

루프형성기법을 이용한 최적 강인 PID 제어기 동조

김점곤, 서병설
한양대학교

전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 019-291-9428

Robust Optimal PID Cotroller Tuning Using Loop-Shaping Method

Kim Jum-Gon, Suh Byung-Suhl

Dept, of Electrical and Electronic Engineering, Hanyang University

Email : magpiek@netian.com

Abstract

This paper presents a loop shaping procedure for tuning optimal and robust PID controller by selecting the appropriate weighting factors Q and R in order to satisfy such the performance requirements.

I. 서론

제어기술자들에게 주요 관심사 중의 하나는 강인한 안정도와 좋은 성능을 유지하면서 설계사양을 만족시키는 것이다. 강인성 문제에 대해서는 LQG-LTR[1]과 H^∞ [2,3]와 같은 강인제어기 설계 방법들이 발전되어왔다. 이 방법들이 견고한 수학적 최적화 이론에 기초하였지만 여전히 산업현장에서는 PID 제어기가 널리 사용되고 있다. 그 이유는 구조가 간단하고 강인하며 게다가 기술자들에게 친숙하기 때문이다. 그래서, H^∞ 제어이론을 PID에 적용시키는 접근으로, Grumble[4]은 H^∞ 제어기가 PID구조를 가짐을 증명하려고 시도했고, Matterzzoni와 Rocco[5]는 강인한 PID 제어기 동조를 위한 간단한 규칙을 공식화하기 위해 모델오차한계를 유도했다. 그리고 IMC를 가지는 H^∞ 제어의 개념이 강인 동조를 위한 알고리즘을 개발하기 위해 사용되어져왔다. 반면에, LQG-LTR처럼 LQR의 강인성을 이용하

는 LQ 접근방법이 있다. Suh[6]는 Athans[7]의 LQ-서보 구조를 부분상대귀환을 가진 PI 제어기 형태로 해석을 하고 루프형성 문제를 해결했다.

Shih와 Chen[8]은 2차 시스템에서 최적상태제어제어법칙을 PID제어와 관계를 맺음으로써 PID 동조를 LQR 설계문제로 바꿀 수 있었다. 그러나 이 논문에서는 LQR의 강인성에 대한 언급이 없었고, PID 파라미터값은 기존의 방법들 즉, Zielger-Nichols와 Coohen-Coon 방법을 이용하여 구한 후에 LQR의 Q값을 선정하였다. 본 논문에서는 Shih와 Chen의 방법에 기초한 새로운 LQ 접근방법을 기존 PID 제어기에 적용시켜 LQR이 안정도-강인성을 보장함을 보이고, 바람직한 명령추종, 외란 제거, 잡음 감소와 같은 성능을 만족하는 가중치요소 Q와 R을 선정하는 루프형성절차를 소개한다. 이 접근방법이 2차 시스템에 제한되어지지만, 2차 모델은 진동, 구조적 해석 그리고 배나 항공기의 회전제어와 같이 다양한 분야에 적용되어진다.

II. 최적제어법칙과 PID 제어기

다음의 2차 시스템을 고려해 보자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1)$$

여기서, $y(t)$ 는 출력변수, $u(t)$ 는 제어변수, 그리고 ζ 는 제동비이다. 초기 조건 $y(0)$ 와 $dy(0)/dt$ 는 명시되어진다. 제어의 목적은 출력변수를 최종상태 값으로 이끌어내는 것인데, 이 값은 $y(\infty)$ 로 가정한다.

출력변수에 적분요소를 첨가시켜 새로운 상태변수를 도입하면 상태변수 x 는 다음과 같다.

$$X(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그러면 식(1)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2\zeta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고, $x(0)$ 는 주어진다.

LQR로 해석하기 위해서 식(4)와 같은 2차가적함수를 고려한다.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서 Q 는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬이고, R 은 양의 한정(positive definite) 대칭행렬로 $Q = N^T N$, $R = \rho I$ 이다. 그러면 귀환제어법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = -G x(t) \quad (5)$$

$$G = R^{-1} B^T K \quad (6)$$

K 는 대칭행렬이고 다음 Riccati식의 해이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (7)$$

K 의 성분들을 다음과 같이 놓으면,

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(5)의 최적제어법칙은 다음과 같이 PID제어형태가 된다.

$$u(t) = - \left(K_{22} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21} y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (9)$$

기존의 PID제어기의 형태는,

$$u(t) = -K_c \left(y(t) + \tau_D \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (10)$$

이득 K_{ij} 의 성분들과 비례이득 K_C 와 시정수 τ_I 그리고 τ_D 와의 관계는 다음과 같다.

$$K_{20} = \frac{K_c}{\tau_I}, \quad K_{21} = K_c, \quad K_{22} = K_c \tau_D \quad (11)$$

가중치행렬 Q 를 식(12)과 같이 놓고 식(7)에 대입하면 식(13)와 같이 K 에 관한 식으로 표현할 수 있다.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{01} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{02} & Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$Q_{00} = \frac{1}{\rho} K_{20}^2, \quad Q_{11} = \frac{1}{\rho} K_{21}^2 + 2K_{21} - 2K_{10} \quad (13)$$

$$Q_{22} = \frac{1}{\rho} K_{22}^2 + 4\zeta K_{22} - 2K_{21}$$

$$Q_{02} = -K_{10} + 2\zeta K_{20} + \frac{1}{\rho} K_{20} K_{22}$$

하지만 PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는 식(14)와 같이 K 를 Q 에 관한 식으로 표현할 필요가 있다.

$$K_{20} = \sqrt{\rho Q_{00}} \quad (14)$$

$$K_{22}^4 + 8\zeta \rho K_{22}^2 + (16\zeta \rho^2 + 4\rho^2 - 2\rho Q_{22}) K_{22}^2$$

$$+ (-8\zeta \rho^2 Q_{22} + 16\zeta / \rho^3 - 8\rho^2 \sqrt{\rho Q_{00}}) K_{22}$$

$$+ (\rho^2 Q_{22}^2 - 16\zeta \rho^3 \sqrt{\rho Q_{00}} - 4Q_{22} \rho^3 - 4Q_{11} \rho^3 + 8\rho^3 Q_{02}) = 0$$

$$K_{21} = \frac{1}{2\rho} K_{22}^2 + 2\zeta K_{22} - \frac{1}{2} Q_{22}$$

식(14)에서 K_{20} , K_{21} 그리고 K_{22} 는 양의 값이고 Q 와 R 에 의해 결정되어지므로 LQR문제로 해석된다. 그러므로 무한대의 이득여유(gain margin)와 60° 위상여유(phase margin)의 강인성을 보장한다. 그러나 LQR은 출력궤환이 아니므로 성능에 관해 논하기가 어렵다. 그래서 II 장에서 2차 시스템에서 새로운 상태변수를 도입하는 방법을 이용해 출력궤환을 가지는 특별한

루프형성기법을 이용한 최적 강인 PID 제어기 동조

형태의 LQR 구조를 고려했다.

III 장에서는 LQR의 설계 파라미터 Q와 R을 루프형성성질차를 통해 선정함으로써 성능-강인성이 개선됨을 보이고자 한다.

III. 가중치 요소 Q와 R의 설정

가중치요소 Q와 R은 성능-강인성 개선을 위해 플랜트 출력에서 절단한 루프전달함수의 특이값 일치기법 [6]에 기초하여 설정한다. 원래 이 기법은 Athans[7]이 제안한 플랜트 입력에서 절단한 루프전달함수의 특이값 일치기법을 확장한 것이다.

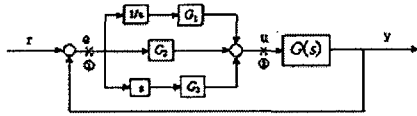


그림 1. PID 제어기

루프형성기법으로 성능 문제를 고려하기 위해서는 그림 1에서 플랜트 입력인 ②점에서가 아닌 출력인 ①점에서 절단한 루프전달함수 T(s)를 사용해야 한다.

$$T(s) = Cp(sI - Ap)^{-1}Bp(G_3s + G_2 + \frac{G_1}{s}) \quad (15)$$

저주파수와 고주파수에서 T(s)의 한계값을 구하기 위해 Kwakernaak Sivan[9]이 발표한 제어이득행렬 G의 극한거동을 이용한다.

제어이득행렬 G의 극한거동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = WN \quad (16)$$

여기서 W 일원행렬(unitary Matrix)로 $W^T W = I$ 이다.

LQ-servo에서 제어이득행렬 G와 설계 파라미터 N은 $G = [G_1 \ G_2 \ G_3]$ 와 $N = [N_1 \ N_2 \ N_3]$ 으로 쪼개질 수 있다. 각각의 N_1, N_2, N_3 에 대해 W가 단위행렬이 되도록 하는 새로운 설계 파라미터 $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3$ 가 존재한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} [G_1 \ G_2 \ G_3] = [\overline{N}_1 \ \overline{N}_2 \ \overline{N}_3] \quad (17)$$

그러면 식(15)의 T(s)의 극한값을 저주파수와 고주파수부분에서 구해보자.

저주파수 부분에서는 $s \rightarrow 0$ 이므로 T(s)는 식(18)과 같이 근사화되고 식(19)와 같이 변형된다.

$$T(s) \approx Cp(-Ap)^{-1}Bp \frac{1}{s} G_1 \quad (18)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} Cp(-Ap)^{-1}BpN_1 \quad (19)$$

T(s)의 극한값을 구하기 위해 $Cp(-Ap)^{-1}BpN_1 = 1$ 을 만족하는 설계 파라미터 N_1 은 식(19)와 같이 결정된다.

$$N_1 = [Cp(-Ap)^{-1}Bp]^{-1} \quad (20)$$

고주파수 부분에서는 $s \rightarrow \infty$ 이므로 T(s)는 식(21)과 같이 근사화되고 식(22)과 같이 된다.

$$T(s) \approx CpB_pG_3 \quad (21)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} CpB_p\overline{N}_3 \quad (22)$$

$\frac{1}{\sqrt{\rho}} CpB_p\overline{N}_3 = 1$ 을 만족하는 설계 파라미터 N_3 는 식(23)과 같다.

$$\overline{N}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} CpB_p\overline{N}_3 \right]^{-1} \quad (23)$$

설계 파라미터, N_2 는 위의 극한 기법에 의해 구하지 못했다. 그래서 다음의 특성에 기초해서 선정한다.

N_2 는 출력변수 y(t) 즉, 비례 이득 K_c 와 관계가 있으므로 플랜트가 안정하다는 조건 아래 큰 값으로 선택된다. ρ 는 Athans의 방법에 따라 명령추종 및 외란장벽과 센서 잡음 장벽을 고려하여 결정된다.

IV. 예 제

시스템의 상태공간 모델식과 설계 사양은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p(t) \quad , \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_d = -10, \quad \Omega_n = 10^3$$

$\rho=1$ 로 선택하면 N_1 과 N_3 는 식(20)과 식(23)에 의해서 결정되고, N_2 는 플랜트의 안정조건아래 비교적 큰 값으로 선택된다. 따라서 설계 파라미터 N 과 제어 이득행렬 G 는 다음과 같이 얻어진다.

$$N=[1 \ 80 \ 0], \quad G=[1 \ 100.65 \ 10.74]$$

$T(s)$ 의 루프형상이 성능-강인성을 보장함을 그림 2에서 볼 수 있다. 즉 $T(s)$ 곡선이 저주파에서 외란장벽과 고주파에서 잡음장벽을 침범하지 않는다. 그리고 그림 3에서 Ziegler-Nichols방법과 본 논문에서 제안된 방법의 시간응답곡선을 나타냈다. 여기서 제안된 방법이 Ziegler-Nichols 방법보다 상당히 개선됨을 볼 수 있다.

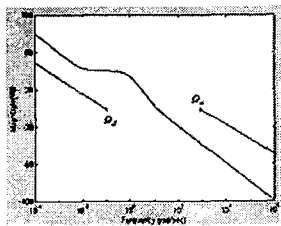


그림 2. 루프 전달함수 $T(s)$

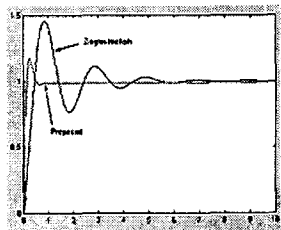


그림 3. PID제어기의 단위계단응답

V. 결론

PID 제어기의 최적 강인 동조를 위해, 제어이득의 극한거동을 이용한 새로운 루프형성절차를 제시하였다. 그래서 안정도-강인성과 성능-강인성을 보장하였고, 본 논문에서 제안된 방법이 기존 PID제어기 동조 방법보다 상당히 개선됨을 예제를 통해 보였다. 앞으로 MIMO 시스템에 적용에 대한 연구가 필요하다고 사료된다.

Reference

- [1] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers," IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, No. 4, pp. 607-611, 1979
- [2] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity," IEEE Trans. On Auto. Control, Vol. AC-26, No. 2, pp. 301-320
- [3] J. Doyle and K. Glover and P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-34, No. 8, pp. 831-847. Also see 1988 American Control Conference, Atlanta, June, 1988.
- [4] M. Grimble., " H_∞ controllers with a PID structure," J. of Dynamic Syst. Meas. And contr., Vol. 112, pp. 325-336, 1990] M. Grimble, H
- [5] C. Matzezzoni and P. Rocco, "Robust tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European J. of Contr, Vol. 3, pp. 125-136, 1997
- [6] B. Suh and S. Yun, "LQ-servo Design," Proceedings of The 4th Asia-Pacific Conference on Control & Measurement, pp. 97-100, 9-12 July 2000.
- [7] M. Athans, "Lecture Note on Multivariable Control System," M.I.T. Ref. No.860224/6234., 1986
- [8] Y. Shih and C. Chen, "On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control," Int. J. Control, Vol. 19, NO. 5 pp. 947-955, 1974
- [9] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal filters", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-17, pp.79-86, 1972. 4, pp.689-702, 1987