

## 전단변형을 고려한 변화곡선길이보의 비선형 거동

### Non-Linear Behavior of Shear Deformable Variable-Arc-Length Beams

이 병 구\* · 이 태 은\*\* · 김 종 응\*\*\* · 김 영 일\*\*\*

Byoung Koo Lee · Tae Eun Lee · Jong Ung Kim · Young Il Kim

---

#### ABSTRACT

In this paper, the governing differential equations for the non-linear behavior of shear deformable variable-arc-length beams subjected to an end moment are derived. The beam model is based on the Bernoulli-Euler beam theory. The Runge-Kutta and Regula-Falsi methods, respectively, are used to integrate the governing differential equations and to compute the beam's rotation at the left end of the beams. Numerical results are compared with existing closed-form and numerical solutions by other methods for cases in which they are available. The characteristic values of deflection curves for various load parameters are calculated and discussed.

---

#### 1. 서 론

최근에 재료공학의 발달로 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성이 확보될 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동 해석이 필수적이다. 대변형 문제에 관한 연구는 1774년 Euler에 의해 처음 발표된 이후 많은 과학자들에 의해 활발히 진행되고 있다<sup>(1,2,3,4)</sup>. 전단변형은 작용하중에 의한 구조물의 변위를 증가시키는 요인이므로 전단변형을 고려하여 해석하거나 설계하는 것이 구조물의 안정상 더 유리하다.

이러한 연구 배경으로 이 논문은 전단변형을 고려한 단부 모멘트하중을 받는 변화곡선길이 보의 비선형 거동해석에 연구목적이 있다. 이를 위하여 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계가 비선형인 Bernoulli-Euler보 이론을 이용하여 대상 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 정확탄성곡선(elastica)의 거동값들을 예측하였다. 본 연구에서의 수치해석결과들을 타 문헌과 비교하여 본 연구방법의 타당성을 입증하였다. 이 연구에서 보는 선형탄성체이고 보의 휨에 대한 중심축은 비확장성으로 가정하였다.

#### 2. 수학적 모형

그림 1(a)는 지간길이  $l$ 이고,  $A$  점이 마찰력이 없는 지점,  $B$  점이 회전지점으로 이루어진 변화곡선 길이보를 나타내고 있다.

---

\* 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\* 학생회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

\*\*\* 원광대학교 대학원 석사과정

그림 1(b)는 그림 1(a)의 보가 회전지점  $B$ 에 모멘트 하중  $M_B$ 를 받아 최종적인 평형상태를 이루었을 때의 정확탄성곡선(elastica)의 변수들을 나타내고 있다. 정확탄성곡선은  $A$ 를 원점으로 하는 직교좌표계  $(x, y)$ 에 의해서 정의되며,  $y$ 는 임의점  $x$ 에서의 처짐,  $s$ 는 원점  $A$ 로부터 보의 축을 따라 측정한 곡선길이이다.  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  및  $\theta$ 는 각각  $A$ 점과  $B$ 점 및 임의점  $x$ 에서의 단면회전각이다. 또한  $N$ ,  $V$ ,  $M$ 은  $(x, y)$ 에서 축방향력, 전단력 및 휨모멘트이며,  $H$ 와  $R$ 은 지지점 반력의 수평요소와 수직요소이다.

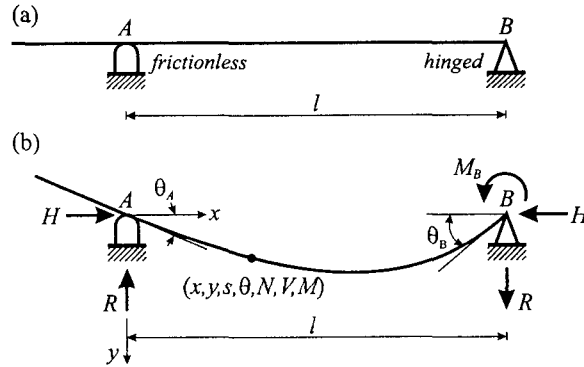


그림 1(a) 변형전 해석 대상 보 (b) 대상 보의 정확탄성곡선 및 제 변수

평형방정식을 이용하여 변형된 보의  $A$ 점에서 반력의 수직요소  $R$ 을 구하면 다음식과 같다.

$$R = \frac{M_B}{l} \quad (1)$$

지지점  $A$ 에서 단면의 회전각은  $\theta_A$ 이므로 반력의 수평요소  $H$ 는 다음식과 같다.

$$H = R \tan \theta_A = (M_B/l) \tan \theta_A \quad (2)$$

임의의 좌표  $(x, y)$ 에서 축방향력  $N$ 과 전단력  $V$  및 휨 모멘트  $M$ 은 임의점에서의 회전각  $\theta$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N = H \cos \theta - R \sin \theta = (M_B/l) (\tan \theta_A \cos \theta - \sin \theta) \quad (3)$$

$$V = H \sin \theta + R \cos \theta = (M_B/l) (\tan \theta_A \sin \theta + \cos \theta) \quad (4)$$

$$M = Rx + Hy = (M_B/l) (x + \tan \theta_A y) \quad (5)$$

본 연구에서 보의 처짐형상 즉 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler보 이론에 의한 대변형 이론을 따른다. 전단변형은 변위를 증가시키는 요인으로 작용하므로 전단변형을 고려하는 것이 구조해석상 안전측에 든다. Bernoulli-Euler보 이론에 전단변형을 고려한 정확탄성곡선의 미분방정식은 다음 식과 같다<sup>(5)</sup>.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (6)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} + \frac{\alpha_s}{GA} \frac{dV}{ds} \quad (8)$$

위의 식 (8)에서  $EI$ 는 보의 휨 강성,  $\alpha_s$ 는 단면의 형상에 따라 결정되는 전단계수,  $GA$ 는 축강도이다. 또한 식 (8)에서  $\alpha_s/GA$ 의 항이 전단변형의 영향요소이다.

본 연구에서 해석 대상보의 지간길이는 확정된 값이므로 수치해석의 용이함을 위하여 위의 식들을  $dx$ 에 관한 미분방정식으로 변환한다. 먼저 식 (6)을  $dx$ 에 관한 식으로 변환하면 다음의 식 (9)와 같고 식 (7)에 식 (9)를 대입하면 식 (10)과 같다. 식 (4)로부터  $dV/ds$ 를 구하여 식 (8)에 대입하고 이 식에 식 (6)을 대입하면 다음의 식 (11)과 같다.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI \cos \theta} + \frac{GA}{\alpha_s} \frac{1}{(H \cos \theta - R \sin \theta) - 1} \quad (11)$$

보의 정확탄성곡선에 대한 경계조건은 다음과 같다. 보 좌측단부인  $x=0$ 에서 수평처짐과 수직처짐은 허용되지 않으므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$s=0, \quad x=0 \text{에서} \quad (12)$$

$$y=0, \quad x=0 \text{에서} \quad (13)$$

또한 보의 우측단부인  $x=l$ 에서 보의 수직처짐은 허용되지 않으므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$y=0, \quad x=l \text{에서} \quad (14)$$

상미분방정식을 무차원으로 유도하여 수치해석의 효율성을 높이기 위해 다음의 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = s/l \quad (15,16,17)$$

$$r = \frac{Rl^2}{EI}, \quad h = \frac{Hl^2}{EI}, \quad m_B = \frac{M_B l}{EI} \quad (18,19,20)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_s E}{G}, \quad \lambda = \frac{l}{\sqrt{I/A}} \quad (21.22)$$

위의 식들에서  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ 는 각각 보의 축방향 좌표, 처짐, 곡선길이를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이며,  $r$ ,  $h$ ,  $m_B$ 는 각각 반력의 수직요소, 수평요소와 단부모멘트를 무차원한 것이다.  $\gamma$ 는 무차원 전단변수 (shear parameter)이며,  $\lambda$ 는 세장비이다.

이상의 식 (15)~(22)의 무차원 변수들을 이용하여 앞에서 유도한 상미분방정식 식 (9), (10), (11)을 무차원화하면 다음 식들과 같다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \tan \theta \quad (23)$$

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{\cos \theta} \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{r(\xi + \tan \theta_A \eta)}{\cos \theta} \frac{1}{\gamma \lambda^{-2} r (\tan \theta_A \cos \theta - \sin \theta) - 1} \quad (25)$$

식 (12)~(14)에서 유도된 경계조건식들을 식 (15)~(22)의 무차원 변수들을 이용하여 무차원화하면 다음 식들과 같다.

$$\zeta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 에서} \quad (26)$$

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 에서} \quad (27)$$

$$\eta = 0, \quad \xi = 1 \text{ 에서} \quad (28)$$

이상에서 유도된 식 (23)~(25)가 전단변형을 고려한 변화곡선길이보의 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 상미분방정식이다. 이 미분방정식을 풀기 위해서는 식 (26)~(28)의 경계조건 이외에 좌측단부  $\xi=0$ 에서의 회전각  $\theta_A$ 를 알아야 하나 이 값이 미지수이다. 따라서 본 연구는 대상보의  $\gamma$ ,  $\lambda$  및  $m_b$ 가 주어지면 앞에서 유도한 무차원 미분방정식을 수치적분하여 우측단부의 경계조건인 식 (28)을 만족하는 단면회전각  $\theta_A$ 를 구하는 문제로 귀결된다.

### 3. 수치해석 방법 및 검증

본 연구에서 유도한 보의 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 상미분방정식 식 (23)~(25)의 정확해는 구할 수 없으므로 수치해석기법을 이용하여 수치해를 산출한다. 이 연구에서 개발한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 먼저 본 연구 대상보의  $\gamma$ ,  $\lambda$  및  $m_b$ 를 정의한다. 미분방정식의 수치해석 문제는 초기치 문제이므로 경계조건식 식 (26), (27) 이외에 미지수인  $\theta_A$ 를 최초 0에서 일정한 증분으로 가정하고 Runge-Kutta법<sup>(6)</sup>을 이용하여  $\xi=0$ 에서  $\xi=1$ 까지 수치적분한다. 가정한  $\theta_A$  값이 정확탄성곡선의 참

값이면 우측단부의 경계조건인 식 (28)을 만족하여야 한다. 따라서  $D = \eta(1)$ 이라 하면  $D = 0$ 이어야 한다. 다음 식과 같은 수치해의 수렴조건을 만족하면 수치해  $\eta = \eta(\xi)$ ,  $\zeta = \zeta(\xi)$ ,  $\theta = \theta(\xi)$ 를 출력시킨다.

$$|D| = 1 \times 10^{-10} \quad (29)$$

위의 수렴조건을 만족하지 않으면  $\theta_A$  값을  $\theta_A + \Delta\theta_A$ 로 다시 가정하여 수치적분을 시행한다. 이러한 과정에서  $D$ 의 부호가 바뀌면 참  $\theta_A$  값은 전 단계에서 가정한  $\theta_{A1}$ 과 현 단계에서 가정한  $\theta_{A2}$  사이에 존재한다. 이 때의  $\theta_{A1}$ 과  $\theta_{A2}$  사이를 더 세분화된 증분으로 증가시키며 위의 식 (29)를 만족하는  $\theta_A$  값을 찾는다. 이와 같이  $\theta_A$  값을 찾으면 Runge-Kutta법에 의하여 대상보의 정확탄성곡선과 합응력을 얻을 수 있다.

표 1은 본 연구에서 유도한 미분방정식의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 전단변형 효과를 고려하지 않은 경우의 본 연구 해석결과와 타 문헌<sup>(7,8)</sup>의 결과를 비교한 것이다. 이 표에서 보는 바와 같이 본 연구결과와 문헌의 결과는 거의 정확하게 일치하고 있어 본 연구에서 유도한 지배미분방정식 및 해석과정의 타당성을 입증할 수 있었다.

표 1. 본 연구와 타 문헌의 결과 비교 ( $\gamma=0$ )

$m_B$	거동값	본 연구	문헌(7)*	문헌(8)**
1.0	$\theta_A$	0.1722	0.1722	0.1710
	$\theta_B$	0.3429	0.3429	0.3436
	$\eta_{\max}$	0.0666	0.0666	0.0660
	$\zeta_{\max}$	1.0119	1.0119	1.0116
1.5	$\theta_A$	0.2711	0.2711	0.2687
	$\theta_B$	0.5364	0.5364	0.5358
	$\eta_{\max}$	0.1058	0.1058	0.1045
	$\zeta_{\max}$	1.0299	1.0299	1.0283
2.0	$\theta_A$	0.3974	0.3974	0.3961
	$\theta_B$	0.7761	0.7761	0.7714
	$\eta_{\max}$	0.1577	0.1576	0.1570
	$\zeta_{\max}$	1.0655	1.0655	1.0629

\* Shooting optimization method

\*\* Elliptic integration method

#### 4. 수치해석 결과

표 2는 전단변형 효과를 무시한 경우( $\gamma=0$ )와 전단변형 효과를 고려한 경우( $\gamma=0.254$ )의 거동값들의 변화를 나타낸 것이다. 이 표에서 전단변형 효과를 고려한 경우의 거동값들이 전단변형 효과를 고려하지 않은 경우의 거동값보다 더 크게 나타남을 알 수 있다. 또한 단부에 작용하는 모멘트 하중의 크기가 커질수록 거동값들의 증가율도 커짐을 알 수 있다.

표 2. 전단변형 효과가 비선형 거동에 미치는 영향 ( $\lambda=20$ )

$m_B$	$\gamma$	$h$	$\theta_A$	$\theta_B$	$\eta_{max}$	$\zeta_{max}$	$n_{max}$	$v_{max}$
2.0	0.	0.1739	0.1722	0.3429	0.0666	1.0119	0.5000	1.0150
	0.254	0.1739	0.1722	0.3430	0.0667	1.0119	0.5001	1.0150
3.0	0.	0.4169	0.2711	0.5364	0.1058	1.0299	1.1250	1.5569
	0.254	0.4171	0.2712	0.5367	0.1059	1.0299	1.1254	1.5569
4.0	0.	0.8394	0.3974	0.7761	0.1577	1.0655	2.0000	2.1690
	0.254	0.8401	0.3977	0.7770	0.1578	1.0657	2.0013	2.1693

본 논문에서 개발한 수치해석 방법에 의해 다양한 하중변수  $m_B$ 에 대한 비선형 거동값, 즉 단부 회전 각  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ 와 수평방향 반력요소  $h$ , 최대처짐  $\eta_{max}$ , 정확탄성곡선의 곡선길이  $\zeta_{max}$ , 최대축방향력  $n_{max}$ , 최대전단력  $v_{max}$ 를 구할 수 있다.  $\gamma=0.254$ ,  $\lambda=100$ 에 대한 이러한 결과들을 그림 2, 3, 4에 나타내었다. 이 그림들을 살펴보면 각각의 하중  $m_B$ 에 대하여 두 개의 거동을 갖는다는 것을 알 수 있다. 이 두 개의 거동 중 구조물의 물리적 현상은 가장 용이한 경로를 따르기 때문에 본 연구와 같은 대변형 문제에서 정확탄성곡선의 더 작은 값의 거동이 안정적(stable)고, 큰 값은 불안정적(unstable)이다. 이 그림들에서 안정거동은 실선으로 불안정거동은 점선으로 나타내었다. 따라서 거동값이 나타내는 두 개의 경로가 만나는 점이 이 구조물의 임계하중( $m_B=2.40$ )이 된다.

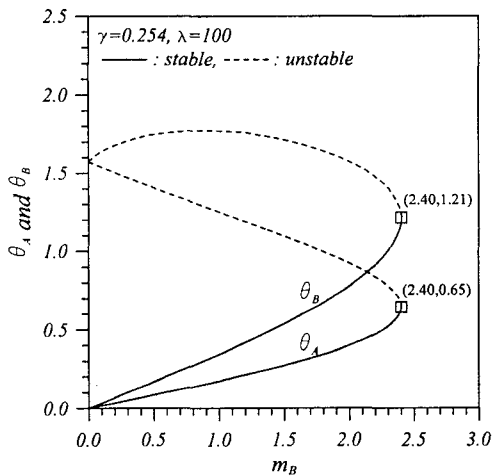


그림 2.  $m_B$ 와  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ 의 관계곡선

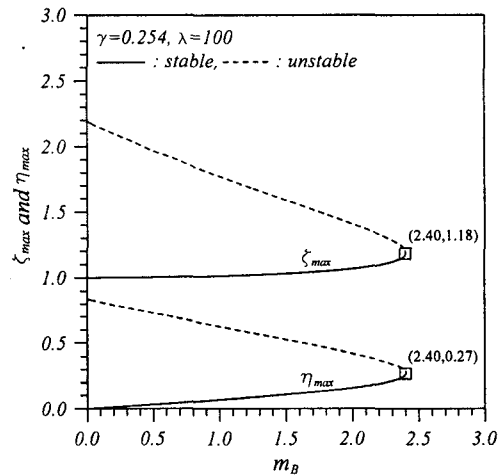


그림 3.  $m_B$ 와  $\zeta_{max}$ ,  $\eta_{max}$ 의 관계

그림 2, 3, 4에서 임계하중  $m_B=2.40$ 에 대하여  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $h$ ,  $\eta_{max}$ ,  $\zeta_{max}$ ,  $n_{max}$ 와  $v_{max}$ 의 값들은 각각 0.65, 1.21, 1.81, 0.27, 1.18, 3.01과 3.01이다. 이러한 결과값들은 안정적인 상태에서의 최대값이다. 따라서 단부모멘트 하중  $m_B$ 가 2.40을 초과하는 정확탄성곡선은 불가능하다는 것을 알 수 있다.

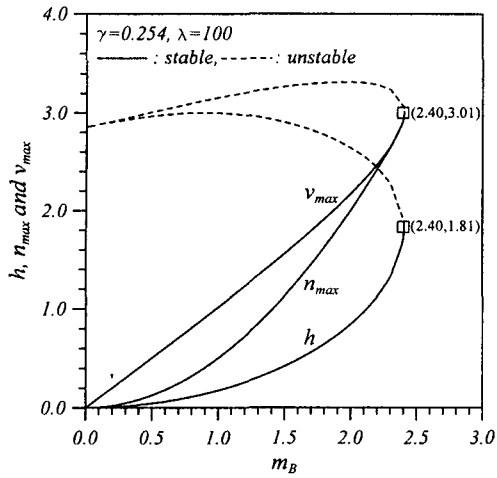


그림 4.  $m_B$ 와  $h$ ,  $n_{max}$ ,  $v_{max}$ 의 관계

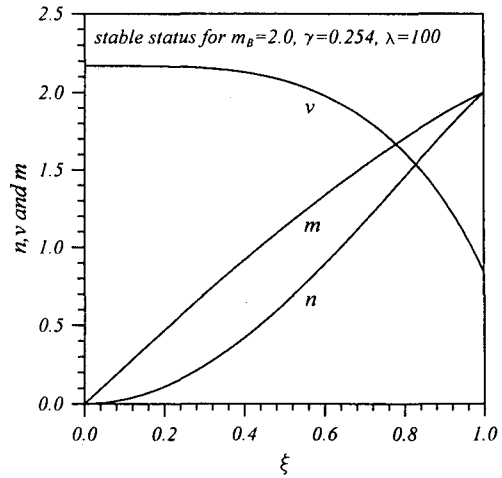


그림 5. 합응력도

그림 5는  $m_B=2.0$ 인 경우의 합응력  $n$ ,  $v$ ,  $m$ 을 나타낸 것이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 무차원 축방향 좌표  $\xi$ 가 증가함에 따라 축하중  $n$ 과 휨 모멘트  $m$ 은 증가하는 반면 전단력  $v$ 는 감소한다. 그러므로 최대 축방향력과 최대 휨모멘트는 회전지점인  $\xi=1$ 에서 나타나고, 최대 전단력은  $\xi=0$ 인 마찰이 없는 지점 A에서 나타난다.

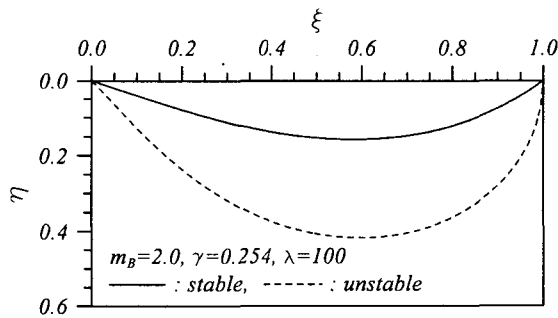


그림 6. 정확탄성곡선

마지막으로  $m_B=2$ ,  $\gamma=0.254$ ,  $\lambda=100$ 일 때 물리적으로 안정적인 경우와 불안정한 경우의 정확탄성곡선을 그림 6에 나타내었다.

## 5. 결 론

이 논문은 전단변형을 고려한 변화곡선길이보의 비선형 거동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계를 이용하여 대상 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식으로 대상 보의 거동값들을 효율적으로 산출할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 지배미분방정식 및 해석결과를 무차원화하여 연구결과와 활용범위를 넓혔으며, 본 연구결과와 타 문헌의 결과를 비교하여 본 연

구의 타당성을 검증하였다. 수치해석의 결과로 대상 보의 임계하중값을 구하고, 그에 따른 거동값들을 산출하였다.

일련의 수치해석 결과로부터 다음의 내용을 고찰할 수 있었다.

1) 전단변형 효과를 고려하면 정확탄성곡선의 거동값들은 전단변형 효과를 고려하지 않은 경우의 거동값보다 더 크게 나타난다.

2) 각각의 하중  $m_B$ 에 대하여 보는 서로 다른 두 개의 비선형 거동을 하며, 이 중 작은 값에 대한 거동은 안정적이며, 큰 값에 대한 거동은 불안정하다.

3) 임계하중( $m_B=2.40$ )에 대하여 거동의 결과값들은 안정적인 상태에서의 최대값이다.

4) 최대 축방향력과 최대 휨모멘트는 회전지점인  $\xi=1$ 에서 나타나고, 최대 전단력은  $\xi=0$ 인 마찰이 없는 지점 A에서 나타난다.

## 참고문헌

1. Chucheepsakul, S., Buncharon, S. and Huang, T., "Elastica of simple variable-arc-length beams subjected to end moment," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, 1995, pp.767-772.
2. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., "Large deflection of simple variable-arc-length beams subjected to a point load," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.4, 1996, pp.49-59.
3. Lee, B.K., Wilson J.F. and Oh, S.J., "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-Section," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.28, No.5, 1993, pp.579-589.
4. Lee, B.K. and Oh, S.J., "Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, No.18, 2000, pp.2507-2518.
5. Theocaris, P.S. and Panayotounakos, D.E., "Exact solution of the non-linear differential equation concerning the elastic line of a straight rod due to terminal loading," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.17, No.5/6, 1982, pp.395-402.
6. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1986.
7. Wang, C.M. and Kitipornchai, S., "Shooting optimization technique for large deflection analysis of structural member," *Engineering Structures*, Vol.14(4), 1992, pp.231-240.
8. Chucheepsakul, S, Buncharoen and Wang, C.M., "Large deflection of beam under moment gradient," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.120(9), 1993, pp.1848-1860.