

Element-free Galerkin 방법을 이용한 적응적 균열진전해석 Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-free Galerkin Method

최창근¹⁾ 이계희²⁾ 정흥진³⁾

Choi, Chang-Koon Lee, Gye-Hee Chung, Heung-Jin

ABSTRACT

In this study, the adaptive analysis procedure of crack propagation based on the element-free Galerkin(EFG) method is presented. The adaptivity analysis in quasi-static crack propagation is achieved by adding and/or removing the node along the background integration cell that are refined or recovered according to the estimated error. These errors are obtained basically by calculating the difference between the values of the projected stresses and original EFG stresses. To evaluate the performance of proposed adaptive procedure, the crack propagation behavior is investigated for several examples. The results of these examples show the efficiency and accuracy of proposed scheme in crack propagation analysis.

1. 서론

최근 무요소법(meshless method)의 적용분야는 고체해석분야로부터 유체해석분야까지 폭 넓게 확대되고 있다. 무요소법에서는 절점이 모델의 임의의 지점에 자유롭게 위치할 수 있기 때문에 절점의 추가나 소거에 의한 절점수의 변동이나, 절점의 위치 변화를 고려하는 새로운 모델의 작성이 손쉬우므로 이의 특성을 활용한 해석에 쉽게 적용될 수 있다.

이러한 무요소법의 특징들은 적응적 해석 및 균열의 해석에 적합한 특징이 된다. 따라서 개발 초기 무요소법의 실용적인 적용예제는 주로 균열의 해석에 집중되어 있었다. 그러나 무요소법의 두 가지 장점이 적응적해석과 균열의 진전해석은 쉽게 결합되지 못했다. 이는 균열 진전해석의 전

1) 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
2) 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
3) 전주대학교 토목환경공학과 조교수

체과정을 통해 해석의 정확도와 효율성을 동시에 만족시키는 것이 쉽지 않았기 때문이다.

따라서 본 연구에서는 무요소법의 특성을 잘 반영하고 있는 적응적 해석법과 균열진전해석의 조합을 통하여 적응적 균열진전에 관한 해석기법을 제시하였다. 이 해석기법에서는 원 EFG의 응력과 절점응력을 투영하여 얻은 투영응력과의 차를 오차지시자로 하고, 그 결과 얻어지는 오차의 분포에 따라 적분격자에 절점을 추가 소거하는 방법으로 적응적 해석을 수행하였다.

2. EFG 근사와 오차평가

EFG방법에 의하여 직접 계산된 임의점에서의 응력은 다음과 같다.

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (1)$$

여기서 \mathbf{D} 는 재료행렬, \mathbf{S} 는 변형률을 정의하는 미분연산자이다.

무요소법에서 형상함수의 도함수는 원 형상함수보다 더 높은 진동수 성분을 가지게 된다. 따라서 위의 식에서 얻어진 응력은 형상함수의 도함수에 의해서 정의되기 때문에 변위보다 높은 진동수 성분을 포함하고 있다. 이러한 가상의 진동수 성분은 특히 응력이 집중되거나 불연속이 발생하는 부분에서 크게 나타난다. 따라서 이러한 응력의 가상진동을 줄여주면 보다 정확한 응력분포를 산정할 수 있으며 이를 위하여 위에서 얻어진 절점응력을 다음과 같이 투영한다.

$$\sigma^p(\mathbf{x}) = \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} = \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \sigma^h(\mathbf{x}_K) \quad (2)$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 는 절점에서의 응력이며 l 은 투영응력의 영향영역내에 있는 절점의 수이다. 위 식에서 각 형상함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, a_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}, a_1))_{jI} \quad (3)$$

$$\psi_K(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}, a_2) \mathbf{B}_p(\mathbf{x}, a_2))_{jK} \quad (4)$$

여기서 (3)식은 EFG의 형상함수이며 (4)식은 투영응력의 형상함수이다. 이 때 투영응력의 형상함수는 EFG형상함수에 비하여 작은 영향영역을 사용한다. 결과적으로 보면 위에서 얻어진 투영응력은 절점의 응력을 원래의 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또 다른 형상함수로 보간하는

것이다. 따라서 기존의 계산 루틴을 그대로 이용할 수 있으므로 추가적인 많은 노력없이 간단하게 구현할 수 있다. 이후의 오차 평가에 있어서는 이 투영응력을 정확해로 가정한다. 따라서 임의의 점에서의 오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (5)$$

따라서 전체 해석의 상대오차는 다음과 같다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}} \quad (6)$$

각 적분격자의 오차에너지 norms 다음과 같다.

$$\|E\|_i = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (7)$$

각 적분격자당 동일한 오차를 분포시키는 것은 적응적 해석의 목표로 삼으면 각 cell의 오차지 수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_i = \left\{ \frac{\|E\|_i^2}{\|E\| / n_{cell}} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

3. 적응적 해석기법

3.1 방법의 개요

무요소법의 h -type의 적응적 세분화 기법은 많은 연구자들에 의해 제안되어 왔다. 적분격자를 통한 세분화 기법은 임의의 지점에 대해 적절한 세분화를 수행할 수 있고 국부적인 세분화에 대해서도 적절한 적분차수를 쉽게 구현할 수 있다는 점에서 현 단계에서 바람직한 세분화 기법중의 하나이다. 또한 재결합 정보를 위한 자료를 쉽게 구축할 수 있다는 장점도 있다. 따라서 본 연구에서는 균열진전에 따른 연속적인 적응적 해석을 위해 적분격자에 따른 절점의 추가와 제거를 수행하는 해석기법을 제안하였다.

적분격자에서 수행하는 수치적분의 적절한 차수에 대해서는 아직 명확한기준이 제시되어 있지 않다. 무요소법의 형상함수는 연속이고 매우 고차의 함수이기 때문에 유한요소법의 경우와 같이 필요한 적분차수를 해석적으로 구할 수 없다. 다만 Belytschko 등이 1994의 연구에서 다음과 같은 경험적인 적분차수를 제안하였다.

$$N_q = \sqrt{M_c} + 2 \quad (9)$$

여기서 M_c 는 적분격자내의 절점 수이다. 따라서 적분격자의 적분차수는 추가되는 절점수에 따라 적절하게 수정되어야 한다. 수치적분의 정확도의 급격한 변화를 피하고 전 해석영역에 걸쳐 일관성있는 적분의 정확도를 유지하도록 적분점의 차수를 수정하는 방법으로는 두 가지를 제시할 수 있다. 첫째 방법은 적분격자내의 절점 수에 따라 적분차수를 늘려주는 방법이고 두 번째 방법은 적분격자를 분할하는 방법이다. 본 연구에서는 절점이 적분격자에 따라 위치하는 방법을 사용하였기 때문에 두 번째 방법을 사용하여 세분화에 따른 적분차수를 유지하였다.

이와 같이 적분격자를 분할하면서 적응적 세분화를 수행하는 것은 유한요소에서의 적응적 세분화와 유사하나 유한요소는 고정된 절점수를 가지고 있으므로 적응적 세분화의 적용에 있어서는 일반적으로 요소간의 적합성을 만족시키기 어렵다.

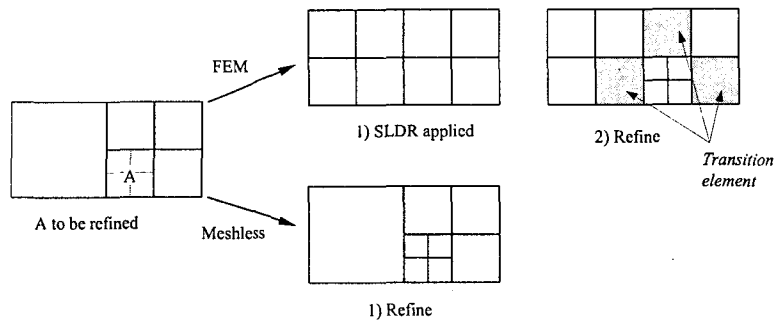


그림 1. 유한요소법과 무요소법의 적응적 세분화 개념

그러나 무요소법에서는 이산화가 오로지 절점들의 배치에만 기반을 두고 있고 절점간의 상관관계는 절점의 배치 형상에 따라 결정된다. 그러므로 유한요소의 경우와 같이 다른 자유도를 갖는 요소의 개발이나 세분화 수준의 차이를 고려하기 위한 처리가 불필요하다. 따라서 오차분포에 따른 적응적 세분화를 수월하게 모델상에 구현할 수 있다.

3.2 적응적 세분화 및 재결합 과정

적응적해석의 첫 번째 단계는 식(6)에 의해서 전체 해석모델의 상대오차를 산정하는 것이다. 만일 이 오차가 제한치내에 들지 않으면 식(8)에 의해 각 격자의 국부오차지시자를 산정한다. 만일 어떤 격자에서 계산된 국부 오차지시자가 미리 규정된 한계값보다 크다면 그 적분격자는 4개

로 나누어 지고 5개의 새로운 절점이 추가된다. 다음 단계로 추가된 절점이 기존의 절점과 중복되는 지는 검사하고 새로 추가된 절점이 만일 경계상에 있다면 인접한 2개의 경계절점의 평균값으로 경계값을 부여한다. 이러한 세분화가 이루어 졌으면 이후에 재결합을 대비하여 각 적분격자는 세분화 수준에 대한 정보와 가족격자에 대한 정보를 저장한다.(그림 2) 4개로 분할된 적분격자중의 하나는 원적분격자의 번호를 그대로 물려받고 다른 3개의 격자는 연속된 격자번호를 새로 부여 받는다. 따라서 원적분격자의 번호를 가지고 있는 적분격자를 모격자(母격자; mother cell)라고 하고 새로 번호를 부여받은 격자를 형제격자(兄弟격자; brother cell)라고 명명한다. 각 형제격자는 모격자에 대한 정보를 가지고 있다. 앞에서 언급했듯이 형제격자는 연속적인 격자번호를 가지고 있기 때문에 가족격자는 연속된 3개의 격자번호를 가진 형제격자와 이들이 공유하는 모격자로 이루어진다. 그리고 이들 가족격자는 동일한 세분화 수준을 가지고 있다. 따라서 그림 2의 5, 11, 12, 13 격자는 가족격자이다. 왜냐하면 11, 12, 13 의 연속된 격자번호를 가진 형제격자와 이들과 모격자 5가 동일한 세분화수준을 가졌기 때문이다. 반면에 6, 7 격자는 형제격자가 아니다. 비록 이들이 연속된 격자번호를 가지고 있고 한 개의 모격자를 공유한다 해도 세분화 수준이 다르기 때문이다.

재결합 단계에서 만일 계산된 적분격자의 국부오차지시자가 미리 설정된 값보다 작다면 그 격자는 재결합대상 격자로 표시된다. 모든 적분격자에 대한 검사가 끝나면 가장 높은 세분화 수준에 대하여 가족격자의 모든 격자(1모격자+3형제격자)가 재결합대상인 경우를 찾는다. 재결합 과정에서는 인접격자와 공유되지 않은 절점을 소거하고 가족격자를 하나의 적분격자로 통합한다. 그리고 통합된 적분격자의 세분화 수준과 오차값을 수정한다. 한 세분화 수준에 대한 재결합과정이 끝나면 모든 절점과 적분격자에 대하여 번호를 다시 매긴다.

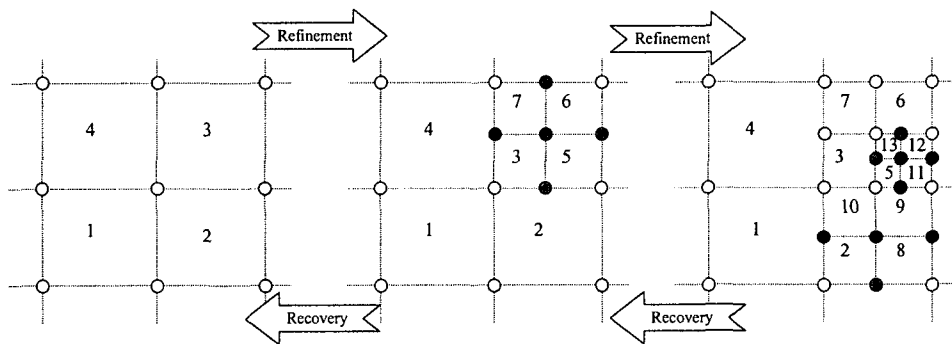


그림 2. 적응적해석을 위한 세분화와 재결합

4. 수치예제

본 연구에서 제시된 적응적 해석기법의 효용성을 검증하기 위하여 2차원 균열진전문제에 대

한 해석이 수행되었다. 모든 수치 예제의 해석에서는 적분격자당 4x4 수치적분이 수행되었으며 필수경계조건은 penalty방법을 이용하였고, 균열의 고려는 회절법을 이용하였다.

4.1 Edge Crack

제안된 해석기법의 정확성 및 적용성을 평가하기 위하여 2가지 종류의 edge crack예제를 해석하였다. 첫 번째예제는 전단분포하중 $\tau=1.0$ 이 상부에 작용하는 평판에 대한 균열해석이다. 측면에는 $a=W/2=3.5$ 길이의 균열이 생성되어 있고 평판의 하단은 바닥에 고정되어있다. 평판의 재료 상수로 탄성계수 $E=30 \times 10^6 \text{psi}$ 와 포아손 비 $\nu=0.25$ 를 사용하였고 평면응력상태를 가정하였다. 균열이 진전하지 않는 경우에 이 문제에 대한 응력강도계수는 $k_1=34.0, k_2=4.55$ 으로 알려져 있다.

이 문제의 정적적용적 EFG 해석결과는 Chung등의 연구(2000)에서 찾을 수 있다. 투영응력의 산정시 원 EFG문제에서 보다 작은 영향반경을 사용하여 적절하게 평가된 오차분포를 얻을 수 있었으며 이 때 사용된 영향반경의 계수는 $D_m^a=2.5, D_m^p=1.8$ 였다. 그러나 비진전문제에서 얻은 결과와는 다르게 균열진전의 해석에서는 위에서 제시된 정도의 영향반경계수를 사용하면 수렴에 실패하는 경우가 발생한다. 이러한 수렴실패는 재결합단계에서 주로 발생하는 급격한 세분화수준의 변화에 따른 절점간 거리의 급격한 변화에서 기인한다. 따라서 이러한 급격한 세분화수준의 변화를 포용할 수 있도록 보다 큰 영향영역을 사용하는 것이 바람직하다. 수치적인 시험결과로는 대부분의 균열진전 문제에 있어서 $D_m^a=3.5, D_m^p=3.0$ 정도의 값을 사용하면 급격한 세분화수준의 변화에 기인한 수렴실패는 발생하지 않았다. 이보다 큰 값을 사용하면 좀 더 안정적인 해석을 수행할 수 있지만 전체적인 해석의 효율을 저해할 우려가 있으므로 바람직한 방법이 아니다.

이 예제는 모두 15단계의 균열진전해석이 이루어 졌고 각 단계에서의 균열 진전량은 0.2inch로 하였다. 또한 각 단계마다 만족시켜야할 해석의 상대오차는 15%로 하였다. EFG해석시와 응력 투영시 각각 $D_m^a=3.0, D_m^p=2.5$ 가 사용되었다. 또한 해석 수행시의 다른 제한 조건으로는 최대 세분화수준 7, 각 진전단계

에서의 최대 반복계산수 15 등을 사용하였다. 그러나 각 해석단계에서 발생한 최대 반복계산수는 10으로 모든 균열진전단계에서 목표한 상대오차에 수렴하였다.

두 번째 예제는 균열이 진전시 응력집중계수의 정확성을 평가하기

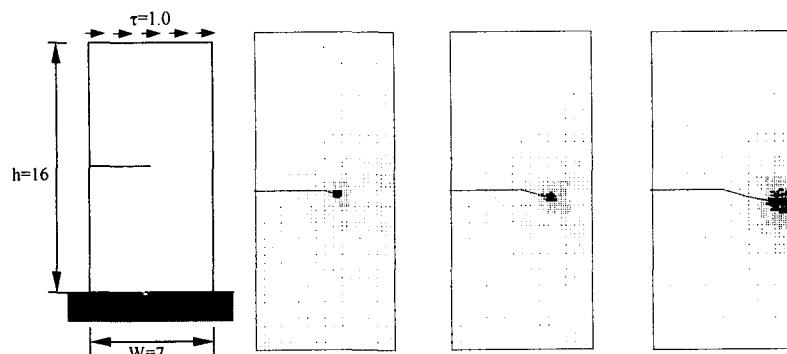


그림 3. 전단edge crack의 모델 및 균열진전에 따른 적응적 해석모델

위해 그림 4와 같은 조건의 문제를 해석하였다. 이 때 등가 모드1 응력집중계수는 다음식과 같이 나타난다.

$$k_{Ie} = \frac{\sigma \sqrt{w} \left[\sqrt{2 \tan \beta} (0.752 + 0.02\alpha + 0.73(1 - \sin \beta)^3) \right]}{\cos \beta} \quad (12)$$

여기서 $\alpha = a/w, \beta = \alpha\pi/2$ 이고 σ, a 는 각각 작용분포하중과 균열의 길이이다.

각 진전단계에서의 응력집중계수의 값은 그림 4에서 보이는 바와 같다. 이 그래프에서 볼 수 있듯이 15%미만의 목표상대오차를 설정하면 응력집중계수는 충분히 정확한 값을 보인다. 따라서 이러한 유형의 문제는 15%의 상대오차를 적정상대오차로 추정할 수 있었다.

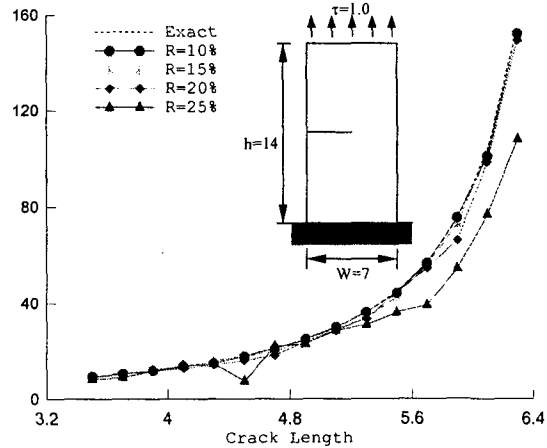


그림 4. 목표상대오차에 따른 응력집중계수

4.2 Double Cantilever

이 예제에는 균열이 준정적으로 성장하는 이중 외팔보모델에 대한 예제이다. 문제의 개략적인 구성은 그림 5에 나타나 있다. 시편은 평면 응력상태로 가정되었으며 탄성계수와 포아송 비는 각각 $E=3 \times 10^7 \text{ psi}, \nu=0.3$ 로 가정되었다. 균열선단에는 초기 기울기 1/30, 1/20, 1/10을 갖는 0.3inch 길이의 균열이 추가되었다. 이 문제의 해석에 사용된 영향반경계수는 EFG계산시와 응력의 투영시 각각 $D_m^a = 3.0, D_m^p = 2.5$ 를 사용하였다. 전체 해석의 균열진전단계는 모두 25 단계이고 각각의 단계에서는 0.1inch의 균열의 성장을 가정하였다. 각 단계에서 적응적 해석으로 만족시켜야 한 목표상대오차는 12%이고 최대 세분화수준은 7이다. 이 문제에서는 초

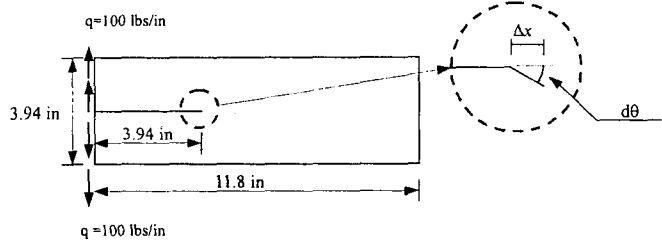


그림 5. Double Cantilever 문제의 개요

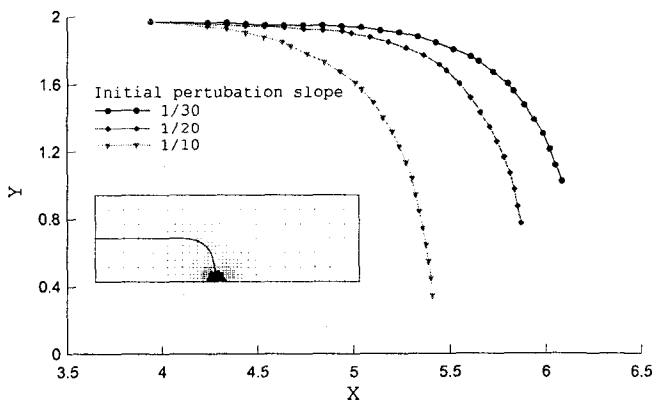


그림 6. 초기 균열각에 따른 진전경로

기에 모두 영역에서 같은 크기의 적분격자를 사용했으므로 가장 가까운 절점간의 거리는 가장 큰 절점간의 거리의 $1/2^7=1/128$ 이다. 그림 6은 적응적 해석에 따라 얻어진 균열진전의 경로와 이에 따른 절점의 배치를 나타내고 있다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 초기의 균열기울기는 전체 균열의 경로를 결정하는 중요한 요소이다. 그러나 이 때 해석의 정확도를 유지하지 않는다면 해석전체에 걸쳐 오차가 누적되게 된다. 초기기울기가 1/10인 경우 보다 높은 목표상대오차(20%)를 설정하면 균열은 아래쪽으로 기울지 않고 수평방향으로 진전된다. 따라서 이 경우에도 15%미만의 목표상대 오차를 설정하여 타당한 결과를 얻을 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 EFG방법에 의한 균열진전해석을 위해 적응적 세분화와 재결합기법이 제시되었다. 이 기법에서는 균열의 진전에 따라 연속적으로 변화하는 오차분포에 따른 최적의 절점배치를 얻기 위해 적응적 해석을 수행한다. 그 결과 계속적인 균열의 진전과정에서 일정한 해석의 정밀도를 유지하여 전체해석을 통해 일관성있는 결과를 도출할 수 있었다. 또한 응력집중점의 이동에 따라 이전 단계 산정되었던 조밀한 절점배치를 복귀시키면서 해석의 효율성을 증대시켰다. 이러한 과정에 필요한 절점의 추가와 소거는 적분격자의 구조를 따랐다. 이러한 절점배치에 기준이 되는 오차분포는 투영응력법에 의해 산정하였다.

제안된 방법의 타당성을 검토하기 위하여 수치예제에 대한 해석이 수행되었다. 이러한 예제들의 해석결과는 제안된 방법이 균열의 진전에 따른 구조물의 응답을 적응적해석에 의해 적절하게 나타낼 수 있음을 보여 주었다.

참고문헌

- Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl (1996b). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 3-47.
- Chung, H. J., Lee, G. H., Choi, C. K. (2000) Adaptive nodal generation with the element-free Galerkin method, *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal.* , Vol. **10**, pp.635-650.
- Hausser-Combe, U. and Korn, C. (1998), An adaptive approach with the EFG method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **162**, 203-222.
- 최창근, 이계희, 정홍진 "Element-free Galerkin 방법을 이용한 적응적 균열진전해석", *전산구조공학 회논문집*, 제13권 4호, 485-500