

# 컴퓨터 연산을 통한 언어형 퍼지 제어 시스템의 새로운 안정도 해석: 2부 - 안정도 해석

김은태, 박순형\*, 박민용\*  
국립한경대학교 제어계측공학과  
연세대학교 전기전자공학과\*

## A new computational approach to stability analysis of linguistic fuzzy control systems - Part 2: Stability Analysis

### Abstract

*In this paper, we propose a new computational approach to stability analysis of the linguistic control systems. The FLC is assumed to be modeled as a combination of affine systems. Stability is tested via the LMI. Computer simulation result is given to illustrate the validity of the suggested methodology.*

### I. 서론

인간의 언어와 사고과정을 그대로 구현한 퍼지 논리는 최근 공학이나 과학의 분야에서 강력한 실시간 개발 툴로 각광을 받고 있고 특히 제어분야에서 많은 응용 결과가 보고되고 있다.

이 같은 응용과 함께 이론분야에서도 연구가 진행되고 있는데 이론 분야에 대한 연구는 주로 안정도 해석으로 집중되고 있다. 지금까지 보고된 퍼지 안정도에 대한 연구는 사용된 퍼지 제어 시스템의 종류에 따라 다음의 몇 가지로 구분될 수 있다.

우선 가장 널리 연구가 진행되는 퍼지 시스템은 Takagi-Sugeno (TS) 퍼지 시스템이다. TS 퍼지 시스템은 후건부가 선형식으로 표현된 퍼지 시스템으로 선형 제어 이론을 이용하여 해석할 수 있다는 특징 때문에 많은 연구가 진행되고 있다 [1].

두 번째로는 적응 퍼지 시스템을 들 수 있다. 적응 퍼지 시스템은 기존의 적응 비선형 제어를 대신하는 방식으로 Wang에 의해 시작되었고 [2] 최근 Chen등에 의해 Hoo 이론과 결합하여 연구가 널리 진행되고 있다[3].

그러나 아직 Mamdani가 처음 사용했던 형태의 언어

형 퍼지 시스템이나 그 변형인 싱글톤 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구는 거의 진행되고 있지 않은 것이 사실이다. 이는 언어형 퍼지 제어기가 설계는 용이하지만 인간의 언어로 표현되어 있기 때문에 안정도 해석이 어렵기 때문이다.

본 논문에서는 지금까지의 연구와는 전혀 다른 방식으로 언어형 싱글톤 퍼지 제어 시스템의 안정도를 해석한다. 본 논문의 방식은 컴퓨터 연산에 기반을 둔 방식으로 우선 안정도 해석을 위해 퍼지 시스템을 영역별 어핀 시스템으로 모델링한다. 그후 모델링된 어핀 시스템의 안정도는 S과정과 선형행렬부등식 (Linear Matrix Inequality)을 이용하여 판정한다.

### II. 언어형 퍼지 시스템과 선형 모델

본 장에서는 편의상 2-입력 1-출력의 퍼지 제어기를 생각한다.

$$R^{nm} : \text{If } x_1 \text{ is } A_1^n \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^m \\ \text{then } u \text{ is } u^{nm} \quad (1)$$

( $n=1, \dots, p$  이고  $m=1, \dots, q$ ).

이때 싱글톤 퍼지화기와 추론의 T논을 이용하면 퍼지 추론의 결과는 다음의 식 (2)으로 주어진다.

$$u = Fuz(x) = Fuz(x_1, x_2) = \\ = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{A_1^i(x_1)A_2^j(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)} \right\} u^{ij} \quad (2) \\ = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Pi^{ij}(x_1, x_2) u^{ij}$$

여기서  $\Pi^{ij}(x_1, x_2) = \frac{A_1^i(x_1)A_2^j(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)}$  는 퍼지 기저함수이다. 안정도 해석을 용이하게 하기 위하여 전전

부 소속함수는 그림 1과 같은 비모순적 삼각형 함수를 이용하도록 한다.

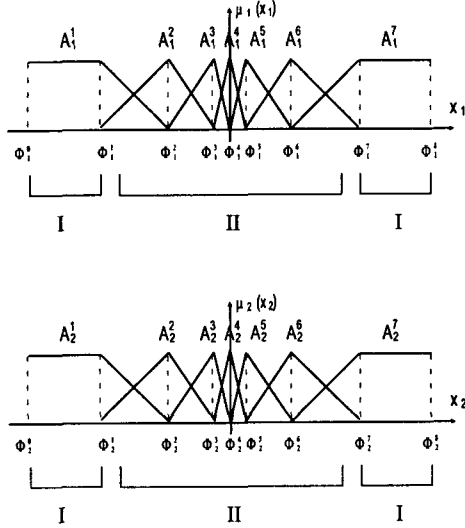


그림 1. 비모순적 삼각형 함수

그림 1의 전진부 함수는 입력 영역을 여러 개의 작은 영역으로 분할하며, 이 때 각 영역은 다음의 식으로 표시된다.

$$\Omega^{nm} \equiv \{x = (x_1, x_2) \mid \phi_1^n \leq x_1 \leq \phi_1^{n+1}, \phi_2^m \leq x_2 \leq \phi_2^{m+1}\} \quad (3)$$

( $n=0, \dots, p, m=0, \dots, q$ )

본 논문에서 원점은 제어기의 평형점으로 가정한다. 또 식 (4)와 같이  $\Omega_0$ 는 원점을 포함한 영역의 집합을 나타내는 것으로 하고  $\bar{\Omega}$ 는 원점을 포함하지 않은 영역의 집합으로 한다.

$$\Omega_0 = \{\Omega^{nm} \mid 0 \in \Omega^{nm}\} \quad (4-1)$$

$$\bar{\Omega} = \{\Omega^{nm} \mid 0 \notin \Omega^{nm}\} \quad (4-2)$$

식 (1)로 표현되는 언어형 퍼지 시스템은 [4]에서 다음의 식(5)으로 표현되고

$$Fuz(x_1, x_2) = C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \quad (5)$$

이 식은 다음과 같이 두 개의 선형식으로 유계할 수 있다.

$x \in \Omega^{nm}$ 에 대하여

$$K^{nm} x + k_0^{nm} \leq$$

$$Fuz(x_1, x_2) = \quad (6)$$

$$C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \leq \bar{K}^{nm} x + \bar{k}_0^{nm}$$

여기서  $x \equiv [x_1 \ x_2]^T$ ,  $K^{nm} \equiv [k_1^{nm} \ k_2^{nm}]$ ,  $\bar{K}^{nm} \equiv [\bar{k}_1^{nm} \ \bar{k}_2^{nm}]$ 이다. 위의 식에서  $K^{nm}$ ,  $\bar{K}^{nm}$ 을 구하는 방법은 [4]에서 찾을 수 있다. 즉 퍼지 시스템 (1)은 식 (6)과 같이 두 개의 선형식으로 모델링할 수 있다.

### III. 컴퓨터 연산을 이용한 안정도 해석

식 (6)에서 퍼지 시스템을 다음의 다각 선형시스템 (polytopic linear system)으로 볼 수 있다.

$$u = Fuz(x) = Co \{ K^{nm} x + k_0^{nm}, \bar{K}^{nm} x + \bar{k}_0^{nm} \}$$

여기서  $Co(\cdot)$ 는 컨벡스 헐 (convex hull)을 나타낸다. 이제 제어 플랜트는 다음의 TS 퍼지 시스템으로 표현되는 비선형 시스템으로 가정한다.

$$R_\sigma: \text{ If } x_1 \text{ is } M_{\sigma 1} \text{ and } x_2 \text{ is } M_{\sigma 2}, \quad (7)$$

$$\text{ then } \dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$$

여기서  $\sigma=1, \dots, r$ 고  $r$ 은 퍼지 규칙의 수이다. 위 플랜트의 입출력 식은 식 (8)로 표현된다.

$$\dot{x} = \sum_{\sigma=1}^r h_\sigma(x) \{ A_\sigma x + B_\sigma u \} \quad (8)$$

$$= Co_{\sigma=1 \dots r} \{ A_\sigma x + B_\sigma u \}$$

여기서  $w_\sigma(x) = M_{\sigma 1}(x_1)M_{\sigma 2}(x_2)$ ,

$$h_\sigma(x) = \frac{w_\sigma(x)}{\sum_{\sigma=1}^r w_\sigma(x)}, \quad h_\sigma(x) \geq 0.$$

편의상  $\Sigma^{nm}$ 를 영역  $\Omega^{nm}$ 에서 활성화되는 퍼지 규칙의 집합으로 한다. 이 경우 퍼지 제어기와 플랜트의 폐루프 시스템은 다음의 다각시스템으로 표현된다.

$$\dot{x} = Co \{ (A_\sigma + B_\sigma K^{nm})x + B_\sigma k_0^{nm}, (A_\sigma + B_\sigma \bar{K}^{nm})x + B_\sigma \bar{k}_0^{nm} \} \quad (9)$$

$$= Co \{ \underline{G}_\sigma^{nm} x + \underline{\mu}_\sigma^{nm}, \bar{G}_\sigma^{nm} x + \bar{\mu}_\sigma^{nm} \}$$

for  $x \in \Omega^{nm}$ ,

여기서  $\sigma \in \Sigma^{nm}$ ,  $\underline{\mu}_\sigma^{nm} \equiv B_\sigma \underline{k}_0^{nm}$ ,  $\overline{\mu}_\sigma^{nm} \equiv B_\sigma \overline{k}_0^{nm}$

$$\underline{G}_\sigma^{nm} \equiv (A_\sigma + B_\sigma \underline{K}^{nm}), \quad \overline{G}_\sigma^{nm} \equiv (A_\sigma + B_\sigma \overline{K}^{nm}),$$

**정리 1.**

영역  $\Omega^{nm} \in \overline{\Omega}$ 에서 다음의 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬  $P$ 가 존재하면 페루프 시스템 (9)는 주어진 영역에서 에너지 함수  $V(x) = x^T P x$ 의 의미에서 안정하다.

$\Omega^{nm} \in \overline{\Omega}$ 에서,

$$x^T (\overline{G}_\sigma^{nm T} P + P \overline{G}_\sigma^{nm}) x + \overline{\mu}_\sigma^{nm T} P x + x^T P \overline{\mu}_\sigma^{nm} < 0$$

$$x^T (\underline{G}_\sigma^{nm T} P + P \underline{G}_\sigma^{nm}) x + \underline{\mu}_\sigma^{nm T} P x + x^T P \underline{\mu}_\sigma^{nm} < 0$$

$\Omega^{nm} \in \Omega_0$ 에서

$$x^T (\overline{G}_\sigma^{nm T} P + P \overline{G}_\sigma^{nm}) x < 0$$

$$x^T (\underline{G}_\sigma^{nm T} P + P \underline{G}_\sigma^{nm}) x < 0.$$

(증명)

증명은 생략

정리 1의 결과를 S과정을 이용하여 선형행렬부등식으로 표현한다. S과정의 역할은 선형행렬부등식의 범위를 정하는 것으로 이를 위해서는 영역  $\Omega^{nm}$ 를 이차부등식의 형태로 표현한다. 영역

$$\phi_1^n \leq x_1 \leq \phi_1^{n+1}$$

$$\phi_2^m \leq x_2 \leq \phi_2^{m+1}$$

는 다음과 같은 이차부등식으로 바꿀 수 있다.

$$x^T Q_1^{nm} x + 2x^T R_1^{nm} + s_1^{nm} \leq 0 \quad (10-1)$$

$$x^T Q_2^{nm} x + 2x^T R_2^{nm} + s_2^{nm} \leq 0 \quad (10-2)$$

여기서

$$Q_1^{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2^{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1^{nm} = \left( -\frac{1}{2}(\phi_1^n + \phi_1^{n+1}) \quad 0 \right)^T, \quad s_1^{nm} = \phi_1^n \phi_1^{n+1},$$

$$R_2^{nm} = \left( 0 \quad -\frac{1}{2}(\phi_2^m + \phi_2^{m+1}) \right)^T, \quad s_2^{nm} = \phi_2^m \phi_2^{m+1}.$$

(10)식과 S과정을 이용하면 정리1은 다음과 같이 된다.

**보조정리 1.**

영역  $\Omega^{nm} \in \overline{\Omega}$ 에서 다음의 선형행렬부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬  $P$ 와 양수  $\overline{\tau}_i^{nm}$ ,  $\underline{\tau}_i^{nm}$ 가 존재하면 페루프 시스템 (9)는 주어진 영역에서 에너지 함수  $V(x) = x^T P x$ 의 의미에서 2차적으로 안정하다.

$\Omega^{nm} \in \overline{\Omega}$  영역에서

$$\overline{G}_{\sigma\sigma}^{nm T} P_a + P_a \overline{G}_{\sigma\sigma}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \overline{\tau}_i^{nm} Q_{\sigma i}^{nm} < 0$$

$$\underline{G}_{\sigma\sigma}^{nm T} P_a + P_a \underline{G}_{\sigma\sigma}^{nm} - \sum_{i=1}^2 \underline{\tau}_i^{nm} Q_{\sigma i}^{nm} < 0$$

$\Omega^{nm} \in \Omega_0$  영역에서

$$\overline{G}_\sigma^{nm T} P + P \overline{G}_\sigma^{nm} < 0$$

$$\underline{G}_\sigma^{nm T} P + P \underline{G}_\sigma^{nm} < 0$$

여기서  $\overline{G}_{\sigma\sigma}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} \overline{G}_\sigma^{nm} & \overline{\mu}_\sigma^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_a \equiv \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{G}_{\sigma\sigma}^{nm} \equiv \begin{pmatrix} \underline{G}_\sigma^{nm} & \underline{\mu}_\sigma^{nm} \\ 0^T & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\sigma i}^{nm} = \begin{pmatrix} Q_i^{nm} & R_i^{nm} \\ R_i^{nm T} & s_i^{nm} \end{pmatrix}$$

**VI. 모의실험**

제어 대상은 다음의 식으로 나타나는 모터 시스템이다.

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \quad (11)$$

$$\frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s}$$

여기서  $K_i = 10.02 \text{ oz-in./A}$ ,  $K_b = 7.41 \text{ V/1000 rpm}$ ,

$$R_a = 2.64 \Omega, \quad L_a = 3.39 \text{ mH},$$

$$B_m = 0.1 \text{ oz-in./1000rpm}, \quad J_m = 0.0038 \text{ oz-in.-s}^2.$$

제어 목표는 식 (11)의 모터 시스템이 주어진 경로로 추적하는 것이다. 우선 식(11)의 모터 식은 다음과 같이 상태공간으로 표시하고 퍼지 제어기는 [4]의 제어기를 이용한다.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T = [e, \dot{e}, \ddot{e}]^T, \quad u = e_a$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(K_b K_i + R_a B_m)}{L_a J_m} & -\frac{(R_a J_m + B_m L_a)}{L_a J_m} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_i}{L_a J_m} \end{pmatrix}$$

보조정리 1을 적용하기 위하여 각  $Q^{mm}$ 에 대한 식 (10)의 타원식을 만들고 Matlab LMI toolbox를 이용하여 보조정리 1의 선형행렬부등식을 푼다. 위의 예는 다음과 같은 양한정 공통 행렬  $P$ 를 찾는다.

$$P = \begin{pmatrix} 0.604026411 & 0.0040947946 & 0.0000020448 \\ 0.004094794 & 0.0008435102 & 0.0000007792 \\ 0.000002044 & 0.0000007792 & 0.000000063 \end{pmatrix}$$

다음의 그림 2은 모터의 기준신호가  $r=3$  (rad)일때의 전체 시스템 응답이다. 해석과 같이 퍼지 시스템이 안정하다는 것을 알 수 있다.

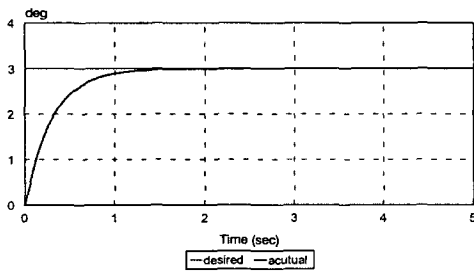


그림 2. 퍼지 제어의 결과

## V. 결론

본 논문에서는 어떤 시스템의 결합으로 모델링된 언어형 퍼지 시스템의 안정도를 해석하는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서 제안된 방식은 컴퓨터 연산을 통한 방식으로 기존의 해석적 방식이 실제 문제의 해결에 사용되기 어렵다는 단점을 극복한 방식이다.

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2000-2000-003-E00359)

## 참고문헌

- [1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy*

*Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992

- [2] L. -X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] B.-S. Chen, C.-H. Lee and Y.-C. Chang, "  $H^\infty$  tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp 32-43, Feb., 1996.
- [4] 김은태, 박순형, 박민용, "컴퓨터 연산을 통한 언어형 퍼지 제어 시스템의 새로운 안정도 해석: 1부 - 퍼지 시스템의 모델링," 대한전자공학회 하계대회, 2001.