정상상태에서 Fermi 분포를 고려한 드리프트-확산 방정식의 이산화 알고리즘

이은구 강성수 이동렬 *노영준 *김철성
부천대학 정보통신계열, *인하대학교 전자공학과
전화 : 032-610-3364, 헨드폰 : 011-662-3090

The Discretization Method of the Stationary Drift-Diffusion Equation with the Fermi-Dirac Statistics

Eun Gu Lee Sung Su Kang Dong Lyul Lee Yung Jun Nho Cheol Seong Kim
Dept. of Electronics Eng., Univ. of INHA
#253 Yonghyun-dong Nam-Gu, Inchon, Korea

요약

소자 내부의 전위와 전자 및 정공 의사 페르미 준위에 따른 반송자의 정확한 농도를 얻기 위해 Fermi-Dirac 통계를 구현하는 방법을 제시하였다. 또한 Fermi-Dirac 통계를 고려하여 반도체 방정식을 이산화하는 방법을 제안한다.

제안된 방법을 검증하기 위해 전력 바이폴라 접합 트랜지스터를 제작하였으며 모의 실험 결과, 컬렉터-에미터 전압 대 컬렉터 전류는 현재 업계에서 상용화된 소자의 실측치와 비교하여 최대 15%이내의 상대오차를 보였다.

I. 서론

모터 구동 드라이버 IC에는 전력용 BJT와 DMOS가 널리 사용되고 점차 높은 rpm을 유지하기 위해 고 출력이 요구되는 추세이며 반면에 인가 바이어스에 따른 안정된 동작이 가능한 소자의 설계 문제가 대두되고 있다.

그러나 전력용 반도체 소자의 개발은 실험에만 의존하므로 많은 개발비용과 시간이 요구되고 있으며 전력용 IC를 제작하기 위해서는 SPICE와 같은 회로 시뮬레이터가 필요하나 회로 모의실험에 요구되는 모델 파라미터의 부정확도 혹은 정확한 모델의 부재로 인하여 제품의 개발 기간이 지연되고 있는 실정이다.

전력 소자의 설계 및 전력용 IC 설계가 동시에 진행되기 위해서는 소자 시뮬레이터를 이용하여 전력 소자의 전기적 특성을 최적화 시키는 방법이 필요하다. 특히 전력 BJT의 에미터와 베이스 영역과 같이 고 농도의 불순물이 주입된 영역에서 효과적으로 예측하기 위해서는 Fermi-Dirac 통계[1]를 고려한 모의실험이 진행되어야 한다.

본 논문에서는 Fermi-Dirac 통계를 고려한 반도체 방정식의 이산화방법을 제시한다. Fermi-Dirac 통계를 적용하기 위해 축퇴인자를 사용하며 해의 수렴 특성에 영향을 주지 않도록 평균값을 취한다.

전자 및 정공의 농도를 구하기 위해 Joyce-Dixon[2][3] 근사식을 구현하는 방법을 제시하며 또한 전위와 전자 및 정공 Slotboom 농도의 초기치 설정방법을 제시한다.

제안된 이산화방법과 초기치 설정방법을 검증하기 위해 전력용 BJT를 모의실험하며 BANDIS[4] 결과와 MEDICI[2] 결과를 비교한다.

II. Fermi-Dirac 통계를 고려한 반도체 방정식의 이산화

1. Fermi-Dirac 통계

축퇴인자[2]는 기존의 상업용 2차원 소자 시뮬레이터인 MEDICI의 경우 전자 및 정공 농도를 구하기 위해서 전도대 및 가전자대 가장자리의 에너지 레벨을 기준으로 하는 반면에 자체 개발된 BANDIS의 경우에는 진성 페르미 에너지 레벨 E_i를 기준으로 하기 때문에 정확한 반송자 통계를 얻기 위해서 축퇴인자 γ_n, γ_p를 진성 페르미 레벨을 기준으로 다음 식 (1)과 같이 개선해야 한다.

$$\gamma_n = \frac{F_{1/2}(\eta_n)}{e^{\eta_n}} \cdot \frac{N_c}{n_i} \qquad (1a)$$

$$\gamma_p = \frac{F_{1/2}(\eta_p)}{e^{\eta_p}} \cdot \frac{N_v}{n_i} \qquad (1b)$$

여기서 η_n, η_p는 진성 페르미 레벨을 기준으로 한 정규화된 전자 및 정공 의사 페르미 준위이다.

2. 정상상태에서 연속 방정식 이산화

Fermi-Dirac 분포를 고려한 전자 연속 방정식 의 해는 무한개의 선형독립인 절점에 대한 자 Slotboom 변수 v와 대응하는 미지계수의 곱으로 표현될 수 있다. 컴퓨터를 이용하여 해를 구하는 경우에는 사용 가능한 주 메모리의 제한으로 인하여 절점 수 N을 제한시키므로 전자 연속 방정식은 오차를 수반한다. 오차를 수반하는 전자 연속 방정식을 R_v로 정의하면 식 (2)로 표현된다[4].

$$R_v = -\nabla \cdot \overline{J_n} + U \qquad (2)$$

전위 u, 전자 Slotboom 변수 v와 정공 Slotboom 변수 w를 유한개의 절점 값의 선형조합으로 표현하면 오차가 발생하므로 각 절점에서 이웃한 절점의 영향으로 인한 오차를 소멸시키는 직교 가중함수 W를 곱한 후 적분한다. Galerkin 방법에서는 자기 절점에서 1의 값을 가지며 그 외의 절점에서 0의 값을 갖는 직교 가중함수 W를 도입하여 오차를 최소화시킬 수 있다. 그러므로 정상상태에서 적분형태로 변환된 전자 연속 방정식을 F_v로 정의하면 식 (3)이 구해진다[4].

$$\begin{aligned} F_v &= \int_\Omega R_v W d\Omega \\ &= \int_\Omega \nabla \cdot (\mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla v)\, W d\Omega - c\int_\Omega U(u,v,w)\, W d\Omega \end{aligned} \qquad (3)$$

여기서 $c = \frac{q}{kT}$이고 $U(u,v,w)$는 반송자의 생성-재결합률이다.

v가 요소 내에서 선형적으로 변화한다고 가정하는 경우에는 우변의 첫 항은 0이 되어 계산할 수 없으므로, weak formulation으로 수식을 변형할 필요가 있다. Weak formulation 형태의 방정식을 얻기 위해 식 (3)의 부분적분을 수행하면 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F_v &= \oint_\Gamma \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla v \cdot W d\Gamma - \int_\Omega \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla v \cdot \nabla W d\Omega \\ &\quad - c\int_\Omega U(u,v,w)\, W d\Omega \end{aligned} \qquad (4)$$

v가 요소 내에서 선형적으로 변화하는 경우에도 식 (4)의 우변을 계산할 수 있음을 알 수 있다.

경계 Γ에서 주어지는 적분 항인 ∇v는 경계 면에 수직인 성분을 의미하며 소자의 시뮬레이션에 사용되는 경계조건은 2가지로 정의한다. 전극은 Dirichlet 경계(Γ_p)로 가정하고 전극을 제외한 나머지 영역은 Neumann 경계(Γ_n)로 가정하면 식 (4)의 Γ는 Γ_n과 Γ_p의 합이 된다.

식 (4)의 우변 항을 형성하는 반송자의 생성-재결합률 $U(u,v,w)$을 간결하게 표현하기 위해 다음 과정부터는 기호를 그대로 사용한다.

소자를 구성하는 절점 수가 N개일 때, Galerkin 방법에 사용되는 직교 가중함수 W는 오차의 최소화를 위해 식 (5b)와 같이 N개의 선형함수로 표현된다.

전체 해석영역 Ω를 부분 해석영역인 Ω_s로 나누어 해석할 때, 정공 Slotboom 변수 w 및 직교 가중함수 W는 식 (5b)로 표현할 수 있다.

$$w = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(\Omega) w_j = \sum_{k=1}^{N_E}\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k(\Omega) w_j^k \qquad (5a)$$

$$W = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(\Omega) W_j = \sum_{k=1}^{N_E}\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k(\Omega) W_j^k \qquad (5b)$$

식 (5)에서 요소단위로 정의되는 $\phi_j^k(\Omega)$는 요소의 형상함수이고 N_E는 해석영역을 구성하는 총 요소 수이다. N_{3D}는 요소를 구성하는 절점 수이며 삼각형인 경우에 3, 사면체인 경우에는 4가 된다.

식 (4)를 프로그램으로 용이하게 처리하기 위해서는 요소에 기초한 형태로 변환해야한다. 식 (5a)와 (5b)를 절점에 기초한 식 (4)에 대입하면 요소에 기초한 식 (6)이 구해진다.

$$\begin{aligned} F_v &= \oint_\Gamma \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla\left(\sum_{k=1}^{N_E}\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k v_j^k\right) \cdot \left(\sum_{h=1}^{N_E}\sum_{i=1}^{N_{3D}} \phi_i^h W_i^h\right) d\Gamma \\ &\quad - \int_\Omega \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla\left(\sum_{k=1}^{N_E}\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k v_j^k\right) \cdot \nabla\left(\sum_{h=1}^{N_E}\sum_{i=1}^{N_{3D}} \phi_i^h W_i^h\right) d\Omega \\ &\quad - c\int_\Omega U(u,v,w) \cdot \left(\sum_{h=1}^{N_E}\sum_{i=1}^{N_{3D}} \phi_i^h W_i^h\right) d\Omega \end{aligned} \qquad (6)$$

전자, 정공 Slotboom 변수 및 직교 가중 함수에 사용되는 형상함수인 $\phi_j^k(\Omega)$는 자기요소에서만 k 값을 갖고 나머지 요소에서는 0이 되므로, 식 (6)에서 h와 k가 일치하지 않는 경우에 $\phi^h \cdot \phi^k$항은 0이고 h와 k가 일치하는 $\phi^k \cdot \phi^k$ 항만 값을 갖는다. 일치된 요소 번호를 k로 통일시키고 $i\,(i=1,2,..N_{3D})$ 번째 절점에서 이산화된 전자 연속 방정식을 F_{vi}로 정의하면 식 (6)은 식 (7)로 정리된다.

$$\begin{aligned} F_{vi} &= \sum_{k=1}^{N_E}\Big\{ \oint_\Gamma \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla\left(\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k v_j^k\right) \cdot \phi_i^k d\Gamma \\ &\quad - \int_\Omega \mu_n \gamma_n e^{u+v} \nabla\left(\sum_{j=1}^{N_{3D}} \phi_j^k v_j^k\right) \cdot \nabla \phi_i^k d\Omega \\ &\quad - c\int_\Omega U(u,v,w) \cdot \phi_i^k d\Omega \Big\} \end{aligned} \qquad (7)$$

전역좌표로 표현된 삼각형 혹은 사면체는 좌표변환을 통해 정규화시킨 삼각형 혹은 사면체로 변환될 수 있다. 전역좌표로 표현된 식 (7)을 국부좌표의 형상함수인

$N_i(\Omega)$ 를 이용하여 변환하면 적분형태의 전자 연속 방정식 (8)이 구해진다.

$$F_{vi} = \sum_{k=1}^{N_e}\Big\{ \oint_{\Gamma} \mu_n \gamma_n e^{u+V_s} \nabla\Big(\sum_{j=1}^{N_n} N_j v_j^k\Big) \cdot N_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mu_n \gamma_n e^{u+V_s} \nabla\Big(\sum_{j=1}^{N_n} N_j v_j^k\Big) \cdot \nabla N_i \, d\Omega - c\int_{\Omega} U(u,v,w) \cdot N_i \, d\Omega \Big\} \quad (8)$$

식 (2) - 식 (8)의 절차를 정공 연속 방정식에 적용하면 프로그램에 사용되는 적분형태의 정공 연속 방정식 (9)를 얻을 수 있다.

$$F_{wi} = \sum_{k=1}^{N_e}\Big\{ \oint_{\Gamma} \mu_p \gamma_p e^{-u+V_s} \nabla\Big(\sum_{j=1}^{N_n} N_j w_j^k\Big) \cdot N_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mu_p \gamma_p e^{-u+V_s} \nabla\Big(\sum_{j=1}^{N_n} N_j w_j^k\Big) \cdot \nabla N_i \, d\Omega - c\int_{\Omega} U(u,v,w) \cdot N_i \, d\Omega \Big\} \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)에서 전류밀도는 전위 u의 지수함수이고 Slotboom 변수 v 및 w에 대해서는 선형적으로 변하는 것을 알 수 있다. 그러므로 전류밀도가 모서리에서만 정의되고 각각 상수 및 선형적으로 변한다는 가정에서 이산화를 진행하는 S-G법 혹은 혼성 유한 요소법에 비해 이산화 오차가 적어진다. 또한 해석에 사용되는 절점전위 u, 전자 Slotboom 변수 v 및 정공 Slotboom 변수 w가 요소 내에서 정의되므로 둔각 삼각형 문제를 피할 수 있다.

3. 전체 흐름도

그림 1은 반도체 방정식의 해석을 위한 전체 흐름도이다. Joyce-Dixon 근사를 사용하므로 Fermi-Dirac 통계는 전처리 과정에서 구한다.

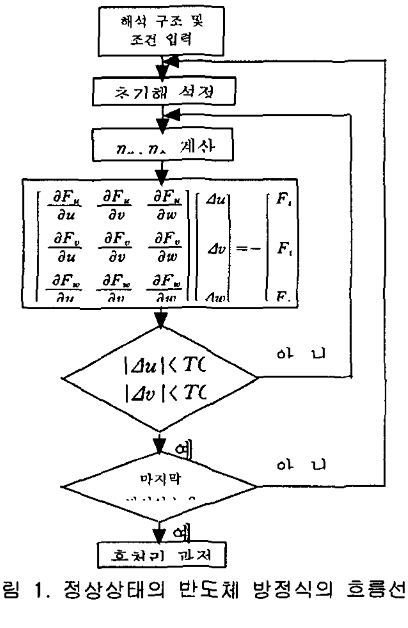

그림 1. 정상상태의 반도체 방정식의 흐름선도

III. 결과 및 고찰

모의실험 결과를 검증하기 위한 시료로 현재 업계에서 CD-ROM 구동 드라이버 IC로 상용화된 전력용 BJT 소자의 측정 데이터를 사용하였다. BANDIS에서 모의 실험을 위하여 동일한 조건에서 2차원 공정 시뮬레이터인 T-SUPREM4를 이용하여 Digital Alpha Unix 환경하에서 시료를 제작하였다.

Fermi-Dirac 통계를 고려한 전력 BJT소자의 전류-전압 특성을 얻기 위해서 외부에 한 개의 정 전류원을 포함하는 공통 에미터 증폭기 회로

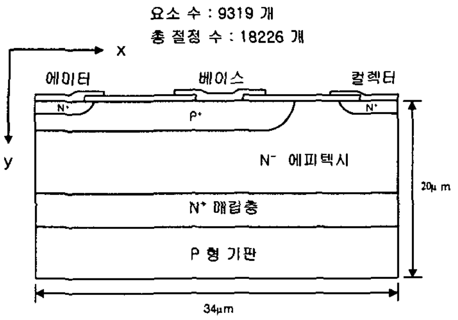

그림 2. 상용화된 모의 실험용 BJT 소자의 dimension

를 구성하고 전류원으로부터 베이스에 인가되는 전류를 1.0 에서 3.0 [μA]까지 변화시키면서 모의 실험을 반복하여 컬렉터 전류를 추출하였다. 표 1은 모의 실험에 사용되어진 물리적인 모델을 보인다.

표 1. 모의실험에 사용되어진 물리적인 모델

물리적인 현상	사용되어진 모델
이동도	Philips Unified 이동도
고농도 효과	에너지 갭 협폭 효과
반송자 분포	Fermi-Dirac 통계
생성-재결합	Shockley-Hall-Read, Auger

모의실험 결과 추출한 단자 전류-전압 특성을 현재 업계에서 CD-ROM의 모터 구동 드라이버 IC로 상용화된 전력 BJT 소자의 실측치와 비교하였다.

그림 3은 모의실험을 통해서 얻어진 전력 BJT 소자의 에미터-컬렉터 전압 대 컬렉터 전류 특성이다. 베이스에 낮은 전류레벨인 1.0에서 1.5 [μA] 영역에서는 에미터-컬렉터 전압이 증가함에 따라 최대 10%미만의 일정한 상대오차를 보였고 베이스에 비교적 높은 전류가 인가되는 경우에는 에미터-컬렉터 전압이 약 0.5 [V] 근처에서 최대 15%의 상대오차를 보였으며 그 이상의 영역에서는 평균 5%의 상대오차를 얻었다.

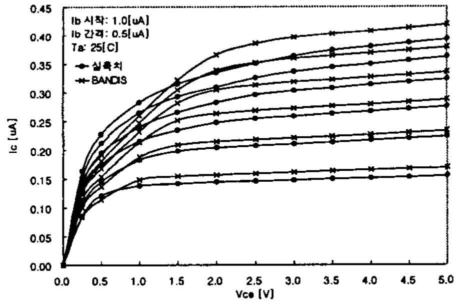

그림 3. 에미터-컬렉터 전압 대 컬렉터 전류의 실측치와의 비교

그림 3에서와 같은 실측치와 비교하여 경사가 일정한 영역은 제작된 전력 BJT 시료를 모의실험 시간을 단축하기 위해서 매립층의 일부를 잘라냈기 때문에 발생한 결과로 추측된다.

Ⅳ. 결론

전력 바이폴라 접합 트랜지스터의 에미터와 베이스 영역과 같이 고 농도로 불순물이 주입된 영역에서 정교한 소자 내부 전위 분포와 정확한 전류-전압 특성을 예측하기 위해 Fermi-Dirac 통계를 수치 해석적으로 구현하는 방법을 제시하였으며 축퇴인자 및 확산계수를 Fermi-Dirac 통계를 고려하였다.

외부 정 전류원의 크기를 1.0에서 3.0 [μA]까지 0.5 [V] 간격으로 모의실험하여 컬렉터 에미터 전압 대 컬렉터 전류를 추출한 결과, 현재 업계에서 상용화된 전력 바이폴라 접합 트랜지스터의 실측치와 비교하여 최대 15% 미만의 상대오차를 얻었으며 따라서 제안된 해석 방법이 타당함을 확인하였다.

차후에 과도상태 및 격자 온도 효과와 충돌 이온화로 인한 전자 사태 항복 현상이 구현된다면 전력 바이폴라 접합 트랜지스터의 더욱 정확한 소자 정특성을 예측하리라 생각된다.

본 연구는 2000년 부천대학 산업기술연구소 연구비 지원의 일환으로 수행되었습니다.

V. 참고문헌

[1] C. T. Sah, Fundamentals of Solid-State Electronics, World Scientific.

[2] TMA, MEDICI manual, Technology Modeling Associates, California, 1995

[3] W. B. Joyce and R. W. Dixon, "Analytic Approximation for the Fermi Energy of an ideal Fermi Gas," Appl. Phys. Lett. Vol. 31, pp.354-356, 1977.

[4] 김태한, 변형된 결합법을 이용한 혼합모드 소자-회로 시뮬레이터 구현에 관한 연구, 인하대학교 대학원 박사논문, 1998.