

# 균열을 내포하는 직방성재료의 해석

## Analysis of Orthotropic Materials with Crack

임 원 균\*

Lim, Won-Kyun

### Abstract

The objective of this work is to develop the capability to analyze accurately the mixed-mode propagation of a crack in composite structures with elastic orthotropic material stiffness properties and anisotropic material strength characteristics. We employ the normal stress ratio theory to predict the direction of crack extension. It is shown that the angle of crack extension can be altered by the use of second order term in the series expansion is important for the accurate determination of crack growth direction.

### 1. 서론

최근 이방성 복합재료는 항공기나 자동차 그리고 발전설비와 같은 구조시스템분야에 공업용 구조재료로서 효과적으로 쓰이고 있다. 이들 구조시스템의 안전과 신뢰성은 시스템 구성요소의 설계에 달려있다. 이들 요소들은 통상 복잡한 하중상태에 놓이게 되는데 2축방향으로의 하중을 받을 수 있다. 이방성재료 및 구조물의 파손해석은 초기 결함의 균열개시와 성장에 기초를 둔다. 특히 사용하중 중에 균열을 내포하는 복합재료의 경우에 균열성장을 예측하는 문제는 경제적으로나 기술적으로 매우 중요한 과제이다. 이방성특성을 가진 재료에서의 강도해석, 구조설계 또는 파괴에 대응한 설계에서 균열성장방향과 균열진전의 위치 그리고 임계하중의 예측은 이들 구조물의 안전을 위하여 필수적이다. 본 연구에서는 앞서 연구[1-3]의 연속으로 2축하중을 받는 직방성 복합재료 내 균열문제를 취급한다. 경사균열을 내포하는 직방성평판에서 균열선단부근의 응력상태의 특성을 이론적으로 조명해 보고 균열의 진전각도를 정확히 예측할 수 있는 방법에 대하여 검토해 보고자 한다.

### 2. 경사균열의 해석함수와 균열주위응력장 유도

Fig.1(a)와 같이 타원공을 내포한 무한이방성평판이 주축  $N_1$ 과  $x$ 축 사이의 각도  $\alpha$ 인 경사하중을 받는 경우의 해석함수  $\phi^{(a)}$ ,  $\psi^{(a)}$ 는 Savin[4]에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\phi^{(a)}(z_1) &= \phi_0^{(a)}(z_1) + B^{*(a)}z_1 \\ \psi^{(a)}(z_2) &= \psi_0^{(a)}(z_2) + (B'^{* (a)} + iC'^{* (a)})z_2\end{aligned}\quad (1)$$

\* 명지대학교 교수

여기서  $\phi_0^{(a)}(z_1)$ ,  $\psi_0^{(a)}(z_2)$ ,  $B^{*(a)}$ ,  $B'^{*(a)}$  그리고  $C^{*(a)}$ 는 외부하중과 이방성재료 특성치에 따라서 결정되는 값으로서 이는 각각 다음과 같다.

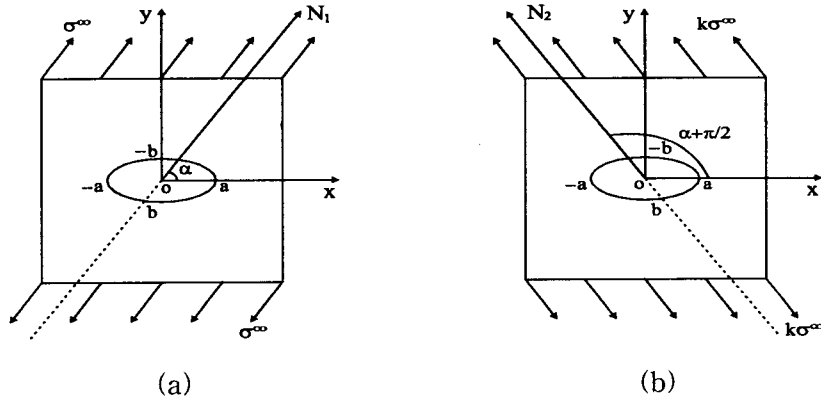


Fig. 1 Anisotropic plate with an inclined elliptical hole under tension.

$$\begin{aligned} \phi_0^{(a)}(z_1) &= -\frac{i\sigma^\infty(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{b(s_2 \sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\} \\ \psi_0^{(a)}(z_2) &= \frac{i\sigma^\infty(a-is_2b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{b(s_1 \sin 2\alpha - 2\cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\} \quad (2) \\ B^{*(a)} &= \sigma^\infty \frac{\cos^2 \alpha + (a_2^2 + \beta_2^2) \sin^2 \alpha + a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B'^{*(a)} &= \sigma^\infty \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - 2a_1 a_2] \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C^{*(a)} &= \sigma^\infty \left\{ \frac{(a_1 - a_2) \cos^2 \alpha + [a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)] \sin^2 \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - (a_2^2 - \beta_2^2)] \sin \alpha \cos \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\} \end{aligned}$$

마찬가지로 Fig. 1(b)와 같이 원방에서 주축  $N_2$ 와  $x$ 축 사이의 각이  $\alpha + \pi/2$ 인 경우의 해석함수  $\phi^{(b)}$ ,  $\psi^{(b)}$ 는 식(2)에서 각각  $\sigma^\infty$ 에 대신에  $k\sigma^\infty$ 를 그리고 각도  $\alpha$ 에 대신에  $90^\circ$ 만큼 회전한  $\alpha + \pi/2$ 를 대입하여 얻을 수 있다. 따라서 Fig. 2와 같이 경사진 타원공을 내포한 무한평판이  $x$ 축으로 수평하중  $k\sigma^\infty$  그리고  $y$ 축으로 수직하중  $\sigma^\infty$ 의 2축하중을 받는 경우의 해석함수는 Fig. 1(a)와 (b)의 해석함수를 중첩하여 얻을 수 있으며 이는 다음과 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \phi^{(a)}(z_1) + \phi^{(b)}(z_1) \\ \psi(z_2) &= \psi^{(a)}(z_2) + \psi^{(b)}(z_2) \quad (3) \end{aligned}$$

그러므로 Fig. 3과 같이 2축하중을 받는 무한지방성평판 내 경사균열에 대한 해석함수는 타원공을 평면균열화시키므로써 얻을 수 있다. 균열선단에서 시작하는 새로운 극좌표  $\xi_j = z_j - a = r(\cos \theta + s_j \sin \theta)$ ,  $z_j = x + s_j y$  ( $j=1, 2$ ) 로 표시한 경사균열

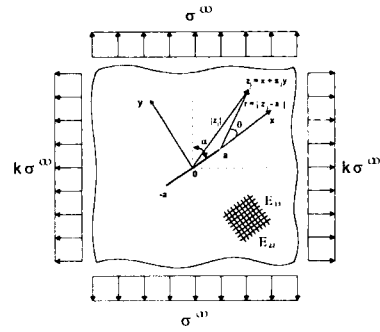
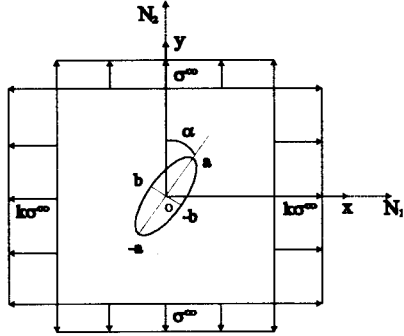


Fig. 2 Elliptical hole under biaxial load.

Fig. 3 Inclined crack under biaxial load.

에 대한 해석함수와 이의 1차 도함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi_1) &= \frac{s_2 \sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[ (\xi_1 + a) - \sqrt{\xi_1^2 + 2\xi_1 a} \right] + \Gamma_1(\xi_1 + a) \\
 \phi(\xi_2) &= -\frac{s_1 \sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[ (\xi_2 + a) - \sqrt{\xi_2^2 + 2\xi_2 a} \right] + \Gamma_2(\xi_2 + a) \\
 \phi'(\xi_1) &= \frac{s_2 \sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[ 1 - \frac{(\xi_1 + a)}{\sqrt{(\xi_1^2 + 2a\xi_1)}} \right] + \Gamma_1 \\
 \phi'(\xi_2) &= -\frac{s_1 \sigma_y^{(\infty)} + \tau_{xy}^{(\infty)}}{2(s_1 - s_2)} \left[ 1 - \frac{(\xi_2 + a)}{\sqrt{(\xi_2^2 + 2a\xi_2)}} \right] + \Gamma_2
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $0 < |\xi_j| = r \ll 1$ , ( $j=1, 2$ )이다. 상기식에서  $\phi'$ ,  $\psi'$ 의 우변 괄호내 둘째항을 급수전개시킨 다음에,  $\xi^{-1/2}$ 항과 복소변수와 무관한  $\xi^0$ 인 비특이항만 유지하고 나머지 고차항들을 생략하여, 이의 근사값을 응력함수의 도함수로 표시된 응력식[4]에 대입하면 다음과 같은 균열선단주위의 응력성분들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\
 &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\
 &+ \sigma^\infty \operatorname{Re} [(\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha)] \\
 \sigma_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\
 & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right) \right] \\
 \tau_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \\
 & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{s_1}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서  $K_I = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} [(1+k) - (1-k) \cos 2\alpha]$ ,  $K_{II} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2} (1-k) \sin 2\alpha$  이고  $\alpha$ 는 y축과 균열축이 이루는 각도이다. 직각좌표로 표시한 균열선단주위의 응력식에서 2차항은 x방향의 응력성분에만 나타남을 알 수 있다.

### 3. 균열진전각도의 결정

직방성체내 균열진전각도의 결정을 위하여 Buczek 와 Herakovich[5]에 의하여 제안된 수직응력비이론을 적용하였다. 이 기준은 균열선단으로부터 미소거리  $r_0$ 에서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}}, \left[ \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} = 0, \left[ \frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} \right]_{\theta_0} < 0$$

상기식에서 강도함수  $T_{\theta\theta} = X_T \sin^2 \theta + Y_T \cos^2 \theta$  으로 정의하며,  $X_T$  와  $Y_T$ 는 각각 이방성체에서의 섬유주축방향 및 횡방향으로의 인장강도이다. 한편 직각좌표계의 응력 성분으로 표시한 원주응력  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$  으로 표시되므로 여기에 식(5)를 대입하여 다음과 같은 원주응력식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} \cong & \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ A_1 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 \varphi_2^{3/2} - s_2 \varphi_1^{3/2}) \right] + B_1 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} (\varphi_2^{3/2} - \varphi_1^{3/2}) \right] \right\} \\
 & + \sigma^\infty \operatorname{Re} [ (\cos \alpha + s_1 \sin \alpha)(\cos \alpha + s_2 \sin \alpha) + k(\sin \alpha - s_1 \cos \alpha)(\sin \alpha - s_2 \cos \alpha) ] \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

여기서  $\varphi_j = \cos \theta + s_j \sin \theta$  ( $j=1, 2$ ),  $A_1 = k + (1-k) \sin^2 \alpha$ ,  $B_1 = (1-k) \sin \alpha \cos \alpha$  이다.

### 4. 해석결과 및 고찰

먼저 Fig. 4에서는 균열각  $\alpha=75^\circ$  일 때에 외부수평하중비  $k$ 의 변화에 따른 균열선단주위의 원주응력분포를 무차원화된 값으로 나타내었다. 이때 이방성재료의 특성치들은  $\alpha_0=1.2$  그리고  $\beta_0=1.0$ 으로 하였으며 균열선단으로부터의 거리  $r_0/a$

=0.01로 놓았다. 그림에서 실선은 균열선단주위 응력식에서 특이응력성분만을 고려하여 해석한 결과이고 점선은 응력식에서 2차항까지를 고려한 해석결과이다. 그림에서 보듯이 원주응력분포는 모두 균열선인  $\theta=0^\circ$  에서 서로 일치하고 있으나 이 부근을 벗어날 수록 두 해석결과는 차이를 보이기 시작한다. 이러한 현상은 수평하중비의 값이 1보다 작아지거나 커질 수록 더욱 뚜렷하게 나타난다. 그러나  $k=1$ 의 동일 인장-인장하중 하에서 두 해석결과는 거의 일치함을 보이며 2차항의 영향이 아주 작다. 균열의 진전각도가 균열선과 많이 벗어나는 경우에는 이에 미치는 2차항의 영향이 나타날 수 있음을 예측할 수 있다. Fig. 5는  $k=5$  인 경우의 균열각에 따른 균열진전각도와의 관계를 나타낸 것이다. 균열각이 클 수록 2차항의 영향이 뚜렷이 나타나기 시작한다. 더욱이 이 부근에서는  $r_0/a$  의 값에 따라서 균열진전각도는 큰 영향을 받고 있으므로 이의 선택이 중요함을 보여준다. 적절한 값을 선택하기 위해서는 실험이 동반되어야 할 것으로 생각된다.

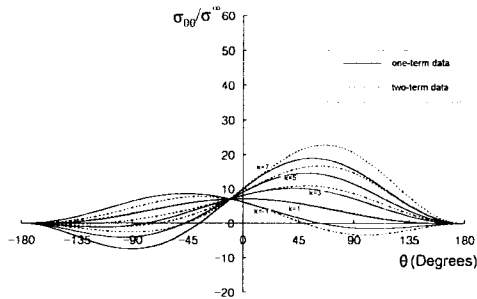


Fig. 4 Variation of  $\sigma_{\theta\theta}$  for  $\alpha=75^\circ$  .

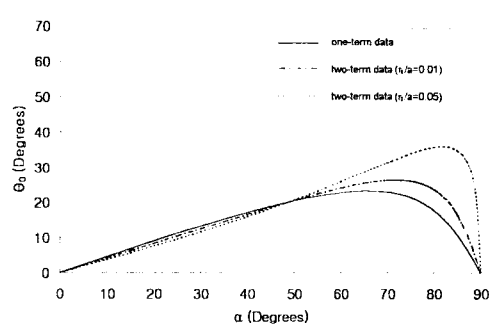


Fig. 5 Crack extension angle for an inclined crack in the case of  $k=5$ .

## 5. 결론

직방성체내 2축하중을 받는 경사균열에 대한 해석함수를 유도하고 이로부터 균열선단부근에서의 응력의 급수전개식에서 2차항이 내포된 응력분포식을 산출하였다. 균열주위의 원주응력분포와 경사균열의 진전각도는 2차항의 존재에 따라서 크게 변화함을 확인하였다. 일반적으로 균열에서 모드II의 성질이 활발하게 일어나서 균열의 진전각도가 균열선과 많이 벗어날수록 2차항을 고려한 균열진전각도의 예측이 균열체의 안전설계에 중요함을 확인할 수 있었다.

**[참고문헌]**

- [1] 임원균, 최승룡, 안현수, “비특이향을 고려한 균질이방성체내 수평균열의 해석”, 대한기계학회논문집A, 제24권 제1호, pp.69-78, 2000.
- [2] 임원균, “이방성체내 경사균열의 진전 예측”, 한국항공우주학회논문집, 제29권 제3호, pp.46-54, 2001.
- [3] Lim, W.K., Choi, S.Y and Sankar, B.V, “Biaxial Load Effects on Crack Extension in Anisotropic Solids”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 68, No. 4, pp.403-416, 2001.
- [4] Savin, G.N., Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [5] Buczek, M. B. and Herakovich, C. T., “A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials”, J. Compos. Mater, Vol.19, pp.544-553, 1985.