

수정된 적분차수를 이용한 평면유한요소의 개선

An Improved Quadratic Finite Element with Modified Integration Order

김 선 훈* 김 주 일** 이 창 원*** 신 재 철****
Kim, Sun-Hoon Kim, Joo-II Lee Chang-Won Shin, Jae-Chul

ABSTRACT

In this paper the efficient finite element for stress analysis of plane stress/strain problems is proposed. This element is achieved by adding the bubble-mode function to 8-node element. The stiffness matrix of the element is calculated by using modified numerical integration order to avoid spurious zero energy mode. In order to demonstrate the performance of this element numerical tests for various verification problems are carried out. The results of numerical tests show accuracy and reliability of the element presented in this paper.

1. 서론

평면 응력/변형률 문제의 응력해석에서 가장 널리 사용되고 있는 사변형 8절점과 9절점 평면유한요소는 요소의 형상이 직사각형인 경우 요소의 강성행렬 계산시 정상적인 가우스 적분차수를 사용하여도 정확한 해석 결과를 나타낸다.^{(1),(2)} 그러나 요소의 형상이 찌그러지는 경우 8절점 평면유한요소는 해석결과에 많은 오차를 보여주었으며, 해결책으로 사용된 감차적분기법(Reduced Integration Technique)의 적용도 해석결과의 개선에 큰 도움을 주지 못하였다.⁽³⁾ 이에 비하여 9절점 평면유한요소는 감차적분기법이 적용되었을 때 해석결과에 많은 개선을 보여주었으나, 가영에너지모드(Spurious Zero Energy Mode)라는 또다른 문제점을 나타내어 해석결과에 심각한 오차를 나타내었다. 이러한 문제점의 해결책으로 그 동안 많은 연구가 수행되었으며, 그 결과로 많은 우수한 평면유한요소들이 발표된 바 있다.⁽⁴⁾⁻⁽⁸⁾

본 연구에서는 평면유한요소 개선책의 한가지 방안으로 8절점 평면유한요소의 형상함수에 Bubble-mode Function을 추가하는 방법⁽⁹⁾을 시도하였다. 또한 요소의 강성행렬의 계산시 가우스 적분차수를 수정하여 적용하였다. 그 결과로 해석결과도 비교적 우수하면서 가영에너지모드의 발생이라는 문제점이 발생하지 않는 평면유한요소를 제시할 수 있었다. 여러 검증문제를 수행해 본 결과 본 연구에서 제안한 평면유한요소는 신뢰할 만한 것으로 평가되었다.

* 정희원 · 영동대학교 건설공학부 토목공학과 조교수

** 충남대학교 토목공학과 석사과정 졸업 (현 홍익기술단 근무)

*** 충남대학교 토목공학과 박사과정

**** 정희원 · 충남대학교 토목공학과 교수

2. 등매개변수 평면유한요소

2.1 요소강성행렬

등매개변수 평면유한요소의 강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_i]^T [D] [B_j] |J| d\xi d\eta \quad (1)$$

여기서, $[B_i] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$ (2)

$[D]$: 재료의 특성행렬

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{: Plane Stress} \quad (3)$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{: Plane Strain} \quad (4)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (5)$$

N_i : 형상함수

2.2 요소의 문제점

요소 강성행렬의 계산과정에서 8절점요소와 9절점요소는 정상적인 가우스 적분차수를 사용하면 요소의 형상이 직사각형인 경우에만 해석결과가 비교적 정확하고, 요소의 형상이 임의의 형태인 경우에는 해석결과를 신뢰할 수 없다는 사실은 이미 여러 문헌을 통해 잘 알려져 있다. 이것은 정상적분법에 의한 경우 등매개변수 평면유한요소는 절점의 자유도로서 회전 변위를 사용하지 않고 오직 이동 변위만을 선택함으로써 순수 휨에 대해서도 전단변형 모드로 응답하게 되어 강성이 과도하게 크게되는 현상이 발생하는 점 때문에 발생한다.

정상적분이 가지는 위와 같은 문제의 해결책으로서 정상적인 가우스 적분차수 보다 낮은 차수를 사용하여 적분을 실시하는 감차적분기법이 제안되어 8절점요소는 물론이고, 특히 9절점요소에서 요소의 형상에 관계없이 해석결과에 많은 개선을 보여주었다. 감차적분을 적용한 요소는 해석결과와 개선 이외에 계산시간의 절약이라는 부수적인 장점을 보여 주었다.

하지만 이러한 장점에도 불구하고 감차적분기법을 사용한 평면유한요소는 고유치 해석시 요소의 강체 거동을 표현하기 위해 필요한 세 개의 영 에너지 모드 외에 부가적인 영 에너지 모드를 발생시킨다는 단점을 나타내었다.⁽¹⁰⁾ 특히 9절점요소에서 발생하는 영 에너지 모드는 요소의 변형에너지에 영향을 주지 않으면서 변형을 발생시켜 심각한 해석상 오류를 유발시키는 것으로 알려져 있다.

평면유한요소의 문제점 개선을 위해 그 동안 여러 연구가들에 의해 많은 논문이 발표된 바 있다. 대표적인 몇가지를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 선택적 감차적분법 이용⁽⁷⁾
- (2) 8절점 요소, 9절점 요소의 형상함수 조합⁽⁵⁾

- (3) 비적합변위형의 추가방법^{(11),(12)}
- (4) e방법과 β 방법⁽⁴⁾
- (5) Stabilization 방법의 사용⁽⁸⁾
- (6) 회전자유도의 도입방법⁽⁶⁾

3. 평면유한요소의 개선

본 연구에서는 평면유한요소의 개선을 위해 8절점요소의 형상함수에 Bubble-mode Function을 추가하는 방법을 시도하였다. 추가된 Bubble-mode Function은 다음과 같다.

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (6)$$

강성행렬의 구성을 위해 필요한 적분과정에서 Bubble-function에만 의존하는 부분인 $[K_{22}]$ 를 원래의 8절점 요소에 의한 부분과 나누어 구성하며, $[K_{22}]$ 에 대하여는 정상적분과 감차적분을 모두 실시하고 가영 에너지모드의 발생을 억제시키기 위하여 두 가지의 방법에 의해 산출된 값들을 선형적으로 조합하여 강성행렬의 구성을 완료하였다. 그리고 이를 다시 정적으로 응축하여 최종적인 강성행렬의 차수는 원래의 8절점요소의 차수로 복원시켰다.

본 연구에서 제안한 평면유한요소의 강성행렬의 계산과정을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 원래의 8절점 요소에 관계된 부매트릭스 $[K_{11}]$ 를 감차적분에 의해서 구성한다.
- (2) 연속적으로 $[K_{12}]$, $[K_{22}]$ 를 감차적분에 의해서 구성한다.
- (3) $[K_{22}]$ 를 정상적분에 의하여 다시 한번 구성하여 두 방법에 의해 각각 얻어진 $[K_{22}]$ 를 선형적으로 조합한다.
- (4) 완성된 강성행렬을 아래의 식과 같은 방법으로 응축한다.

$$[K]^* = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^T \quad (7)$$

여기서, $[K]^*$ 는 정적으로 응축된 최종 강성행렬이다.

- (5) Bubble-function 모드의 추가와 선형조합법의 사용은 변형도 행렬에도 영향을 미치며 이로 인해 변형도 행렬 또한 아래와 같이 정적으로 응축된다.

$$[B]^* = [B_{11}] - [B_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{12}]^T \quad (8)$$

여기서, $[B_{11}]$ 은 원래의 변형도 행렬이며, $[B_{12}]$ 는 Bubble-function에 의해 추가된 부분이다. 응축된 변형도 행렬을 이용하여 응력의 값을 새롭게 계산한다.

위의 (3)단계에서 감차적분된 $[K_{22}]$ ($[K_{22}]_R$)와 정상적분된 $[K_{22}]$ ($[K_{22}]_N$)의 선형조합이 필요하게 되는데, 본 연구에서는 다음과 같이 수행하였다.

$$[K_{22}]^* = (1 - \alpha)[K_{22}]_R + \alpha[K_{22}]_N \quad (9)$$

여기서 α 는 0.005를 사용하였다.

4. 수치검증예제

본 연구에서 제시한 평면유한요소(이하 LCM요소로 칭함)의 검증을 위하여 고유치해석, 조각시험, 요소의 형상변화시험해석 등을 실시하였다. 해석결과의 분석을 위하여 8절점평면요소(Q8), 9절점평면요소(Q9), Cook의 e-method와 β -method에 의한 요소(e-method, β -method)⁽⁴⁾ 등의 결과와 비교검토하였다.

4.1 고유치해석

고유치의 해석은 요소자체의 특성을 파악하기 위한 것이며, 고유치해석을 통해서 요소가 가지는 영 에너지 모드의 수를 파악할 수 있다. 요소의 고유치 해석을 통해서 요소자체의 특성 즉, 의사 영 에너지 모드의 존재 여부를 판단할 수 있다. 제약이 없는 경우의 요소 강성행렬에 대한 고유치 해석을 수행했을 경우에 이차원 평면요소는 강체 거동을 표현하기 위해 필요한 3개의 영 고유치만 갖는 것이 정상이고, 추가적으로 발생하는 영 고유치가 있을 때 의사 영 에너지 모드가 발생하는 것으로 생각할 수 있다. 이때, 추가적인 영 고유치의 수는 발생할 수 있는 의사 영 에너지 모드의 수와 같다.

그림 1은 본 연구에서 제시한 평면유한요소의 고유치 해석 결과이다. 그림에서 영 고유치가 네 개임을 알 수 있다. 즉, 하나의 의사 영 에너지 모드가 존재한다는 것을 알 수 있다. 여전히 남아 있는 하나의 추가적인 의사 영 에너지 모드는 해석의 결과에 악영향을 미칠 가능성을 내포하고 있다. 하지만 이것은 단일 요소 모델의 경우이며, 요소들이 조합되어질 때, 즉 둘 이상의 요소로 이루어진 요소 망에서는 나타나지 않는 모드이다.

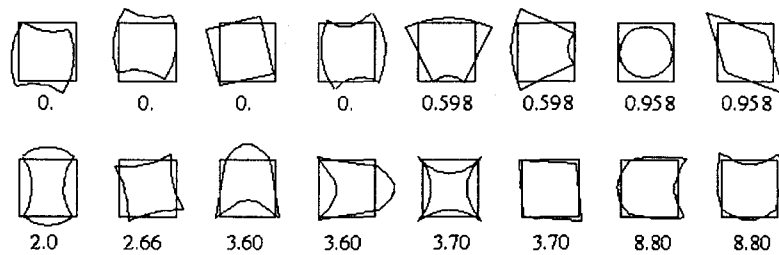


그림 1. LCM요소의 고유치해석결과

4.2 조각시험

그림 2에 보여지는 간단한 예제는 평면유한요소의 조각 시험을 위한 것이다. 보의 중심으로부터 'd' 값을 점진적으로 크게하여 요소를 변형시키고, 찌그러짐의 정도에 따른 요소의 반응을 각각의 'd'에 대한 변위와 응력 값을 비교함으로써 알 수 있다.

조각 시험의 통과 여부는 일반적인 여러 가지 해석 경우에서의 요소의 수렴 가능성을 나타낸다. 표1에 본 연구에서 제안한 LCM요소의 해석결과와 Q9의 해석결과를 나타내었다. 해석결과를 보면 Q9의 경우 정상적 분하였을 때에는 d의 변화에 해석결과가 거의 차이를 나타내지 않고 있으나, 감차적분하였을 때에는 해석결과가 많은 차이를 나타냄을 알 수 있다. 이에 비하여 LCM요소는 요소의 형상에 관계없이 조각 시험을 통과함을 알 수 있다.

4.3 압축력을 받는 캔틸레버 구조물

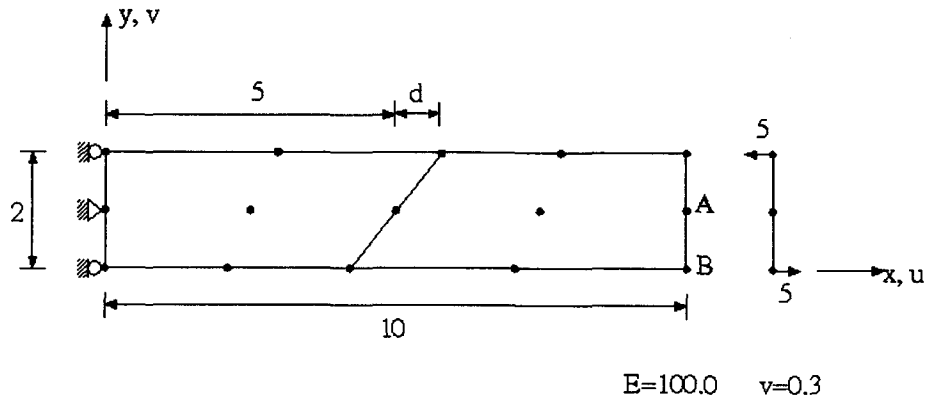


그림 2. 조각시험을 위한 해석예

표 1. 조각시험의 해석결과

d	Element Name	Displacement(x 10 ⁴)		
		v _A	u _B	v _B
0	Q8 (Normal)	0.750	0.150	0.752
	Q8(Reduced)	0.750	0.150	0.752
	Q9 (Normal)	0.750	0.150	0.752
	Q9(Reduced)	0.750	1.342	0.722
	LCM	0.750	0.150	0.752
1	Q8 (Normal)	0.745	0.149	0.746
	Q8(Reduced)	0.750	0.150	0.751
	Q9 (Normal)	0.750	0.150	0.752
	Q9(Reduced)	0.963	1.002	0.823
	LCM	0.750	0.150	0.751
2	Q8 (Normal)	0.667	0.133	0.664
	Q8(Reduced)	0.750	0.150	0.747
	Q9 (Normal)	0.750	0.150	0.752
	Q9(Reduced)	0.995	0.640	-0.240
	LCM	0.750	0.150	0.747
이 론 해		0.750	0.150	0.752

가영에너지의 발생이 해석결과에 심각한 오차를 발생시키는 것을 검토해 보기 위하여 그림3과 같이 압축 하중을 받는 캔틸레버 구조물을 해석하였다. 캔틸레버 구조물은 높이 2m에 길이를 6m, 12m, 24m의 3가지 경우이며, 요소의 수는 각각 2x6 mesh, 2x12 mesh, 2x24 mesh로 모델링하였다. 그리고 요소의 형상은 정사각형으로 하여 해석을 수행하여 해석결과를 표2에 나타내었다.

표2의 해석결과는 압축력 P의 작용점에서 발생하는 국부변위값(Δ_2)으로서 해석결과 얻어진 총변위값(Δ_T)에서 등분포하중에 의한 수직변위값($\Delta_1 = \frac{PL}{EA}$)을 뺀값을 나타내고 있다. 저에너지모드가 활성화된 요소일 수록 국부변위값의 크기가 큼을 알 수 있으며, 특히 감차적분된 Q9의 경우 국부변위값은 많은 오차를 보여 줌을 알 수 있다.

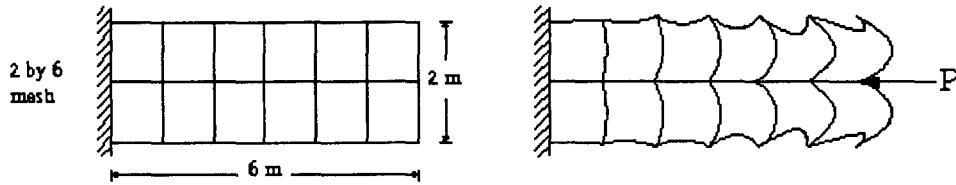


그림 3. 압축하중을 받는 캔틸레버 구조물

표2. 압축하중을 받는 캔틸레버 구조물에서 하중작용점의 국부변위(Δ_2)

Element	L=6m	L=12m	L=24m
	2×6 mesh ($\Delta_1=12.5$)	2×12 mesh ($\Delta_1=25.0$)	2×24 mesh ($\Delta_1=50.0$)
Q8(Normal)	4.297	4.297	4.297
Q8(Reduced)	4.528	4.528	4.528
Q9(Normal)	5.287	5.287	5.287
Q9(Reduced)	484.9	3665.4	28920.0
e-method	83.68	85.32	85.37
β -method	83.63	85.26	85.31
e, β -method	51.94	52.42	52.42
LCM	83.69	85.32	85.36

4.4 수직하중을 받는 캔틸레버 구조물

앞에서 언급한 바와 같이 요소의 형상이 직사각형일 경우에는 Q8과 Q9 모두 적분차수에 관계없이 비교적 정확한 해석결과를 주는 것으로 알려져 있다. 그러나 요소의 형상이 찌그러지는 경우에는 해석결과의 정확성이 크게 떨어진다. 이를 검토해 보기 위하여 그림 4와 같이 세 가지 형태의 요소형상으로 모델링한 캔틸레버 구조물에 대한 해석을 수행하고, A점에서의 수직변위(v_A)와 B점에서의 응력(σ_B)을 정해와 비교하였다. 이 예제에서 주목해야 할 점은 요소의 형상이 그림 4의 (b), (c)와 같이 찌그러진 경우나 한쪽 면이 곡면으로 된 경우의 결과들이다.

그림 4(b)에서 C, D 점은 지지단으로부터 각각 캔틸레버 길이의 1/4, 3/4씩 떨어져있으며, (c)에서 E는 보 중앙으로부터 지지단 쪽으로 전체 보 길이의 1/20 만큼 이동한 점이다. 그리고 B점은 감차적분점의 위치를 나타내고 있다.

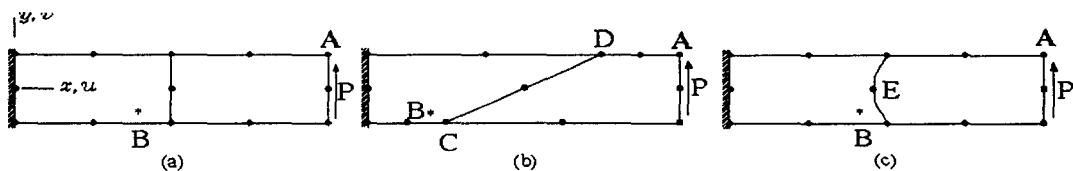


그림 4. 수직하중을 받는 캔틸레버 구조물(Aspect ratio=1/10, E=10000000, $\nu=0.3$, P=100)

표3. 수직하중을 받는 캔틸레버 구조물의 해석결과

Element Name	Case (a)		Case (b)		Case (c)	
	v_A	σ_B	v_A	σ_B	v_A	σ_B
Q8(Normal)	37.21	229.12	6.45	12.3*	8.84	10.9*
Q8(Reduced)	38.71	209.81	14.49	12.67	17.19	-10.36
Q9(Normal)	38.16	238.68	31.65	171.2*	29.48	154.4*
Q9(Reduced)	40.24	209.81	43.00	264.23	38.21	210.83
e, β method	40.24	209.77	37.92	211.9	37.83	203.34
LCM	40.22	209.81	37.72	200.09	37.77	204.61
이론해	40	209.8	40	259.8	40	218.9

캔틸레버 구조물의 해석결과는 표3에 나타내었다. 표3에서 찌그러지거나 한 면이 곡선으로 된 요소의 해석 결과인 Case (b), (c)의 경우, Q8을 이용한 해석 결과는 적분차수에 관계없이 이론해와 많은 차이를 보임을 알 수 있다. 이에 비하여 Q9와 본 연구에서 제시한 LCM요소의 해석결과는 요소의 형상에 관계없이 비교적 정확한 해석결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 평면유한요소의 개선을 위해 8절점요소에 Bubble-mode Function을 추가하였으며, 가영에너지모드를 제어하기 위해서 수정적분방법을 적용하였다. 즉 Bubble-mode Function 만으로 구성되는 부강성행렬(Sub-stiffness Matrix)의 계산시 감차적분과 정상적분을 각각 적용한 후 이를 선형조합하였다. 본 연구에서 제안한 평면유한요소 LCM은 대표적인 수치해석작업을 통하여 다음과 같은 특징을 가짐을 알 수 있었다.

- (1) 요소의 고유치해석결과 3개의 영에너지모드 외에 1개의 영에너지모드가 추가로 발생하지만 이 모드는 해석결과에 문제점을 발생시키지 않는다.
- (2) 감차적분을 적용한 9절점 요소(Q9)는 가영에너지모드의 발생으로 해석결과에 많은 오차를 발생시킴을 확인하였다.
- (3) 8절점 요소가 가지는 큰 단점인 다양한 요소 형상에의 제한을 LCM요소를 사용함으로써 극복할 수 있다.
- (3) LCM요소의 해석결과는 요소의 형상변화에 가장 안정된 요소로 알려지고 있는 Q9(Reduced)보다 해석의 결과들이 우수하였다.

참고문헌

1. Bäcklund, J., "On isoparametric elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp.731-732, 1970.
2. J. A. Stricklin, Ho, W.S., Richardson, E. Q., and Haisler, W.E., "On isoparametric vs. linear strain triangular elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 1041-1043,

1977.

3. Cook, W.A., "The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements," *Nuclear Engineering and Design*, Vol.70, pp.13-26, 1982.
4. Cook, R.D. and Feng, Z.H., "Control of spurious modes in the nine node quadrilateral element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp.1576-1580, 1982.
5. Verhegghe, B., "Control of zero-energy modes in 9-node plane element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 863-869, 1986.
6. Ibrahimbegovic, A., Taylor, R.L., and Wilson, E.L., "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, pp.445-457, 1990.
7. Hughes, T.J.R., Cohen, M. and Haroun, M., "Reduced and selective integration in the finite element analysis of plates," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 46, pp.203-223, 1978.
8. Belytschko, T., Liu, W.K. and Ong, J.S.-J., "A consistent control of spurious singular modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin plate equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 44, pp.269-295, 1984.
9. Cook, R.D., "More on reduced integration and isoparametric elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, pp.141-142, 1972.
10. Bicanic, N. and Hinton, E., "Spurious modes in two-dimensional isoparametric elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp.1545-1557, 1979.
11. Choi, C.K., "Reduced integrated nonconforming plate element," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.112, pp370-385, 1986.
12. Lee, J.Y., "Generalized formulation of shell finite elements based on a new method of element decomposition," *Proceedings of the US-Korea Joint Seminar/Workshop on Critical Engineering System*, May 11-15, Seoul, 1987.