

무요소법과 무한요소의 결합에 관한 연구

Combination of Element-Free Galerkin Method and Infinite Elements

이 상 호* 김 태 연**
Lee, Sang-Ho Kim, Tae-Yeon

ABSTRACT

In this study, a new method coupling of Element-Free Galerkin(EFG) method and Infinite Elements(IE) method is presented for extending application of the EFG method to engineering problems in unbounded domain. EFG method and IE method are briefly reviewed, and then the coupling procedure of the two methods is proposed. Numerical Algorithm by way of EFG-IE coupling technique is also developed. Numerical results illustrate the performance of the proposed technique. The accuracy of numerical solutions by the developed algorithm is guaranteed in comparing those of the other methods.

1. 서 론

무요소법의 대표적인 방법중의 하나인 Element-free Galerkin(EFG)법⁽¹⁾은 요소를 사용하지 않고 일정영역내에 포함된 절점들만을 이용한 이동최소제곱근사⁽¹⁾(moving least squares approximation)를 통하여 형상함수를 만들어내는 방법이다. 따라서 기존의 유한요소법이 지니고 있던 연속적인 요소망 재구성으로 인한 단점이나 요소의 찌그러짐(mesh distortion)으로 인해 생기는 문제점들을 해결할 수 있다는 점에서 무요소법은 균열전파와 같은 불연속체를 다루는 문제들의 해석에 큰 장점을 지니고 있으며, 충분한 절점이 사용되어진다면 해의 수렴속도도 유한요소법에 비해 빠르므로 높은 정확도를 유지할 수 있다. 또한, 형상함수를 계산하는 방법을 제외한 모든 과정이 유한요소법의 Galerkin정식화 과정을 따르므로 해석상의 기능확장면에 있어서도 큰 어려움이 없다.

공학 분야에서 많은 관심있는 문제들이 무한영역까지 확장 가정된 영역들을 다루어야 하는 경우가 있다. 이러한 경우 유한요소법을 이용한 유한한 크기의 해석대상체를 사용할 경우 하중영향 즉, 변위나 응력이 남아있는 무한영역을 고려하지 못함으로써 해석상의 많은 오차를 유발시킬 수 있다.

* 정회원, 연세대학교 사회환경건축공학부 토목공학전공 부교수

** 정회원, 연세대학교 산업기술연구소 연구원

이러한 문제들을 해결하기 위한 많은 노력들이 행해져 오고 있는데, 예를 들어 경계요소법⁽²⁾ (Boundary Element Method)이나 무한요소법⁽³⁾ (Infinite Element Method) 등이 그것이다. 특히 무한요소법의 경우는 내부영역(near field)의 외부(far field)를 무한요소를 사용하여 모형화하는 방법으로, 1970년대 초반 Ungless⁽⁴⁾와 Bettess⁽⁵⁾에 의해 처음으로 소개된 이후, 반무한 탄성지반의 정역학적 문제⁽⁶⁾라든지 반무한영역으로의 파동전파⁽⁸⁾와 같은 문제 해석에 적용된 이래로 최근까지 계속적으로 새로운 무한요소 형상함수의 개발과 더불어 연구되어지고 있다.

본 연구에서는 무요소법이 지닌 장점을 살리면서도 무한영역을 고려해야 하는 공학적 문제들의 해석을 위하여 EFG방법과 무한요소를 결합하는 방법을 연구하였다. 본 논문에서는 EFG법과 무한요소의 결합방법 및 이를 통해 형성되어지는 시스템 정식화과정을 소개하였으며, 이를 바탕으로 하여 개발된 해석알고리즘을 제시하였다. 개발된 EFG-무한요소 결합알고리즘의 정확성과 무한영역을 지닌 문제에 EFG법의 적용 가능성을 입증하기 위하여 간단한 수치예제를 대상으로, 기존의 다른 해석방법들과의 결과비교분석을 수행하였다.

2. EFG 형상함수와 해석이론

이동최소제곱근사법에 의해서 근사변위함수 $u_h(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ 는 완전 다항식(complete polynomials)의 기저(basis)이고, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 는 계수들이다.

식(1)에 절점 상호간의 거리에 따른 가중함수를 도입하여 이동최소제곱근사법을 적용하면 다음과 같은 EFG형상함수를 유도할 수 있다.

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)] \quad (4)$$

이며, $\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 는 가중함수 매트릭스이다.

자연경계영역 Γ_f 와 필수경계영역 Γ_u 로 나누어진 경계 Γ 를 지닌 영역 Ω 에 대하여 평형조건식과 경계조건식을 생각하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_f \quad (7)$$

이 때, 식(5)에서 principle of virtual work에 의해서 다음과 같은 weak formulation이 유도되어진다. 즉, EFG법에 의한 해석방법에 있어서도 Γ_u 에서 0인 임의의 test function $\delta u(\mathbf{x})$ 에 대하여, 식

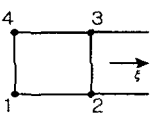
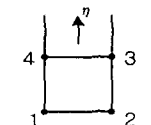
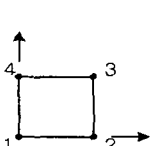
(8)을 만족시키는 해 $u(x) \in H^1(\Omega)$ 를 찾는 문제가 된다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) dx = \int_{\Omega} b_i \delta u_i dx + \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta u_i dS \quad (8)$$

3. 무한요소 형상함수 유형

무한요소 형상함수의 유형에는 기존의 유한요소 형상함수에 무한영역을 고려할 수 있는 소거함수를 곱함으로써 만들어지는 소거함수무한요소⁽³⁾(decay function infinite elements)와, 무한영역을 유한영역으로 사상하여 형상함수가 사상한 유한영역에서 계산되어지는 사상무한요소⁽³⁾(mapped infinite elements)가 있다. 본 연구에서는 Curnier⁽⁶⁾에 의해 제안된 사상무한요소가 사용되며, 각 방향에 따른 사상함수는 표1과 같다.

표 1 사상무한요소의 각 방향에 따른 사상함수

Element	Mapping function
	$M_1(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) - \frac{(1+\xi)^2}{2(1-\xi)}$ $M_2(\xi, \eta) = N_2(\xi, \eta) + \frac{(1+\xi)^2}{2(1-\xi)}$ $M_3(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) + \frac{(1+\xi)^2}{2(1-\xi)}$ $M_4(\xi, \eta) = N_4(\xi, \eta) - \frac{(1+\xi)^2}{2(1-\xi)}$
	$M_1(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) - \frac{(1+\eta)^2}{2(1-\eta)}$ $M_2(\xi, \eta) = N_2(\xi, \eta) + \frac{(1+\eta)^2}{2(1-\eta)}$ $M_3(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) + \frac{(1+\eta)^2}{2(1-\eta)}$ $M_4(\xi, \eta) = N_4(\xi, \eta) - \frac{(1+\eta)^2}{2(1-\eta)}$
	$M_1(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) - \frac{(3+\eta+\xi-\xi\eta)^2}{4(1-\xi)(1-\eta)}$ $M_2(\xi, \eta) = N_2(\xi, \eta) + \frac{(3+\eta+\xi-\xi\eta)^2}{4(1-\xi)(1-\eta)}$ $M_3(\xi, \eta) = N_3(\xi, \eta) + \frac{(3+\eta+\xi-\xi\eta)^2}{4(1-\xi)(1-\eta)}$ $M_4(\xi, \eta) = N_4(\xi, \eta) - \frac{(3+\eta+\xi-\xi\eta)^2}{4(1-\xi)(1-\eta)}$

(N_i : bilinear shape function)

4. 무요소법과 무한요소의 결합

4.1 조합방법

기존의 무한요소법을 이용한 모형화 방법은 해석대상체의 내부영역에는 유한요소를 그 외부영역에 무한요소를 사용하는 것이었으나, 본 연구에서는 그림 1에서 제시된 것처럼 내부영역에 EFG 절점을 사용하고, 외부영역은 무한요소를 사용되는 결합방법을 연구하였다. 접촉영역에서는 유한요

소를 사용하며 유한요소의 절점과 EFG절점사이의 연속성과 일치성을 만족시킬 수 있는 매끄러운 형상함수를 도출하기 위해 ramp function⁽⁷⁾을 도입하였다.

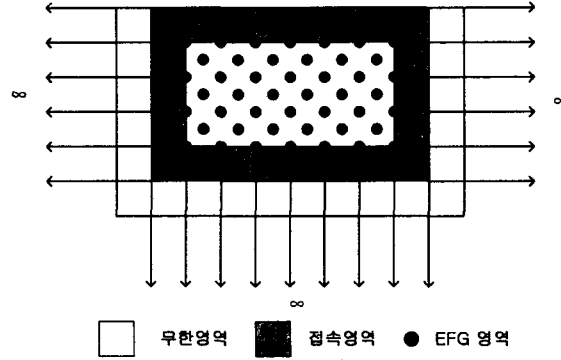


그림 1 무요소법과 무한요소의 결합모형

4.2 무요소법과 무한요소의 결합에 따른 정식화

각 영역에 따라서 변위는 EFG영역 변위 $u^{(e)}$, 접속영역 변위 $u^{(f)}$, 그리고 무한영역 변위 $u^{(i)}$ 의 조합이 된다. 따라서, 근사변위함수 $u_h(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 된다.

$$u_h(\mathbf{x}) = u_h^{(e)} + u_h^{(f)} + u_h^{(i)} \quad (9)$$

여기서,

$$u_h^{(e)} = \sum_{l=1}^n \phi_l t_l, \quad \phi_l: \text{무요소 형상함수} \quad (10)$$

$$u_h^{(f)} = \sum_{j=1}^p I_j s_j \quad (11)$$

$$I_j(\mathbf{x}) = [1 - R(\mathbf{x})]N_j(\xi(\mathbf{x})) + R(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}), \quad R(\mathbf{x}) = \sum_{x_j \in \Gamma_{EFG}} N_j(\mathbf{x}) \quad (12)$$

(N_j : 유한요소 형상함수, Γ_{EFG} : 접속영역의 무요소절점)

$$u_h^{(i)} = \sum_{K=1}^l M_K r_K, \quad M_K: \text{무한요소 형상함수} \quad (13)$$

식 (9)~(13)으로부터 근사변위함수는 다음과 같은 매트릭스형태로 표현된다.

$$u_h(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_q(\mathbf{x})\mathbf{d}_q \quad (14)$$

여기서, $\mathbf{L}_q = [\phi_l, I_j, M_K]$ 이고, $\mathbf{d}_q = \langle \mathbf{t}^T, \mathbf{s}^T, \mathbf{r}^T \rangle$ 다. 식 (14)를 식(8)에 대입하면 다음과 같은 시스템 방정식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}^{ext} \quad (15)$$

여기서, 강성도 행렬 \mathbf{K} 는

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (16)$$

이며, \mathbf{B} 는 형상함수의 도함수를, \mathbf{D} 는 응력과 변형률사이의 관계를 나타내는 매트릭스이다. 사상무한요소의 경우 무한영역을 유한영역으로 좌표변환을 하므로 수치적분으로 Gauss-Quadrature rule 을 그대로 적용한다.

4.3 해석 알고리즘 흐름도

각 영역에 대한 형상함수가 다르므로 데이터의 입력과정에서의 요소식별을 통하여, 그 요소에 따라 강성도행렬이 만들어지며, 영역별 강성도행렬이 형성되어지고, 이들을 통하여 전체(global) 강성도 행렬이 완성된다. 그림 2는 EFG법과 무한요소의 결합 흐름도를 제시한 것이다.

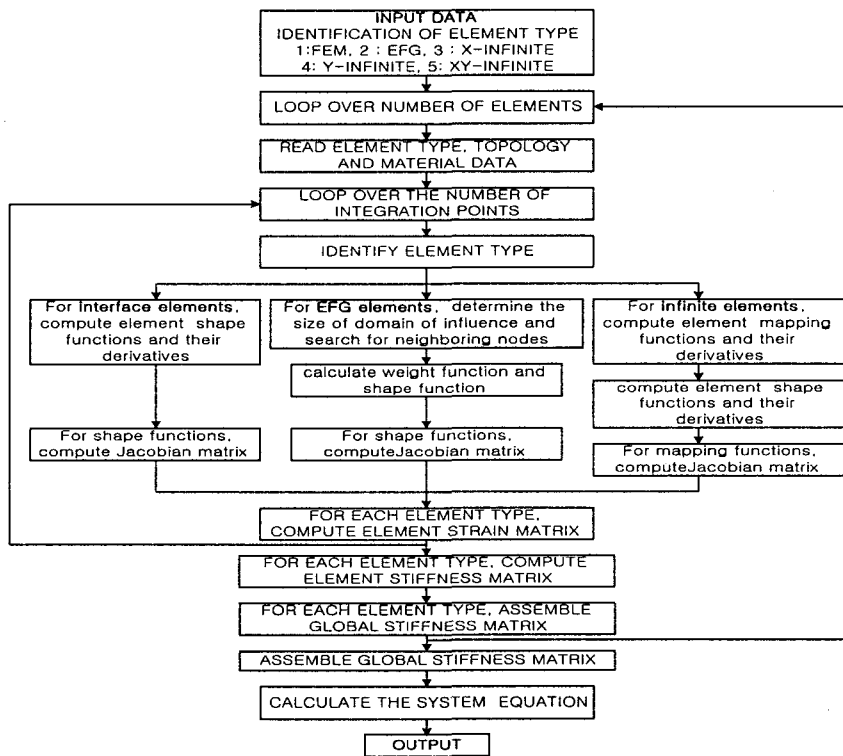


그림 2 EFG-무한요소 결합 흐름도

5. 수치 예제

본 연구에서 제안된 EFG-무한요소 결합알고리즘의 정확성을 검증하기 위하여 이론해를 지닌 반 무한 탄성체문제⁽⁶⁾를 대상으로 본 연구방법과의 기존의 해석방법들과 결과를 비교하였다. 해석대상

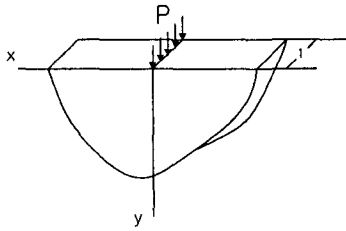


표 2 반무한 탄성체의 물성치

Young's modulus E (t/m^2)	1×10^3
Poisson's ratio ν	0.25

그림 3 수직하중하의 반무한 탄성체

은 그림 3에 제시되어진 것처럼 균질하고, 등방성인 탄성체에서 수직으로 하중을 받는 반무한 탄성체이며, 재료의 물성치는 표 2와 같다. 각 해석 방법에 따른 해의 정확성을 비교 검증하기 위하여 평면응력상태하에서 하중 재하지점 ($x=0$) 상의 y 의 변화에 따른 수직변위를 계산하고, 이를 다음과 같은 Flamant의 이론해⁽⁶⁾와 비교하였다.

$$u|_{x=0} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{y} \quad (17)$$

이 때, 상식에서 여기서 d 는 변위가 소멸되어지는 임의의 거리를 의미하며, 본 연구에서는 거리 $d=6m$, 선하중 $P=\pi/2$ ton으로 가정하였다.

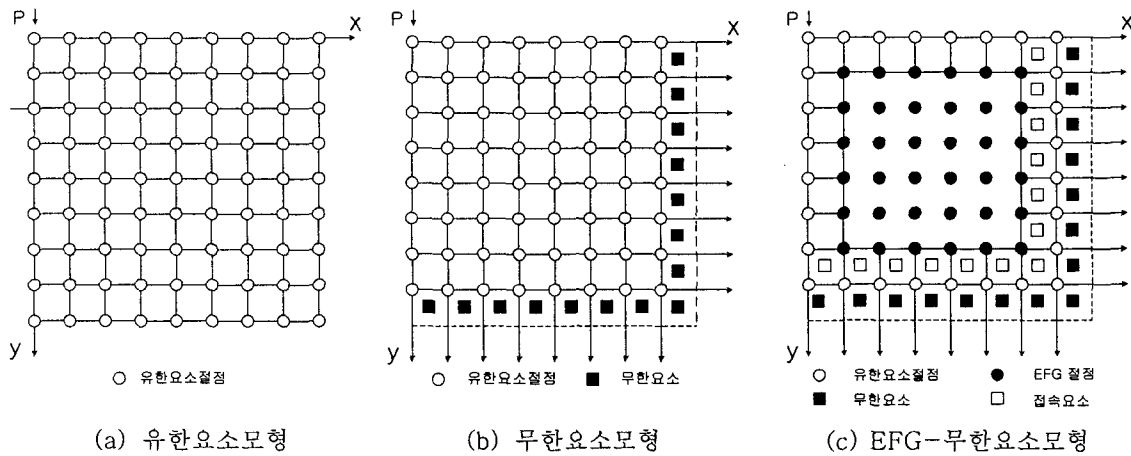


그림 4 유한요소법, 무한요소법, EFG-무한요소 결합법에 따른 해석모형

그림 4는 해석대상체의 절반을 4.8m영역까지 고려하여 모형화시킨 것으로, (a)는 8x8 유한요소를, (b)는 7x7의 유한요소와 15개의 무한요소를, (c)는 6x6의 EFG절점, 15개의 무한요소, 그리고, 15개의 접촉요소, 경계영역은 11개의 유한요소를 사용하여 모형화한 그림이다. 세 경우 모두 동일한 개수의 자유도를 지니고 있다. 그림 5와 표 3에서 각 해석방법에 따른 하중 재하지점 ($x=0$)에서의 y 방향의 수직변위를 Flamant의 이론해와 비교하였다. 유한요소법의 경우 충분한 요소를 사

용함으로써 비교적 정확한 해를 얻을 수 있었지만 특히 하중재하부분에서의 해의 정확도가 상대적으로 다른 방법에 비해 떨어졌다. 무한요소법의 경우는 유한요소법보다는 무한영역의 하중을 고려함으로써 하중재하부분에서 유한요소해석에 비해 비교적 정확한 수치해를 구할 수가 있었지만, 하중재하부분으로부터 거리가 멀어질수록 해의 정확도가 떨어지는 경향을 보여주었다. 그러나, EFG법을 무한요소와 결합하여 해석시 그 결과는 거리에 관계없이 무한요소법을 사용한 경우보다 더 나은 해를 얻을 수가 있었고, 하중재하부분의 경우도 해의 정도를 향상시킬 수 있었다. 이는 표 4에 제시되어진 것처럼 L^2 -상대오차(relative error)를 통해서도 확인할 수 있다. 그림 5와 표 3-4의 결과로부터 본 연구에서 제안된 새로운 EFG-IE결합 알고리즘은 하중재하부분 뿐만 아니라 무한영역을 처리하는 far-field 부근에서도 높은 정확도를 유지할 수 있다.

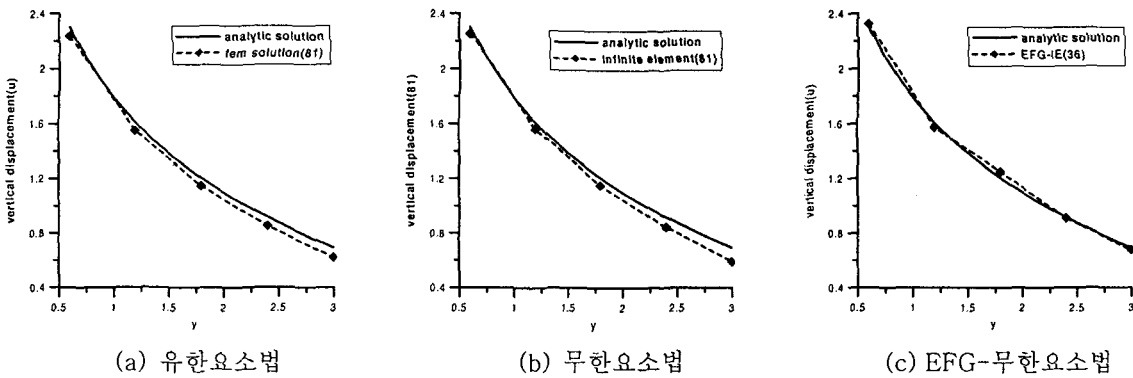


그림 5 유한요소법, 무한요소법, EFG-무한요소 결합법에 의한 수직변위

표 3 하중 재하지점 ($x=0$)에서의 y 의 변화에 따른 수직변위

Method 거리(m)	Flamant's solution	FEM	IEM	EFG-IE
0.6	2.3025	2.2355	2.2517	2.3254
1.2	1.6094	1.5496	1.5614	1.5745
1.8	1.2040	1.1451	1.1488	1.2485
2.4	0.9163	0.8511	0.8422	0.9107
3.0	0.6931	0.6204	0.5914	0.6750

	FEM	IEM	EFG-IE
Log(r)	-2.8548	-2.9631	-3.4641

표 4 L^2 -relative error

$$r = \frac{\|u^{NUM}\|_{L^2} - \|u^{EXACT}\|_{L^2}}{\|u^{EXACT}\|_{L^2}}$$

6. 결 론

본 연구에서는 요소를 사용하지 않음으로 인해 기존의 유한요소법에 비해 특수공학적 문제에서 큰 장점을 나타낼 수 있는 EFG법을 무한영역 문제에 적용할 수 있는 새로운 해석방법을 개발하였다. 개발된 EFG-IE결합기법을 benchmark문제에 적용해 본 결과 새로운 해석 알고리즘의 결과가 기존의 해석 방법들에 비해 하중재하되는 부분뿐 아니라 전체 해석영역에서 상대적으로 높은 해의 정도를 유지할 수 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서 개발된 새로운 EFG-IE결합기법을 무한영역을 지닌 high gradient문제, 지반내 터널주위의 국부응력집중 문제나 암반절리의 확산문제, 상대적 크기비교에 의해 무한영역으로 간주할 수 있는 구조체에 내재된 균열의 전파문제등과 같은 공학문제에 높은 정확도를 유지하며 효과적으로 적용할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)에서 주관하는 원자력기초연구사업의 연구비 지원으로 이루어졌으며 이에 깊이 감사드립니다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 229~256.
2. Banerjee, P. K. and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw Hill Book, 1981, pp.
3. Bettess, P., *Infinite Elements*, Penschaw Press, 1992.
4. Ungless, R. L., *An infinite finite element*, M A'Sc Thesis, University of British Columbia, 1973.
5. Betess, P., "Infinite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1977, pp. 53~64.
6. Curnier, A., "A static infinite element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 1479~1488.
7. Belytschko, T., Organ, D. and Krongauz, Y., "A coupled Finite Element-Element-free Galerkin method", *Computational Mechanics*, Vol. 17, 1995, pp. 186~195.
8. Astley, R.J., "Infinite elements for wave problems: A review of current formulations and an assessment of accuracy", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, 2000, pp. 951~976.