2001年度 第14回 信號處理合同學術大會 論文集 第14卷 1號

선형 조합을 통한 일반화된 미디언 필터

최강선, 김남형, 최병두, 고성제
고려대학교 전자공학과

Linear Combination of Median Filter

Kang-Sun Choi, Nam-Hyung Kim, Byeong-Doo Choi, Sung-Jea Ko
Department of Electronics Engineering of Korea University
sjko@dali.korea.ac.kr

요약

이 논문에서는 미디언 필터의 선형 조합을 통해 임의의 주파수 특성을 갖는 필터 구조와 그 설계 방법을 제안한다. Linear-phase FIR 저대역 통과 필터의 홀수번째 필터 계수의 부호를 바꾸면 FIR 고대역 통과 필터를 얻을 수 있는데, 이것은 필터 계수의 부호가 모두 양수인 두 개의 부분 필터의 차와 같은 모양을 가진다. 이 과정을 일반화하여 비선형 필터에 적용하면 LCWM(linear combination of median filter)필터는 가중 미디언 부필터(sub-filter)의 선형 조합으로 구성된다. 이는 선형 대수학에서 어떤 공간상의 임의의 벡터가 그 공간의 기저 (basis) 벡터들의 선형 조합으로 표현된다는 사실과 유사하다. 따라서 부필터의 필터 계수를 기저 벡터로 이용하여 얻어지는 기저 행렬과 필터의 주파수 특성을 조절하는 계수 벡터를 구함으로써 LCWM 필터를 설계할 수 있다. 제안된 필터 설계 방법을 이용하면 특정 주파수 특성을 가지는 FIR 필터와 유사한 특성을 갖는 비선형 필터 구조를 만들 수 있다. LCWM 필터는 고대역 통과, 저대역 통과, BP(band-pass), BS(band-stop)의 임의의 주파수 특성을 가지는 필터로 설계될 수 있음이 실험을 통해 확인되었다.

I. 서론

가중 미디언 (weighted median: WM) 필터는 영상의 경계를 보존하고 임펄스성 잡음 (impulsive noise)을 효과적으로 제거하는 특성 때문에 영상 신호 처리 분야에서 널리 사용된다 [1]. WM 필터는 비선형 구조를 가지기 때문에 그 특성을 분석하기 위한 몇 가지 방법들이 제안되었다 [2]. 그 중에서 SSP (sample selection probability)는 WM 필터와 FIR 필터의 관계를 설명하고 주파수 특성을 예측할 수 있는 방법을 제시해 주었다 [3]. 그러나, WM 필터가 본질적으로 저대역 통과 (low-pass: LP) 필터의 특성을 지녀 활용 분야가 제한적인 문제점을 가지고 있다. 최근에 발표된 논문[4]에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 일반화된 WM 필터인 GWM 필터를 제안하였다. GWM 필터는 WM 필터의 가중치가 음수를 가질 수 있도록 하는 방법으로서, 가중치의 부호를 떼내어 입력 신호에 부여함으로써 가중치를 항상 양수로 만드는 방법이다.

이 논문에서는 임의의 주파수 특성을 가질 수 있는 선형 조합을 통한 확장 미디언 필터 (linear combination of median filter: LCWM)를 제안한다. GWM 필터의 방법을 이용하면 linear-phase FIR LP 필터를 FIR 고대역 통과 (high-pass: HP) 필터로 바꿀 수 있다. FIR HP 필터는 FIR LP 필터의 홀수번째 필터 계수의 부호를 바꾸면 쉽게 얻어지는데, 이것은 필터 계수의 부호가 모두 양수인 두 개의 부필터의 차와 같은 모양을 가진다. 이 과정을 일반화하여 비선형 (non-linear) 필터에 적용하면 LCWM 필터는 가중 미디언 부필터의 선형 조합으로 구성된다. 이는 선형 대수학에서 어떤 공간상의 임의의 벡터가 그 공간의 기저 벡터들의 선형 조합으로 표현된다는 사실과 유사하다. 따라서 부필터의 필터 계수를 기저 벡터로 이용하여 얻어지는 기저 행렬과 필터의 주파수 특성을 조절하는 계수 벡터를 구함으로써 LCWM 필터를 설계할 수 있다. 제안된 필터 설계 방법을 이용하면 특정 주파수 특성을 가지는 FIR 필터와 유사한 특

성을 갖는 비선형 필터 구조를 만들 수 있다.
II장에서는 FIR 고대역 통과 필터를 간단히 소개한 후, LCWM 필터를 정의한다. III장에서 LCWM 필터의 설계 방법을 설명하고, IV장에서 실험 결과를 보이며, V장에서 결론을 맺는다.

II. Linear Combination of Weighted Median (LCWM) 필터

2.1 FIR 고대역 통과 필터의 설계

LCWM 필터를 정의하기 전에 선형 필터 영역에서 linear-phase LP 필터를 linear-phase HP 필터로 변환하는 과정을 살펴보자.
일반적인 FIR 필터는 다음과 같이 정의 된다.

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k),\quad (h(k)\in R) \tag{1}$$

만약 이 필터가 linear-phase FIR LP 필터라면 $h(k)=h(N-k-1)$ 과 같이 대칭 구조를 가진다. 이 경우 필터의 홀수번째 계수의 부호를 반대로 바꾸면 식 (2)와 같은 HP 필터를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y_H(n)&=\sum_{k=0}^{N-1}h_H(k)x(n-k)\\ &=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k h_L(N-k-1)x(n-k)\\ &=\sum_{l=even}h_L(N-l-1)x(n-l)\\ &\quad-\sum_{m=odd}h_L(N-m-1)x(n-m)\\ &=y_1(n)-y_2(n)\end{aligned} \tag{2}$$

2.2 LCWM 필터

식 (2)에서 짝수번째와 홀수번째 계수로 이루어진 필터를 각각 $h_1(n)$, $h_2(n)$ 라 하고, $y_1(n)$, $y_2(n)$ 의 계수가 모두 양수라면 식 (2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(n)=\alpha_1\times y_1^N(n)+\alpha_2\times y_2^N(n) \tag{3}$$

$$y_i^N(n)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}h_i(k)x(n-k)}{\sum_{k=0}^{N-1}h_i(k)},\quad \alpha_i=\sum_{k=0}^{N-1}h_i(k)$$

식 (3)을 일반화하면 linear-phase FIR 필터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(n)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\bullet y_i(n) \tag{4}$$

M은 부필터의 수이고, 부필터 $y_i(n)$ 의 계수는 모두 양수 값이며, α_i 는 실수이다. 식 (4)에서 linear-phase 부필터 $y_i(n)$ 대신 WM 부필터로 이루어진 벡터 $\langle w_i\rangle$ 를 사용하고 알맞은 α 값을 구하여 LCWM 필터를 만들 수 있다. 이때, $\langle\bullet\rangle$ 은 WM 필터의 계산 결과를 의미한다.

$$y_{LCWM}(n)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\bullet\langle w_i\rangle \tag{5}$$

III. LCWM 필터의 설계

선형 대수학에서 $S=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\Lambda\ ,\mathbf{b}_N\}$ 가 벡터 공간 B의 기저 벡터의 집합이라면 그 공간에 있는 모든 벡터 h는

$$\begin{aligned}\mathbf{h}&=\alpha_1\mathbf{b}_1+\alpha_2\mathbf{b}_2+\Lambda\ +\alpha_N\mathbf{b}_N\\ &=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}\end{aligned} \tag{6}$$

인 관계에 있다. 이 때 h가 FIR 필터의 계수로 이루어진 벡터라면, 식 (6)은 h가 기저 벡터의 선형 조합으로 구성되어 있음을 나타낸다. 각 기저 벡터를 대응하는 WM 부필터를 사용하면 식 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} y_{LCWM}(n)&=\boldsymbol{\alpha}\langle\mathbf{W}\rangle\\ \langle\mathbf{W}\rangle&=\begin{bmatrix}\langle w_1\rangle\\ \mathrm{M}\\ \langle w_M\rangle\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)과 (7)에 의해 LCWM 필터를 설계하기 위해서는 WM 부필터 w_i 로 이루어진 행렬 W와 $\boldsymbol{\alpha}$를 구해야 함을 알 수 있다.
W는 LCWM 필터의 기저 벡터 역할을 하는 행렬로써 각 행 벡터들은 서로 선형 독립적

(linearly independent)이어야 한다. 먼저 설계하고자 하는 필터 크기를 N, WM 부필터의 가중치 벡터 **g**의 크기를 R이라 하면, N개 중에서 R개를 뽑는 조합 (combination)의 결과로 생기는 행 벡터로 이루어진 행렬을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

이 행렬에서 행 탐색 알고리즘 (row-search algorithm) [5]을 통해 서로 독립적인 행 벡터만으로 이루어진 행렬을 만들고 그것을 W로 사용한다.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha}$는 LCWM 필터의 주파수 특성을 조절하는 역할을 한다. 이를 구하는 데는 SSP가 사용되는데, SSP는 비선형 필터인 WM 부필터의 주파수 특성을 알 수 있는 방법을 제공한다. WM 필터의 가중치 벡터의 SSP를 구하고, W의 '1'인 위치에 그 값을 대입하여 기저 행렬 B를 만든다. 원하는 주파수 특성의 선형 FIR 필터 **h**에 B의 역행렬을 곱하여 $\boldsymbol{\alpha}$를 구할 수 있다. 가중치가 [1 1 1]인 벡터를 위 예에 적용하면, [1 1 1]에 대한 SSP는 [1/3 1/3 1/3]이고, B는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

다음은 LCWM 필터의 설계 과정을 정리한 것이다.

1) 원하는 주파수 특성을 가지며 필터의 크기가 N인 FIR 필터 **h**를 설계한다.
2) 길이가 R인 WM 부 필터의 가중치 벡터 **g**를 선택한다. (R < N)
3) **g**의 SSP를 구한다.
4) 행 탐색 알고리즘을 이용하여 서로 독립적이 N개의 벡터 w_i로 구성된 행렬 W를 구한다.
5) 과정 3에서 구한 SSP를 W에 적용시켜 B를 구한 후, 식 (8)에 대입하여 $\boldsymbol{\alpha}$를 구한다.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}\mathbf{B}^{-1} \tag{8}$$

6) 구해진 $\boldsymbol{\alpha}$와 W를 식 (7)에 대입하여 LCWM 필터를 얻는다.

IV. 실험 결과 및 분석

LCWM 대역 통과 필터의 특성을 살펴보기 위해 chirp 신호를 사용하였다. 이 신호에 통과 대역이 $0.1<w<0.2$인 31-tap FIR BP 필터와 31-tap LCWM BP 필터를 적용한 결과가 그림 2에 제시되었다.

그림 1에서 LCWM 필터를 거친 신호가 FIR 필터를 통과한 신호와 거의 유사한 대역 통과 특성을 가지고 있음을 알 수 있다.

그림 2는 영상에 대하여 아래의 FIR 필터와 LCWM 필터를 적용한 비교 실험 결과이다.

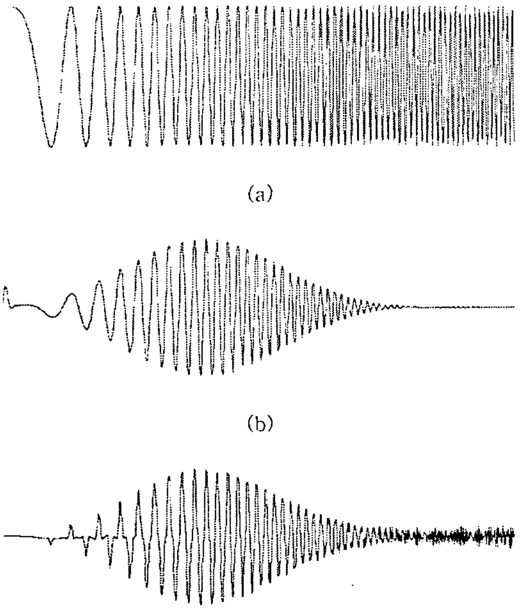
- FIR HP 필터 (차단 주파수 = 0.5)

h = [0.3334 0.0666 -0.6 0.4 -0.6 0.0666 0.3334]

- LCWM HP 필터

$$y_{LCWM}(n) = \boldsymbol{\alpha}\langle\mathbf{W}\rangle = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 2.4 \\ -1.8 \\ 0.1998 \\ 1.0002 \\ -1.0002 \end{bmatrix}^T \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

LCWM 필터를 통과하면 잡음이 현저히 줄어듦을 볼 수 있다.



(a)

(b)

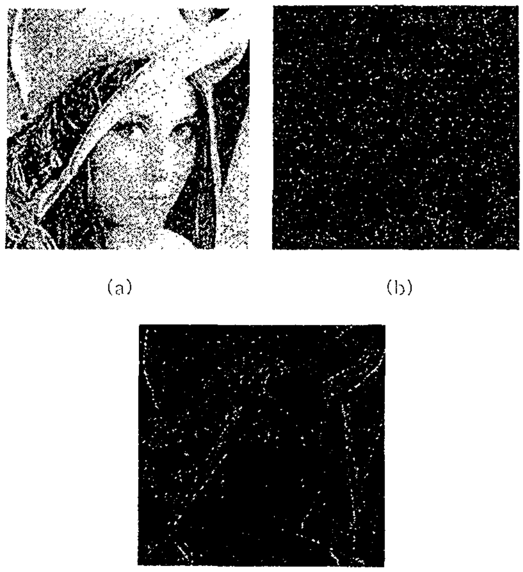
(c)

그림 1. FIR 필터와 LCWM 필터의 비교

(a) Chirp 신호. (b) FIR BP 필터를 통과시킨 결과. (c) LCWM BP 필터를 통과시킨 결과.

IV. 결론

WM 부필터의 선형 조합으로 표현되는 LCWM 필터는 필터의 계수가 모두 양수인 두 필터의 차를 이용하여 HP 필터를 표현할 수 있음에 착안하였다. 제안된 필터를 설계하기 위해서는 원하는 주파수 특성을 가진 linear-phase FIR 필터와 서로 선형 독립적인 행 벡터로 구성된 행렬, 그리고 LCWM 필터의 주파수 특성을 포함하는 계수 벡터가 필요하다. 설계된 LCWM 필터는 비선형 구조를 가지면서도 linear-phase한 FIR 필터와 유사한 주파수 특성을 보인다. 특히, 미디언 필터의 특성으로 인하여 FIR HP 필터와는 달리 LCWM HP 필터는 임펄스성 잡음까지 제거하는 특징을 가지고 있다. 실험을 통하여 LCWM 필터는 임의의 주파수 특성을 가지도록 설계될 수 있음을 확인하였다.



(a) (b)

(c)

그림 2. 영상에서 FIR 필터와 FSWM 필터 비교

(a) 임펄스성 잡음이 2% 첨가된 Lena 영상. (b) FIR HP 필터를 통과한 결과. (c) LCWM HP 필터를 통과한 결과.

References

[1] L. Yin, R. Yang, M. Gabbouj, and Y. Neuvo, "Weighted Median Filters: A Tutorial," *IEEE Trans. Circuits Systems,* vol. CAS-43, pp.157-191, Mar. 1996.

[2] O. Yli-Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 39, pp. 395-410, Feb. 1991.

[3] M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Stack Filters and Selection Probabilities," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, pp. 2628-2643, 1994.

[4] G. R. Arce, "A General Weighted Median Filter Structure Admitting Real-Valued Weights," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, pp. 3195-3205, Dec. 1998.

[5] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, CBS College Publishing, Madison Avenue, NY, 1984.

[6] K.S. Choi, A.W.Morales, and S.J.Ko, "Design of linear combination of weighted medians," *IEEE Trans. on Signal Process.*, to be appeared in Sept. 2001.