

가변 블록-가변 스텝사이즈 LMS 적응 필터

최 훈, 김 대 성, 한 성 환, 배 현 덕
충북대학교 전자공학과

Variable Block-Variable Step Size LMS adaptive filters

Hun Choi, Dae-Sung Kim, Sung-Hwan Han, Hyeon-Deok Bae
Department of Electronics, Chungbuk National University
e-mail : eliga@eliga.homeip.net, hdbae@cbucc.chungbuk.ac.kr

Abstract

본 논문에서는 적응 필터의 계수 갱신에서 가변 블록을 사용하는 방법을 제안하였다. 데이터 블록의 길이는 MSE 학습곡선의 시정수에 비례하도록 하였다. 이 방법에서는 적응 필터가 정상상태로 접근함에 따라 스텝사이즈를 조정하여 필터계수 갱신의 헛수를 줄일 수 있다. 제안한 방법의 유용성을 입증하기 위한 컴퓨터 모의 실험을 통해 기존의 최적 스텝사이즈 수열을 이용한 알고리즘과 가변 스텝사이즈 알고리즘과 성능을 비교하였다. 그리고 MSE의 초기값을 최소화하는 최적 초기 스텝사이즈를 유도하였다. 유도된 최적 스텝사이즈를 가변 스텝사이즈 알고리즘에 적용, 그 성능을 평가 하였다.

I. 서 론

LMS 알고리즘은 그 구조와 계산상의 간편성 그리고 수렴의 안정성으로 인해 적응 필터링 응용[1]에서 가장 널리 이용되고 있다. 그 동안 많은 저자들에 의해 LMS 알고리즘의 안정성 및 정상상태오차 그리고 수렴속도 등에 관한 많은 연구가 이루어졌다[2-4]. 많은 연구들 중에서 가변 스텝사이즈 알고리즘[5-7]과 최적 스텝사이즈 수열을 이용한 알고리즘[8, 9]은 수렴속도와 정상상태오차 사이의 상반 관계를 해결하고자 하였다. 가변 스텝사이즈 알고리즘은 고정 스텝사이즈를 사용할 때 보다 수렴속도와 정상상태 오차사이의 성능감소를 개선하였지만 스텝사이즈 갱신을 위해 추가적인 계산량이 요구되는 단점이 있다. Bershad[8]는 입력 데이터 블록인 관측구간의 끝에서 MSE를 최소화 하도록 하는 스텝사이즈를 그 블록의 최적 스텝사이즈로 선택하였고 백색 입력 신호에 대한 최적 스텝사이즈를[8]에서 유도하였다. 이를 근간으로 [9]에서는 가변하는 최적 스텝사이즈 수

열을 입력신호의 각각의 블록에서 반복적으로 구하는 방법을 제안하였다. MSE를 최소화하는 스텝사이즈의 최적값은 초월함수(transcendental function)의 해를 구하는 문제이므로 백색잡음의 경우와 같이 단순화시켜 고려할 수 있으며, 이분법등의 근해석법(root finding method)을 통해 구할 수 있다[8, 9].

가변 스텝사이즈 알고리즘과 최적 스텝사이즈 수열 알고리즘의 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 가변 블록을 사용하는 적응 알고리즘을 제안한다. 가변 블록을 사용함에 있어 블록의 길이는 적응 알고리즘의 학습곡선(learning curve)의 시정수에 비례하도록 한다. 이 기법의 타당성은 적응필터가 정상상태에 접근해 감에 따라 필터계수 갱신에 따른 오차가 크게 변하지 않으므로 계수갱신을 매 샘플마다 하지 않아도 필터성능에는 큰 변화가 없다는데 있다. 그리고 각 가변 블록에서의 스텝사이즈는 기존 가변 스텝사이즈 알고리즘[6]을 이용한다. 제안한 방법의 성능은 초기 블록 길이를 변화 시켜 분석하며, 수렴속도와 정상상태 오차면에서 기존의 가변 스텝사이즈 알고리즘과 최적 스텝사이즈 수열 알고리즘[5, 6]과 성능을 비교 분석한다. 그리고 적응 알고리즘에서 첫번째 적응순간 평균자승오차가 스텝사이즈의 이차함수가 됨을 유도하고, 유도된 식으로부터 최적의 초기 스텝사이즈를 구할 수 있음을 보인다. 최적 초기 스텝사이즈의 유도는 적응 알고리즘에서 스텝사이즈 초기값 결정에 있어서 어려움을 해결할 수 있다. 최적 초기 스텝사이즈에 대한 적응 알고리즘에서의 영향을 백색 가우시안 신호를 입력으로 하여 가변 블록-가변 스텝사이즈에 적용, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 분석한다.

II. 가변 블록 길이의 유도

LMS 적응 필터는 MSE, $E[e^2(n)]$ 를 최소화하는 필터의 계수벡터 \mathbf{w}_n 를 구하는 시변 FIR 시스템이다

입력벡터 \mathbf{x}_n 을 갖는 적응필터의 오차신호 $e(n)$ 와 원하는 출력 $d(n)$ 은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}_n^T \mathbf{w} \quad (1)$$

가변하는 스텝사이즈를 사용하는 LMS 알고리즘의 계수벡터는 다음식에 의해 갱신된다.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(n)\mathbf{x}_n e(n) \quad (2)$$

가변 스텝사이즈의 조절을 위해 다음과 같은 식을 사용한다[9].

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma e^2(n) \quad (3)$$

여기서, $0 < \alpha < 1$ 이고 $\gamma > 0$ 이다.

MSE 는 다음과 같이 표현된다[8, 9].

$$J(n) = J_{opt} + tr[\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}_{vv}(n)] \quad (4)$$

J_{opt} 는 계수벡터 \mathbf{w}_{opt} 의 Wiener 필터의 MSE 이다.

$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n^T]$ 는 입력신호의 자기상관행렬 ($N \times N$) 이다. 일반적으로 독립 가정하의 입력신호는 분산 σ^2 , $\mathbf{R}_{xx} = \sigma^2\mathbf{I}$ (\mathbf{I} 는 $N \times N$ 항등행렬), 그리고 $tr[\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}_{vv}(n)] = N\sigma^2(\mathbf{K}_{vv}(n))_{ii}$ 인 백색과정(white process)이다. 스칼라 $[\mathbf{K}_{vv}(n)]_{ii} = \beta(n)$ 는 다음의 차분 방정식을 만족한다.

$$\beta(n+1) = [1 - 2\mu\gamma^2 + \mu^2\sigma^4(N+2)]\beta(n) + \mu^2\sigma^2 J_{opt} \quad (5)$$

식 (1)의 MSE 는 식 (5)를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J(n) = J_{opt} + N\sigma^2\beta(n) \quad (6)$$

식 (6)에서 $\beta(n)$ 이 μ 에 대한 초월함수(transcendental function)이기 때문에 MSE $J(n)$ 는 $\beta(n)$ 을 최소화하는 최적 스텝사이즈를 구함으로써 최소화 할 수 있다. 그러나 최적 스텝사이즈는 매우 제한된 경우에 대해서 근사할 수 있다. 그리고 이러한 최적 스텝사이즈를 구하기 위해서 수치적 근 해석법(root finding method) - 이분법(bisection technique)을 선택하였다[8]. 이러한 수치적 근 해석법은 데이터 처리를 위해 많은 추가적인 계산량이 요구된다. 이러한 문제점은 최적화 방법을 가변 스텝사이즈 기법으로 대체하여 해결할 수 있다. 이에 따른 추가 계산량은 가변하는 블록을 사용함으로써 해결한다. 적응 필터가 정상상태로 접근함에 따라 MSE 학

습곡선의 시정수는 증가하며 MSE 의 변화량은 감소한다. 그러므로 블록의 길이가 시정수에 비례하여 조정되는 것은 적절하다.

입력 자기상관행렬의 모든 고유값이 같을 때, LMS 알고리즘의 시정수는 표현은 다음과 같다[1].

$$T_{mse} = \frac{1}{4\mu\lambda} \quad (7)$$

(k+1)번째 블록과 k 번째 블록사이의 블록길이의 비는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} = \frac{[T_{mse}]_{k+1}}{[T_{mse}]_k} \quad (8)$$

입력신호는 분산이 σ^2 , 자기상관행렬 $\mathbf{R}_{xx} = \sigma^2\mathbf{I}$, 그리고 고유값의 비가 $\lambda_{k+1}/\lambda_k = 1$ 인 백색과정(white process)이라고 가정한다. 그러므로 다음 블록의 길이 L_{k+1} 는 다음처럼 표현된다.

$$L_{k+1} = \left\lfloor \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} L_k \right\rfloor \quad (9)$$

여기서 μ_k 는 가변 스텝사이즈 알고리즘[6]에 의해 결정된 k 번째 블록의 스텝 사이즈이다. 그리고 실수 $\lfloor a \rfloor$ 는 a 의 정수값이다.

가변 스텝사이즈를 갖는 가변 블록 방법, VBVS (Variable Block Variable Step-size) 알고리즘은 블록 내에서 스텝사이즈는 고정되며 블록이 변화하는 시점에서 스텝사이즈의 갱신이 이루어지므로 스텝사이즈 갱신의 수를 줄이며 가변 스텝사이즈[6, 9]의 단점이 되는 추가 계산량을 줄일 수 있다. VBVS 알고리즘의 우수한 성능은 IV 절에서 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 확인할 것이다

III. 최적 초기 스텝사이즈

식 (6)의 MSE 에서, $\beta(n)$ 는 스텝사이즈 μ 의 초월함수이다. 그러므로 μ 에 대해 $\beta(n)$ 를 미분하여 그 결과를 영(zero)으로 놓는 직접적인 방법으로는 최적 스텝사이즈를 구할 수 없다. 그러나 최초 $\beta(1)$ 에서 초기 최적 스텝사이즈 $\mu_{i,opt}$ 는 직접 구할 수 있다. 식 (5)로부터 $\beta(n)$ 의 일반식은 다음처럼 쓸 수 있다[8].

$$\beta(n) = \varphi^n \beta(0) + \mu^2 \sigma^2 J_{opt} \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi}, \quad |\varphi| \neq 1 \quad (10)$$

그리고 $n = 1, 2, 3, \Lambda$

여기서 φ 는 다음과 같이 정의 한다.

$$\varphi = 1 - 2\mu\sigma^2 + \mu^2\sigma^4(N+2) \quad (11)$$

식 (10)과 (11)로부터 $\beta(1)$ 이 μ 에 대해서 2 차 형태임을 알 수 있다. 따라서 초기 최적 스텝사이즈는 다음과 같이 직접 구할 수 있다.

$$\frac{d\beta(1)}{d\mu} = 0 \quad (12)$$

$$\mu_{opt} = \frac{\beta(0)}{\sigma^2(N+2)\beta(0) + J_{opt}} \cong \frac{1}{\sigma^2(N+2)} \quad (13)$$

여기서 $\beta(0) = (J(1) - J_{opt}) / N\sigma^2$ 이고 $J_{opt} \ll \sigma^2(N+2)\beta(0)$. 이 결과는 LMS 기반 알고리즘의 초기 스텝사이즈 결정에 유용하게 사용될 수 있다.

IV. 시뮬레이션 결과

이 절에서는 제안한 방법과 이전 절에서 전개한 새로운 해석 방법을 입증하기 위하여 제안한 VBVS 알고리즘에서 초기 블록길이에 따른 효과를 확인하고, 새롭게 찾은 최적 초기 스텝사이즈를 적용한 VBVS와 고정 블록을 사용하는 최적 스텝사이즈 알고리즘[9], 그리고 Kwong의 알고리즘[6]의 성능을 비교한다.

이들 시뮬레이션은 적응 시스템 식별[9]에 적용하였다. 입력은 평균이 영(zero)이고 분산이 1인 가우시안(Gaussian) 분포를 갖는 신호를 사용하였고, 관측 잡음(observation noise)의 분산은 10^{-5} 이다. 시뮬레이션 결과는 50회 반복한 앙상블평균(ensemble average)이다. 그리고 제안한 알고리즘에서 스텝사이즈의 변화를 위해 다음과 같은 Kwong의 알고리즘을 사용하였다.

$$\mu(n) = \alpha\mu(n) + \gamma e^2(n) \quad (14)$$

• 가변 블록 길이의 효과

가변 블록의 효과를 MSE와 시스템 mismatch에 관하여 평가하였다[6]. VBVS에서 사용된 파라미터들은 $\alpha = (1 - L \times 10^{-3})$, $\gamma = 1.0 \times 10^{-5}$, 초기 스텝사이즈 $\mu(0) = 0.02$, 필터 길이 $N = 47$, 그리고 초기 블록길이 $L_0 = 50$ 이다. 그리고 비교를 위해 사용된 알고리즘들[6, 9]의 파라미터 값들은 각각의 논문에서 사용된 값을 사용하였다. 그림 1과 그림 2는 각각 VBVS, Kwong의 알고리즘, 그리고 FBOS(fixed block optimum step size sequence)[9]의 MSE와 시스템 mismatch에 대해 비교한 결과이다. 그림 3은 VBVS에서 블록 길이의 변화를 보이고 있다. 이들 결과로부터 VBVS와 Kwong의 알고리즘이 FBOS에 비해 성능이 우수함을 알 수 있다. 그러나 VBVS에서 블록 길이가 점점 증가함에 따라 스텝사

이즈 갱신에 필요한 계산량이 감소한다. 그러므로 Kwong의 알고리즘에 비해 제안한 VBVS 알고리즘이 계산량에 있어서 효과적이다.

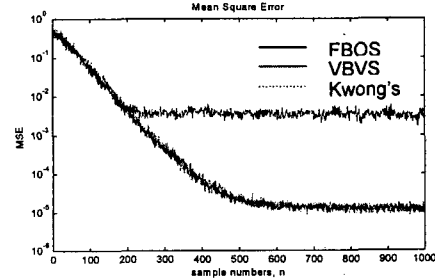


Fig. 1 MSE learning curves of the VBVS, FBOS algorithm and Kwong's algorithm

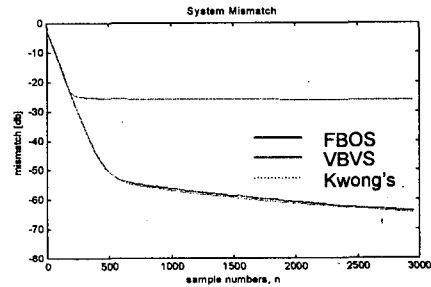


Fig. 2 System mismatch comparison of VBVS, FBOS algorithm, and Kwong's algorithm

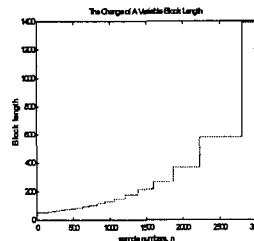


Fig. 3 The block length change of the VBVS

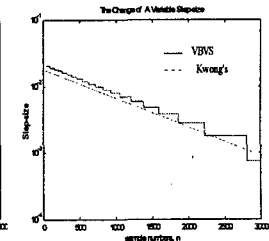


Fig. 4 The comparison of step size of the VBVS and Kwong's algorithm

• 초기 블록길이의 효과

VBVS의 초기 블록길이에 따른 효과를 그림 5와 그림 6에 나타내었다. 사용한 초기 블록의 길이는 20, 30, 40, 50, 그리고 100이다. 그림 5와 그림 6에서 블록의 길이가 수렴속도에 현저한 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다. 그러나 큰 블록길이를 사용했을 때 작은 블록길이를 사용할 때보다 스텝사이즈의 변화를 위한 계산상의 복잡성이 감소하게 된다.

최적 초기 스텝사이즈의 효과

최적 초기 스텝사이즈의 우수한 성능을 증명하기 위

해서 크기가 다른 초기값을 LMS 와 Kwong 의 알고리즘에 사용하였다. 사용한 필터는 20 차 FIR 이며 적응 시스템 인식에 적용되었다.

이들 시뮬레이션에서 사용된 스텝사이즈는 각각 $\mu_{small} = 0.02$, $\mu_{large} = 0.06$, 그리고 $\mu_{opt} = 1/\sigma^2(N+2)$ 이다. 입력신호와 관측 잡음은 이전 시뮬레이션에서 사용되었던 것과 같으며, Kwong 의 알고리즘에서 사용된 파라미터는 $\alpha = 0.998$, $\gamma = 4.8 \times 10^{-4}$ 이다.

그림 7-(a)는 세가지 서로 다른 고정 스텝사이즈를 갖는 LMS 알고리즘의 MSE 성능을 보이고 있다. 이로부터 최적 초기 스텝사이즈를 갖는 적응 필터가 다른 두가지 경우보다 빠른 수렴속도를 갖는다는 것을 알 수 있다. 또한 가장 작은 정상상태오차는 작은 스텝사이즈를 사용했을 경우임을 알 수 있다. 따라서 최적 스텝사이즈는 LMS 알고리즘의 수렴속도와 정상상태오차 사이의 상반성(trade-off)을 줄일 수 있다. 그림 7-(b)에서 세가지 서로 다른 스텝사이즈를 Kwong 의 가변 스텝사이즈 알고리즘의 초기값으로 적용하였다. 세가지 경우 모두 정상상태오차에서는 차이가 없으나 수렴속도에서 차이를 보이며, 최적 초기 스텝사이즈를 사용하였을 경우와 큰 스텝사이즈를 사용하였을 경우에 수렴속도는 유사하지만 최적 초기 스텝사이즈를 사용하였을 경우에 천이영역에서의 MSE 변동이 적다.

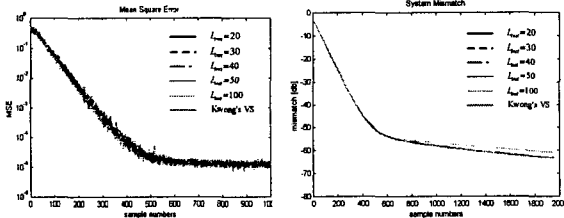


Fig. 5 MSE curves of different initial block length

Fig. 6 System mismatch comparison of different initial block length

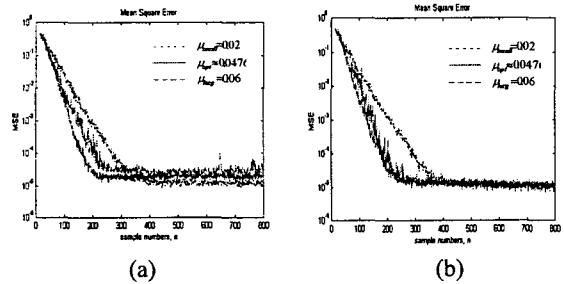


Fig. 7 (a) Comparisons of performances for three different fixed step size (b) Comparison of performances for variable step size algorithm when initial step size is different

V. 결론

LMS 에 기반을 둔 적응 필터링을 위한 가변 블록 방법을 제안하였다. 시정수에 비례하여 변하는 블록길이가 적응 필터가 정상상태에 접근할 수록 증가함을 이용 가변 스텝사이즈 알고리즘의 단점인 계산량 증가문제를 성능감소 없이 해결할 수 있음을 보였다. MSE 와 시스템 mismatch 면에서 제안한 방법의 우수성을 가변 스텝사이즈 알고리즘과 최적 스텝사이즈 수열[9]과 비교함으로써 증명하였다.

그리고 초기 MSE 가 스텝사이즈에 대해 2 차 형태의 함수라는 사실로부터 최적 초기 스텝사이즈를 유도하였다. 유도된 최적 초기 스텝사이즈를 가변 스텝사이즈 알고리즘에 적용, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 그 성능을 입증하였다.

참고문헌

- [1] B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore and C. R. Johnson, Jr., "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, vol. 64, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
- [2] L. L. Horowitz, K. D. Senne, "Performance advantage of complex LMS for controlling narrow-band adaptive arrays," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 722-736, June 1981
- [3] A. Feuer and E. Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated data," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, pp. 222-230, Feb. 1985.
- [4] B. Fisher and N. J. Bershad, "The complex LMS adaptive algorithm Transient weight mean and covariance with applications to the ALE," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 34-44, Feb. 1983.
- [5] R. W. Harris, D. M. Chabries and F. A. Bishop, "A variable step(VS) adaptive filter algorithm," *IEEE Trans.* vol. ASSP-34, pp.309-316, Apr. 1986.
- [6] R. H. Kwong and E. W. Johnston, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 1633-1642, July 1992.
- [7] V. J. Mathew and Z. Xie, "A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, pp. 2075-2087, June 1993.
- [8] N. J. Bershad, "On the optimum gain parameter in LMS adaptation," *IEEE Trans.* vol. ASSP-35, pp. 1065-1068, July 1987.
- [9] G. Keratiotis and L. Lind, "Optimum variable step-size sequence for LMS adaptive filters," *Proc. IEE*, vol. 146, pp. 1-6, Feb. 1999.