황창선, "확장된 마크호름선도와 시퀀셜제어시스템에의 응용", 부산대학교 공과대학 연구보고 제 25집, p. 209 - 219, 1983. 6.
 [3] 이재만, "Extended Safe Petri Net에 의한 비연속 시스템의 모델링 및 제어에 관한 연구", 부산대학교 대학원 석사학위 논문, 1992. 2.
 [4] 이재만, "확장된 세이프 페트리 네트를 이용한 이산시스템의 해석과 설계에 관한 연구", 부산대학교 대학원 박사학위 논문, 1995. 2.
 [5] 여정모, "EMFG 회로의 간략화에 관한 연구", 부산개방대학 연구보고 제 29집, p741 - 760 1987. 12.
 [6] 여정모, "이산 시스템의 설계와 해석을 위한 확장된 마크호름선도의 재정의와 회로변환", 멀티미디어학회 논문지 제1권 제2호, p224 - 238, 1998. 12.
 [7] 여정모, 하재복, "확장된 마크호름선도의 재구성 및 회로변환", 한국멀티미디어학회, 1998년도 춘계학술발표논문집, p. 423 - 431, 1998. 6.
 [8] 여정모, "이산제어시스템 설계를 위한 확장된 마크호름선도의 동작해석", 정보처리논문지 제 5권 제7호, p. 1896-1907, 1998. 7.