

# Second-Order Stationary 방법 기반의 반복적 역상관기의 수렴특성 분석

백시윤, 임성빈  
승실대학교 정보통신전자공학부

## Convergence Analysis of an Iterative Decorrelator based on the Second-Order Stationary Method

Siyoon Baik, Sungbin Im  
School of Electronic Engineering, Soongsil University, Seoul, Korea  
E-mail : sbi@amcs.ssu.ac.kr

### 요약

본 논문에서는 비동기 CDMA 시스템에서 다중접속에 의한 간섭을 제거하는 역상관기 중에서 반복 연산을 사용하여 계산량을 개선한 second-order stationary 기반의 반복적 역상관기의 수렴특성에 대하여 이론적으로 분석하고 모의실험을 통하여 성능을 검증하였다. 먼저 반복적 역상관기에서 수렴특성을 결정하는 수렴 인자를 유도하고 가장 빠른 수렴 특성을 보장하는 최적의 수렴 상수를 상관행렬의 최대 및 최소 고유값으로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 또한 최적의 수렴 상수와 반복회수에 따른 BER이 기존의 역상관기와 비슷한 성능을 가짐을 보였다.

### I. 서론

DS-CDMA (direct sequence CDMA) 시스템에서는 각 사용자의 정보 비트를 서로 다른 사용자 코드에 의하여 변조를 시키고 수신단에서는 모든 사용자의 신호를 수신하고 상관기로서 구성된 검파기는 이미 알고 있는 각 사용자의 코드, 지연 시간 (비동기의 경우)등을 사용하여 수신된 신호에서 사용자의 정보 비트를 복구한다. 사용자간의 동기가 일치하지 않는 비동기 시스템의 경우 기존의 상관기를 사용하는 경우 심한 다중 접속 간섭을 받게 되고 특히 완전한 전력 제어가 되지 않는 경우에 있어서는 간섭의 영향은 더욱 심해진다 [1].

다중 접속시 최적의 검파기는 Maximum Likelihood

Sequence Estimate (MLSE) 검파기이다 [2]. 그러나 MLSE 검파기는 사용자수에 대하여 계산의 복잡도가 지수적으로 증가하는 단점을 갖고 있다. 이러한 단점으로 인하여 성능 측면에서는 상관기만을 사용하는 기존의 검파기보다는 우수하면서도 복잡도 측면에서는 MLSE 검파기보다 간단한 준 최적의 다양한 형태의 검파기들이 제안되었다[3]. 이런 검파기들의 특징으로는 선형 연립 방정식을 푸는 형태를 취하고 있다. 준최적의 검파기 중에서 역상관기 (decorrelator)는 원근 문제에 대한 영향을 받지 않고 다중 사용자의 신호를 복조 할 수 있는 검파기이다. 그러나, 그 성능의 우수성에 비하여 역상관 과정에서 요구되는 많은 계산량이 단점으로 지적되고 있으며 많은 연구자들에 의하여 계산량이 개선된 역상관기들이 제안되고 있다 [3,4,5]. 이 방법들의 특징은 계산량을 개선하기 위하여 반복적 연산을 이용하고 있다는 점이다. 이러한 반복적 역상관기들의 문제는 수렴의 보장과 수렴 속도 및 반복 횟수의 결정 등이다.

본 논문에서는 2차 stationary 방법을 사용하는 반복적 역상관기의 수렴 특성을 분석하였다. 이 반복적 역상관기는 반복적 연산과 다중 접속 간섭의 구조적 특성을 이용하여 계산량을 감소시키고 있다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 다음절에서는 본 논문에서 고려하는 반복적 역상관기의 기본 개념을 설명하고 3절에서는 반복적 역상관기의 수렴 특성을 결정하는 수렴 인자를 유도하고 4절에서는 모의실험을 통하여 제안된 방법에 대한 성능을 검증한다. 끝으로 5절에서 결론을 맺는다.

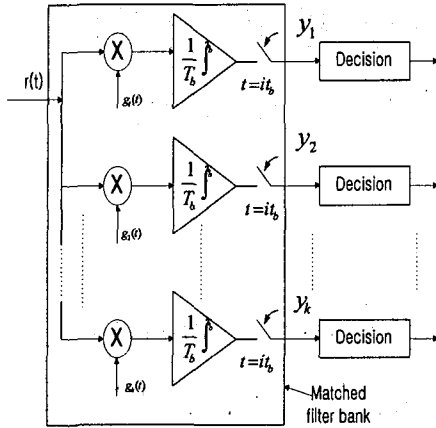


그림 1: 상관기를 사용한 DS-SS  
검파기의 구조.

## II. 반복적 역상관기

본 논문에서는 길이가  $N$ 인 정보 비트를 전송하는  $K$ 명의 사용자가 있는 비동기 CDMA 시스템을 고려한다.  $k$  번째 사용자의 signature waveform을  $g_k$ 로 표시하고 이 파형의 길이는 심벌 길이  $[0, T]$ 에서 정의된다. 일반적으로 사용자  $k$ 의 지연시간  $\tau_k$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$0 = \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_K \quad (1)$$

각 사용자의 지연시간에 대한 정보는 수신기에서 알 수 있다고 가정하면 수신 신호는 다음과 같다.

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N A_k b_k(i) g_k(t - iT - \tau_k) + n(t) \quad (2)$$

여기서  $A_k$ 는  $k$  번째 사용자의 신호의 크기를 나타내며  $b_k(i)$ 는  $k$  번째 사용자의  $i$  번째 정보 비트  $\{+1, -1\}$ 를 나타낸다. 또한  $n(t)$ 는 채널의 AWGN (additive white Gaussian noise)을 나타낸다.

위의 수신신호를 그림 1에서 보여주는 기존의 상관기를 통과시키면 그 출력을 다음과 같은 행렬 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_N \mathbf{b} + \mathbf{z} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{R}_N$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{z}$ 는 각각 출력벡터, 상관 행렬, 사용자의 정보 비트, 잡음 성분을 나타낸다[6].

기존의 역상관기에서는 식 (3)에 주어진 상관기의 출력  $\mathbf{y}$ 에 포함된 다른 사용자에 의한 간섭을 제거하기 위하여 코드상관행렬  $\mathbf{R}_N$ 의 역행렬을 사용한다.  $\mathbf{R}_N$ 의 역행렬은 앞에서 정의된 조건하에서는 항상 존재하는 것으로 알려져 있다 [2]. 즉 식 (3)으로부터, 정보 비트의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{z}_{dec} \quad (4)$$

식(4)에서 보듯이, 검파기의 추정치는 각 사용자간의 간섭이 분리된 정보비트와 잡음으로 구성된다. 역상관기는 심벌 간의 간섭을 완벽하게 제거하는 zero-forcing equalizer와 매우 유사하다. 역상관기는 다양한 측면에서 장점들을 보여주고 있으나 식 (4)에서 구현의 측면에서 코드상관행렬  $\mathbf{R}_N$ 의 역행렬 계산을 실시간에 수행하여야 하는 단점을 갖고 있다. 동기 시스템의 경우에 있어서는 코드상관행렬  $\mathbf{R}_N$ 의 크기가 사용자수에 의하여 결정되어  $K \times K$  행렬로 줄어들지만 비동기 시스템의 경우에는 사용자수와 정보의 길이의 곱에 의하여 결정되어 그 크기가  $NK \times NK$ 로 증가한다. 이러한 많은 계산량의 단점을 개선하기 위하여 몇 가지의 제안된 방법들이 있다 [3,4,5]. 본 논문에서 고려하는 반복적 역상관기는 2차 stationary 방법을 기반한 것으로 반복 과정은 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}_k + (1 - \alpha) \mathbf{x}_{k-1} + \beta (\mathbf{y} - \mathbf{R}_N \mathbf{x}_k) \quad (5)$$

여기서  $\alpha, \beta$ 는 상수이다. 만약  $\hat{\mathbf{x}}$ 이 다음의 행렬 방정식의 해가 되는 경우  $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}}$ 가 성립된다.

$$\mathbf{R}_N \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (6)$$

역으로,  $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}}$ 가 성립되는 경우  $\hat{\mathbf{x}}$ 은 식 (6)의 해가 된다. 변환  $\mathbf{F}(\cdot)$ 에 의한 반복적인 연산  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}$ 에 발생하는 수열  $\mathbf{x}_n$ 의  $\hat{\mathbf{x}}$ 으로 수렴 특성에 대한 이론적 분석이 필요하다.

## III. 수렴 특성

본 절에서는 앞에서 설명한 2차 stationary 방법 기반의 반복 연산 역상관기의 수렴 특성에 대하여 분석한다. 반복적 역상관기의 수렴 특성은  $\alpha, \beta$ 의 값에 의하여 결정되므로 최적의  $\alpha, \beta$ 를 얻기 위해서 먼저 식 (5)를 다음과 같이 변형한다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{x}_k + (1 - \alpha) \mathbf{x}_{k-1} - \beta \mathbf{y}, \quad k=0, 1, \dots \quad (7)$$

반복 행렬 (iteration matrix)  $\mathbf{M}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{M} = (\alpha \mathbf{I} - \beta \mathbf{R}_N) \quad (8)$$

오차 벡터를  $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_k$ 라 정의하면  $\mathbf{e}_{k+1} = \alpha \mathbf{e}_k + (1 - \alpha) \mathbf{e}_{k-1} - \beta \mathbf{R}_N \mathbf{e}_k$ 와  $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{R}_N) \mathbf{e}_0$ 가 성립한다. 이 오차 벡터에 대하여 벡터

$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{k+1} \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}$ 를 구성하면  $\mathbf{w}_{k-1}$ 과의 관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{B} \mathbf{w}_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{B}$ 는 다음과 같이 정의되고  $\mathbf{I}$ 는 차수  $K$ 인 단위행렬(identity matrix)이다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\alpha \mathbf{I} - \beta \mathbf{R}_N) & (1 - \alpha) \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

식 (9)로부터  $w_k = B^k w_0$ 가 성립한다. 임의의 초기값  $x_0$ 에 대해 수렴하기 위해서는  $B$ 의 스펙트럼 반경  $\rho(B) < 1$ 이 되어야 한다.  $B$ 의 고유값을 찾기 위해서

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

라하고, 만약  $\lambda$ 와  $x$ 가  $R_N$ 의 고유값 및 고유벡터라고 가정하면,  $R_N x = \lambda x$ 가 성립되고, 따라서

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha - \beta\lambda)I & (1 - \alpha)I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (12)$$

이 된다.

상관 행렬의 모든 고유값  $\lambda$ 에 대하여 두 개의  $\mu$  값  $\mu_i = \mu_i(\lambda)$ ,  $i=1,2$ 가 존재하고 이 값은 다음 식의 고유값이 된다.

$$\begin{bmatrix} (\alpha - \beta)\lambda & 1 - \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad (\xi, \eta)^T \in C^2 \quad (13)$$

또한  $(x, y) = (\xi x, \eta x)$ ,  $\xi = 1$ 이다. 따라서

$$\det \begin{vmatrix} (\alpha - \beta\lambda - \mu) & (1 - \alpha) \\ 1 & (-\mu) \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

이고,

$$\mu^2 - (\alpha - \beta\lambda)\mu - (1 - \alpha) = 0 \quad (15)$$

이다. 따라서  $\mu_1 \mu_2 = \alpha - 1$ ,  $\mu_1 + \mu_2 = \alpha - \beta\lambda$ 가 된다.

상관 행렬  $R_N$ 은 대칭행렬이며 semi-positive definite 이므로  $R_N$ 의 고유값  $\lambda_j$ 는 0보다 크거나 같은 실수이다. 이  $\lambda_j$ 중에 최대 고유값과 최소 고유값이 각각  $\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$ 라고 하면, 식 (5)는  $0 < \alpha < 2$ ,  $0 < \beta < 2\alpha/\lambda_{\max}$ 일 때 수렴하고, 2차 stationary 방법을 기반한 반복적 역상관기의 수렴 속도를 최대화하는 최적의  $\alpha, \beta$ 는 다음과 같다.

$$\alpha = \alpha_{opt} = 2/[1 + (1 - \rho_0^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (16)$$

$$\beta = \beta_{opt} = \frac{2\alpha}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} \quad (17)$$

여기서  $\rho_0 = [1 - \lambda_{\min}/\lambda_{\max}]/[1 + \lambda_{\min}/\lambda_{\max}]$ 이고, 그림 2로부터  $\alpha_{opt}$ 의 값을 얻어낼 수 있고, 이로부터  $\beta_{opt}$ 의 값을 구할 수 있다.

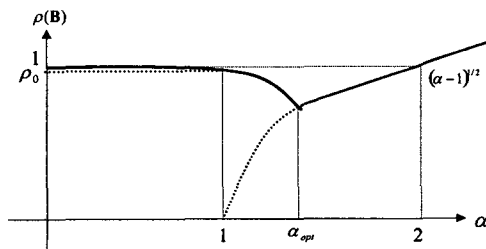


그림 2.  $\alpha$ 에 따른  $B$ 의 스펙트럼 반경의 변화.

#### IV. 모의실험

이 절에서는 모의 실험을 통하여 앞에서 제안된 최적의  $\alpha_{opt}$ 과  $\beta_{opt}$ 대하여 검증한다. 모의 실험에서는 다중 접속 사용자의 수를 8명으로 가정하고 사용자의 코드로는 주기가 127인  $m$ -시퀀스를 사용하였다. 각 사용자 간의 비동기성을 부여하기 위하여 8명의 사용자간의 시간 지연 간격을 심볼 주기  $T$ 에 대하여 1/8씩을 사용하였다. 또한 가장 약한 신호의 사용자를 첫 번째 사용자로 가정하였으며 가장 강한 신호의 사용자에 대한 원근비 (NFR, Near-Far Ratio)는  $NFR=20$ dB로 설정하였다.

첫 번째 실험에서는 다양한  $\alpha, \beta$ 값에 대하여 수렴 특성의 변화를 반복 연산 결과  $x_k$ 와  $\hat{x}$  간의 정규화된 평균자승오차 (normalized mean squared error, NMSE) 관점에서 관측하였다. 이 실험에서 사용된 상관행렬  $R_N$ 의  $\lambda_{\min} = 0.9245$ 이고  $\lambda_{\max} = 1.0867$ 이다. 따라서 식 (16)과 (17)에 의하여 최적의  $\alpha$ 인  $\alpha_{opt} = 1.0210$ 이고,  $\beta_{opt} = 1.0153$ 이다. 이 실험에서는 각 사용자당 100개의 비트를 전송하는 것으로 설정하였다. 따라서 NMSE는 800개의 비트에 대하여 측정되었으며 다양한  $\alpha, \beta$ 값을 사용하였다. 그림 3과 4에 이 결과를 도시하였다. 그림 3은  $\alpha$ 의 영향을 보기 위해  $\beta$ 는  $\beta_{opt}$ 로 고정하였고, 그림 4는  $\beta$ 의 영향을 보기 위해  $\alpha$ 는  $\alpha_{opt}$ 로 고정하였다.  $x$ 축은 반복 회수이며  $y$ 축은 NMSE이다. 이 실험에서는 수렴에 미치는  $\alpha, \beta$ 의 영향을 보기 위하여 사용된 채널은 잡음이 없는 단일 경로이고 앞에서 언급된 대로 사용자간  $NFR=20$ dB이다. 그림 3과 4에 나타난 것처럼  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$ 를 사용한 경우가 가장 빠른 수렴 특성을 보여주며  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$ 보다 작거나 큰 경우는 수렴특성이 저하되는 것을 관측할 수 있다.

두 번째 실험에서는  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$ 를 사용한 경우와 반복 회수에 대하여  $E_b/N_0$ 에 따른 비트 오류 특성을 비교하였다. 이 실험에서는 간섭의 영향을 가장 많이 받는 약한 사용자 신호의 비트 오류를 측정하였다. 이 결과는 그림 5에 도시하였다. 그림에서 마름모로 표시된 비트 오류 곡선은 역상관기를 사용하지 않고 상관기의 출력에 대한 비트 오류로서 성능이 가장 떨어지며 '\*' 표시가 된 곡선은 기존의 역상관기를 사용하는 경우에 있어서의 성능을 보여주고 있다.  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$ 를 사용하며 1회, 4회 및 8회 반복의 반복적 역상관기의 성능은 역삼각형과 원, 사각형으로 표시된 곡선으로서 기존의 역상관기와 비슷한 성능을 보여주고 있다. 그림 6은 그림 5와 성능을 비교하기 위하여  $\alpha_{opt} \times 0.3$ ,  $\beta_{opt}$ 일 때의 비트 오류를 나타낸 것이다.

#### V. 결론

본 논문에서는 비동기 CDMA 시스템에서 다중접속에

의한 간섭을 제거하는 역상관기 중에서 반복 연산을 사용하여 계산량을 개선한 2차 stationary 방법을 기반으로 한 반복적 역상관기의 수렴특성에 대하여 이론적으로 분석하고 모의실험을 통하여 이를 검증하였다. 반복적 역상관기에서 수렴특성을 결정하는 수렴 인자를 유도하고 가장 빠른 수렴 특성을 보장하는 최적의 수렴 상수를 상관행렬의 최대 및 최소 고유값으로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 또한 모의실험을 통하여  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$  을 사용한 경우와 1회 정도의 반복 회수에 대해 비트 오류 특성이 기존의 역상관기와 비슷한 성능을 얻을 수 있음을 확인하였다.

### 참고 문헌

- [1] S. Verdu, "Minimum Probability of Error for Asynchronous Gaussian Multiple-Access Channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 32, no. 1, pp. 85-96, 1986.
- [2] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.
- [3] S. Moshavi, "Multi-User Detection for DS-CDMA Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 34, no. 10, pp.124-136, October 1996.
- [4] S. Das, J. Cavallaro, and B. Aazhang, "Computationally Efficient Multiuser Detectors," *Proc. of PIMRC'97*, pp. 62-67, Helsinki, Finland, September 1997.
- [5] S. Im, E. Kim, and Y. Shin, "A Computationally Efficient Decorrelator for Multibeam Antennas Using an Iterative Method with Fast Correlation in DS-CDMA Systems," *Proc. of IEEE VTC'99*, pp. 1237-1241, Houston, Texas, USA, May 1999.
- [6] S. Verdu, *Multuser Detection*, Cambridge University Press, 1998.
- [7] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Parallel and Distributed Computation*, Prentice-Hall, 1989.
- [8] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd Edition, Johns Hopkins University Press, 1989.

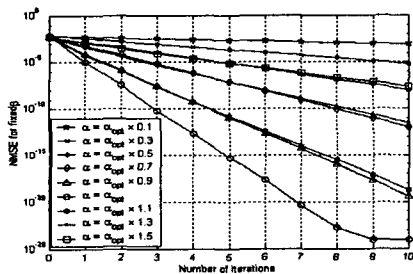


그림 3. 다양한  $\alpha$ 에 대하여 반복 회수에 따른 NMSE의 변화 ( $\beta = \beta_{opt}$ )

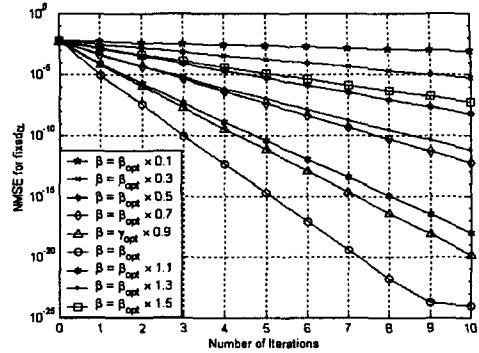


그림 4. 다양한  $\beta$ 에 대하여 반복 회수에 따른 NMSE의 변화 ( $\alpha = \alpha_{opt}$ )

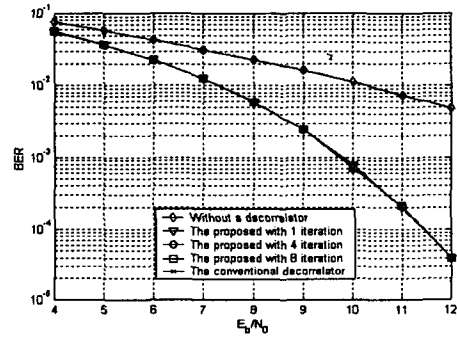


그림 5.  $\alpha_{opt}, \beta_{opt}$  과 반복 회수에 대하여  $E_b/N_0$ 에 따른 비트 오류의 변화

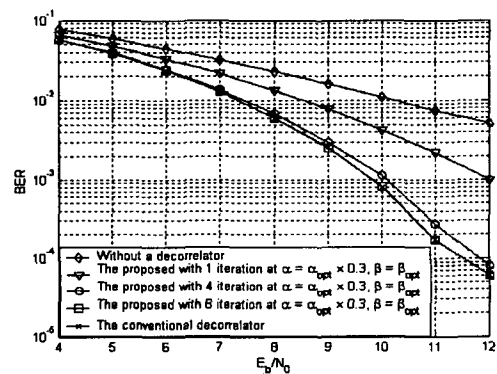


그림 6.  $\alpha_{opt} \times 0.3, \beta_{opt}$  과 반복 회수에 대하여  $E_b/N_0$ 에 따른 비트 오류의 변화