한국전산구조공학회
2001년도 봄 학술발표회 논문집

프리스트레스트 콘크리트 박스 거더 교량의 Spline 유한대판 쉘 해석

Spline Finite Strip Shell Analysis of Prestressed Concrete Box-Girder Bridges

최 창 근* 김 경 호** 홍 현 석**
Choi, Chang-Koon Kim, Kyeong-Ho Hong, Hyun-Seok

ABSTRACT

Analysis of prestressed box-girder bridges using the spline finite strip method is presented. In the present study, the spline finite strip method(FSM) is modified using the non-periodic B-spline interpolation. In the analysis of the prestressed box girder bridges, each tendon force is evaluated by summation of the adjacent segment forces. Once the equivalent forces acting on the structure at the tendon points are found, they are transformed into statically equivalent forces at the adjacent node or joints. Several examples were analyzed to verify the performance of present method using the non-periodic B-spline FSM. Good agreements were obtained when compared with the previous study.

1. 서 론

Spline 유한대판법은 프리스트레스트 콘크리트 교량과 같이 종 방향(교축방향)이 횡 방향(교축직각방향)에 비하여 상대적으로 길고 종 방향을 따라 재료성질과 기하학적 성질이 일정한 경우에는 종방향을 하나의 스트립(strip)만으로 모델링하기 때문에 상당히 효과적이다. Spline 유한대판법은 종방향으로 B3-spline 함수를 사용하여 내부 변위들을 보간(Interpolation)하기 때문에 종방향으로 연속적인 해를 얻을 수 있다[1]. 또한, 비주기 B3-spline 함수를 사용하면 경계조건에서 Kronecker delta 성질을 만족시킬 뿐만 아니라 지점부의 응력 불연속을 표현하는데 있어 매우 유리하다[2,3,4].

한편, 프리스트레스트 콘크리트 박스 거더는 교량의 지간을 늘리거나 교량의 거동을 조정하고 또한 자중을 최소화한 교량 구조를 위하여 예전부터 널리 사용되어왔다. 기존의 프리스트레스트 콘크리트 박스 거더에 대한 3 차원 해석은 주로 고전적인 유한대판법과 유한요소법에 의한 연구 등이 수행되었다[5,6]. 본 논문에서는 비주기 B3-spline 을 사용한 등매개 유한 대판법으로 단기 손실을 고려한 프리스트레스트 박스 거더 교량을 해석하는 방법을 제시하였고 해석예제를 통하여 그 방법의 정확성에 대한 검증을 수행하였다.

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

2. 비주기 spline 유한대판법에 의한 쉘의 정식화

본 연구에서는 비주기 B-spline 유한대판법의 쉘 요소를 이용하여 프리스트레스트 콘크리트 박스 거더 교량의 해석 방법을 제안하였다. 여기서 사용된 쉘 요소는 스트립의 각 내부절점에서 전체좌표계로 표현되는 3 개의 직선변위와 3 개의 회전변위를 쉘 중립면의 변위 매개변수로 사용한다.

이 방법에서 스트립의 변위 함수는 횡방향 Lagrange 형상함수와 종방향 spline 함수로 표현된다.

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} N_{ij}(\xi,\eta)\boldsymbol{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} L_j(\xi)\phi_i(\eta)\boldsymbol{a}_{ij} \tag{1}$$

여기서, 종방향 spline 함수ϕ_i는 경계조건, 즉 교량의 지점부에서 변위의 Kronecker delta 성질을 만족하는 비주기 B3-spline 함수를 사용한다(그림 1). 이 함수를 사용하면 지점부의 응력 산정에 있어 매우 우수한 결과를 얻을 수 있다[2,3].

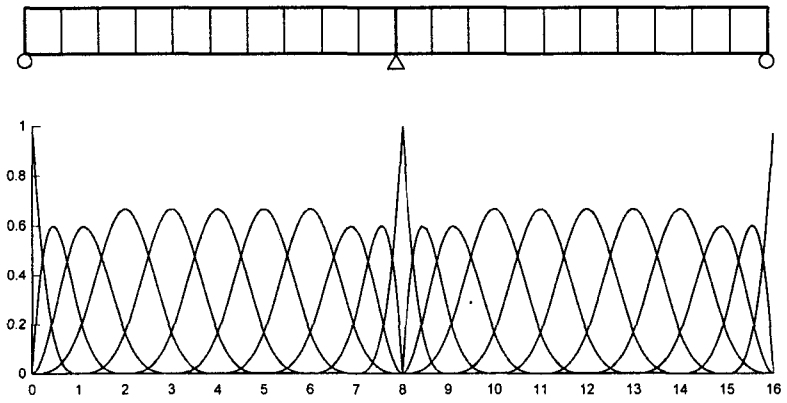


그림 1. 2 경간 교량과 비주기 B3-spline series

본 연구에서 사용된 응력-합성 쉘의 변형률-변위 관계식은 다음과 같다[2,3].

$$\varepsilon_m = \begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_s\\ \varepsilon_{rs}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}u_{r,r}\\ u_{s,s}\\ u_{r,s}+u_{s,r}\end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{a}, \varepsilon_b = \begin{Bmatrix}\kappa_r\\ \kappa_s\\ \kappa_{rs}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\theta_{s,r}\\ -\theta_{r,s}\\ \theta_{s,s}-\theta_{r,r}\end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{a},\ \varepsilon_s = \begin{Bmatrix}\gamma_{rt}\\ \gamma_{st}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}u_{t,r}+\theta_s\\ u_{t,s}-\theta_r\end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{a} \tag{2}$$

여기서,

$$\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{a}_{1j}, \boldsymbol{a}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{a}_{nj}\right), \qquad \boldsymbol{a}_{ij} = \left(\hat{\boldsymbol{u}}_{ij}, \hat{\theta}_{ij}\right)_g \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}_m = \begin{bmatrix} N_{ij,r}\boldsymbol{V}_r^T & \boldsymbol{0}\\ N_{ij,s}\boldsymbol{V}_s^T & \boldsymbol{0}\\ N_{ij,r}\boldsymbol{V}_s^T + N_{ij,s}\boldsymbol{V}_r^T & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_b = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & N_{ij,r}\boldsymbol{V}_s^T\\ \boldsymbol{0} & -N_{ij,s}\boldsymbol{V}_r^T\\ \boldsymbol{0} & N_{ij,s}\boldsymbol{V}_s^T - N_{ij,r}\boldsymbol{V}_r^T\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} N_{ij,r}\boldsymbol{V}_t^T & N_{ij}\boldsymbol{V}_s^T\\ N_{ij,s}\boldsymbol{V}_t^T & -N_{ij}\boldsymbol{V}_r^T\end{bmatrix} \tag{4}$$

또한, 연속체 역학에서의 회전 자유도를 penalty 함수 방법의 구속 조건으로 사용하여, 중립면의 면

내 회전과 관련된 회전 자유도(Drilling DOF)를 정의하였다. 회전 자유도에 관계된 변형률과 변형률 행렬은 식(5)와 같다.

$$\varepsilon_\theta = \theta_t - 1/2(u_{s,r} - u_{r,s}) = \boldsymbol{B}_\theta \boldsymbol{a}\,, \qquad \boldsymbol{B}_\theta = \left[\frac{1}{2}\left(N_{ij,s}\boldsymbol{V}_r^T - N_{ij,r}\boldsymbol{V}_s^T\right) \;\; N_{ij}\boldsymbol{V}_t^T\right] \tag{5}$$

여기서, $\boldsymbol{V}_r$, $\boldsymbol{V}_s$, $\boldsymbol{V}_t$ 는 국부 좌표계 (r,s,t)축과 평행한 직교 단위 벡터이고 $\boldsymbol{a}_{ij}$는 변위 매개변수이다. 본 연구에서 사용된 쉘의 강성 행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_m + \boldsymbol{K}_b + \boldsymbol{K}_s + \boldsymbol{K}_\theta = \int \boldsymbol{B}_m^T \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_m dA + \int \boldsymbol{B}_b^T \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{B}_b dA + \int \boldsymbol{B}_s^T \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{B}_s dA + \Phi G h \int \boldsymbol{B}_\theta^T \boldsymbol{B}_\theta dA \tag{6}$$

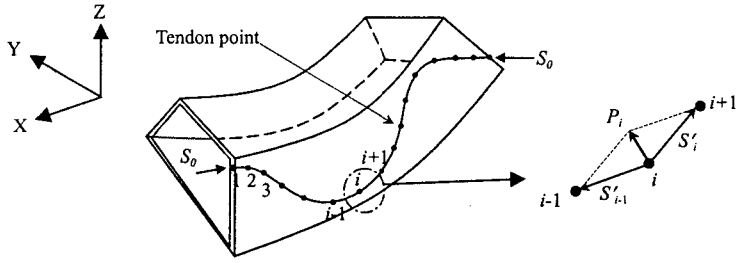
여기서, Φ는 페널티 상수로 수치 해석 등을 통해 1.0 을 채택하였다.

3. 프리스트레싱 하중

3.1 텐던의 분할

본 연구에서는 텐던에 작용하는 프리스트레싱력을 스트립의 절선상에 작용하는 하중으로 치환하는 방식을 적용하였다. 텐던의 형상은 교량의 길이를 따라서 직접 텐던의 좌표를 입력하는 직접 입력 방식과 실제의 텐던 형상이 포물선이나 직선의 형태를 나타내고 있는 점을 이용한 변수 입력 방식의 두 가지 방법을 사용하여 구체화 할 수 있다.

일반적인 텐던 형상을 나타내기 위하여, 텐던은 그림 2 에서와 같이 각 텐던점(Tendon point)에서 교차하는 미소한 선형 분절로 나뉘어질 수 있다. 각 텐던은 n 개의 텐던점에 의해 정의되는 n-1 개의 직선 분절로 나누어진다. 일단 텐던점에서 구조물에 작용하는 등가력이 구해지면, 이들 힘은 인접하는 절점에 등가의 힘이나 모멘트로 변환되어진다.



(a) 텐던의 분할 (b) 텐던점에서의 등가 하중

그림 2. 텐던의 분할과 등가 절점하중

3.2 단기 프리스트레스 손실

본 논문에서는 긴장 작업시의 덕트와 텐던간의 마찰에 의한 손실과 PC 강재를 정착 장치로 정착할 때 정착 장치에서 PC 강재가 활동하거나 정착장치가 변형하여 인장력이 감소하는 정착 장치의 활동에 의한 손실 등을 고려하였다. 이러한 손실들은 텐던력의 단기적인 손실(Short term losses)로서 텐던의 길이 방향을 따라서 텐던력의 변화를 유발한다. 시스템에 따라서는 이러한 두 가지의 손실이 거동에 크

게 영향을 미칠 수 있다.

3.3 유효 텐던력에 의한 스트립 등가 하중의 산정

각 텐던점에서 유효 프리스트레스력 S_i^e를 구하여 그 힘을 텐던의 형상에 따라 S'_{i-1}과 S'_i로 분해하고 이 값들의 평균력을 각 텐던점에서 구하면 스트립에 작용하는 등가 하중을 산정할 수 있다.

먼저, 텐던점 i로부터 i-1 까지와 i+1 까지의 벡터를 각각 V_{i-1}, V_i라 정의하면,

$$V_{i-1}=\begin{Bmatrix} X_{i-1}-X_i \\ Y_{i-1}-Y_i \\ Z_{i-1}-Z_i \end{Bmatrix}, \quad V_i=\begin{Bmatrix} X_{i+1}-X_i \\ Y_{i+1}-Y_i \\ Z_{i+1}-Z_i \end{Bmatrix} \tag{7}$$

따라서 방향 여현(direction cosine)은 다음과 같다.

$$\overline{V}_{i-1}=\frac{V_{i-1}}{|V_{i-1}|}, \quad \overline{V}_i=\frac{V_i}{|V_i|} \tag{8}$$

그림 2 의 텐던력 벡터 S'_{i-1}, S'_i와 등가 하중 벡터 P_i는 다음과 같이 구해진다.

$$S'_{i-1}=S^e_{i-1}\overline{V}_{i-1}, \quad S'_i=S^e_i\overline{V}_i \tag{9}$$

$$P_i=S'_{i-1}+S'_i \tag{10}$$

각 텐던점에서의 등가 하중이 구해지면, 이 힘은 그림 3 과 같이 형상 함수에 따라서 인접하는 스트립 절선에 작용하는 하중으로 치환된다.

$$F_{1i}=\frac{L_2}{L}P_i, \quad F_{2i}=\frac{L_1}{L}P_i \tag{11}$$

여기서 L_1, L_2는 각각 텐던점으로부터 절선 1 과 2 까지의 거리를 나타낸다.

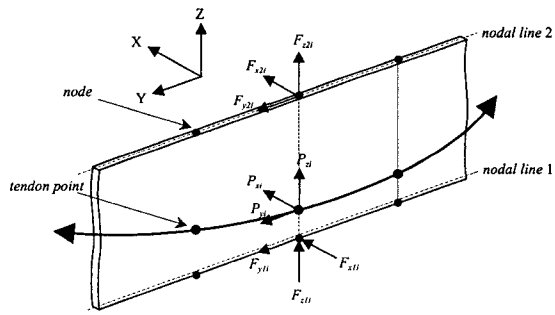
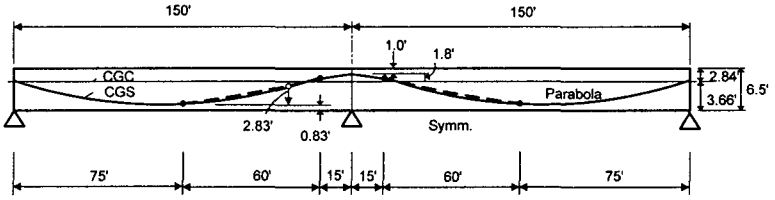


그림 3. 텐던점의 등가하중을 스트립의 절선 하중으로 변환

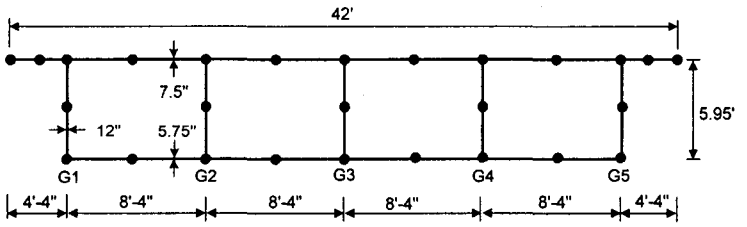
4. 수치 해석 예제

4.1 2 경간 4 실 박스 거더 교량

이 예제는 2 경간 직선 프리스트레스트 콘크리트 박스 거더 교량의 해석에 관한 것으로, 단면은 수직 웨브를 가진 4 실 박스형이고 경간 길이는 2@150'이다. 3 군데의 지점부에는 다이아프램이 설치되어 있고 종방향으로 웨브당 유효 프리스트레싱 1580.0Kips 이 작용한다. 그림 4 에는 해석 교량의 텐던 형상 및 단면의 제원과 모델링 등을 나타내었다. 해석에 사용된 모델의 스트립 수는 30 개이고 종 방향으로 21 개의 내부절점을 사용하였으며 재료 성질은 콘크리트의 탄성계수는 3600ksi 이고 프와송비는 0.15 이다.



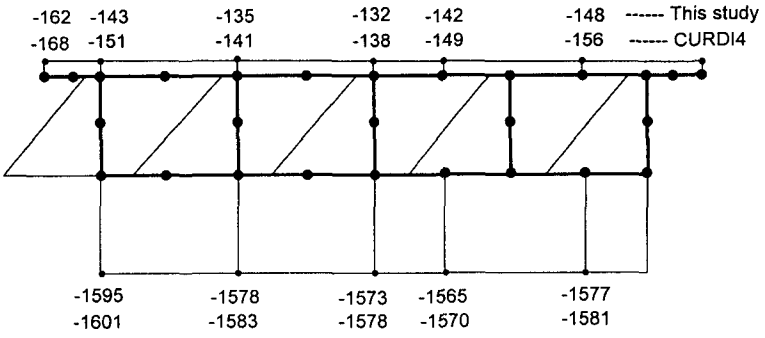
(a) 교량 종방향 제원 및 텐던의 형상



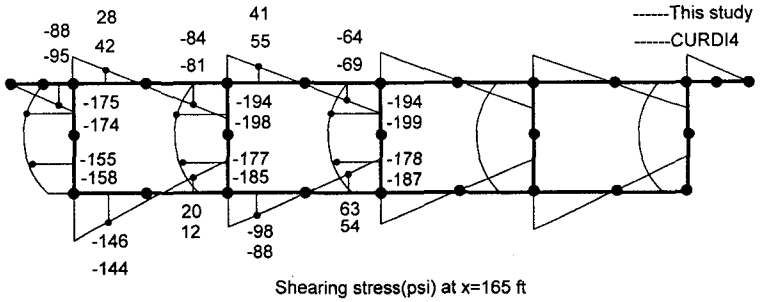
(b) 단면 제원 및 해석 모델

그림 4. 2 경간 4 실 박스 거더 교량의 텐던의 형상 및 단면 제원

본 연구에 의한 해석 결과의 검증을 위하여 고전적 유한대판 해석 프로그램인 CURDI4[5]와 비교하였다. 그림 5(a)와 (b)는 각각 x=225ft 및 x=165ft 에서의 거더(G1)의 종방향 면내응력과 면내전단응력을 나타내었으며 CURDI4 의 결과와 매우 잘 일치하는 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.



(a) 면내방향 응력(x=255ft)



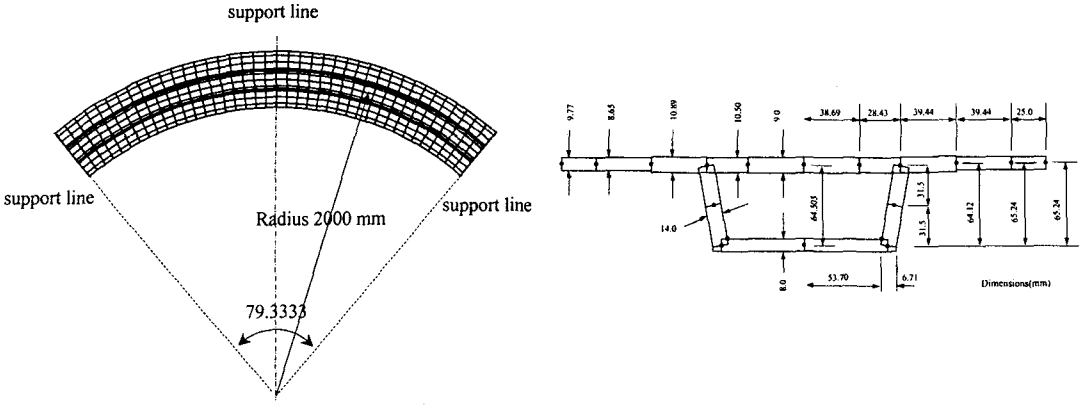
(b) 면내전단응력(x=165ft)

그림 5.2 경간 4 실 박스 거더 교량의 해석 결과

4.2 Hood 의 2 경간 곡선 박스교

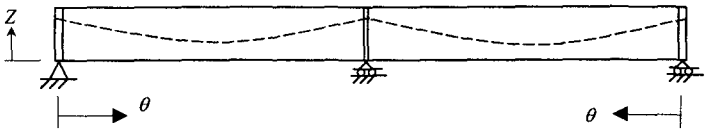
이 예제는 Hood 에 의해 실험되고 Scordelis 등(1985)에 의해 CURDI4 로 해석이 이루어진 2 경간 프리스트레스트 곡선 박스 거더 교량이다. 이 모델은 직선 플렉스 유리 분절을 함께 접합하여 구성된 것으로 중심 반경이 2000mm 인 매우 작은 곡선 교량의 시험 모델이다(그림 6). 이 모델의 양단과 중앙은 다이아프램으로 지지되어 있고 중앙부에서 2 개의 동일 지간으로 나누어져 있다. 단면의 모양은 경사 웨브를 가지는 1 실 박스 형태로 2 개의 프리스트레싱 텐던이 그림 7 과 같이 부분 포물선 형태를 가지며 2224 N 의 긴장력으로 양단 긴장되고 프리스트레싱 손실은 μ=0.08 인 곡률 마찰을 고려하였다. 재료 특성은 등방성으로 가정하였으며 콘크리트 탄성계수는 6536Mpa 이고 프와송 비는 0.321 이다.

첫번 째 지간 중앙부의 면내응력에 대한 해석 결과가 그림 8 에 나타나 있는데 CURDI4 의 결과와 잘 일치하고 있다. 또한 그림 10 에서는 내측 웨브 상단부에서 종방향으로 처짐을 비교하였으며 CURDI4 의 결과와 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.



(a) 평면 형상 및 모델링 (b) 단면의 해석 모델

그림 6. Hood 의 2 경간 연속, 곡선 프리스트레스트 박스 모델



θ(°)	0°50′	2°50′	4°50′	6°50′	8°50′	10°50′	12°50′	14°50′	16°50′	18°50′
Z(mm)	40.04	33.69	28.12	23.37	19.43	16.29	13.95	12.44	11.73	11.82
θ(°)	20°50′	22°50′	24°50′	26°50′	28°50′	30°50′	32°50′	34°50′	36°50′	38°50′
Z(mm)	12.72	14.43	16.96	20.28	24.44	29.38	35.14	41.70	47.81	50.72

그림 7. 텐던의 형상

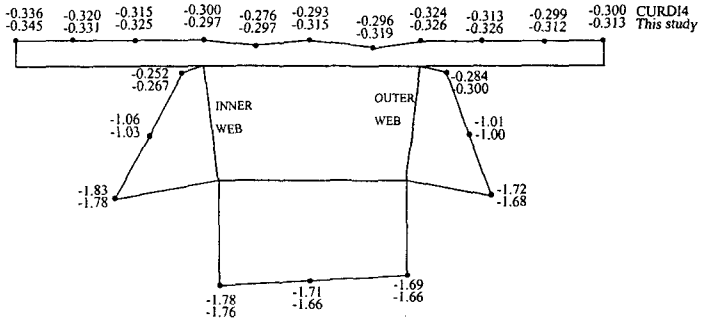


그림 8. 첫 번째 경간 중앙부에서의 종방향 면내 응력

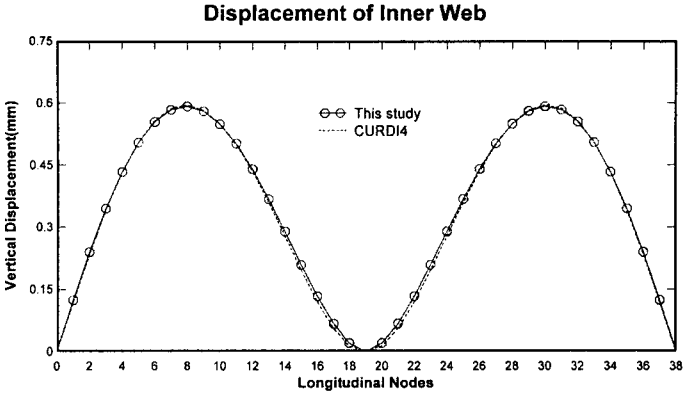


그림 9. 내측 웨브 상단부의 종방향 수직 처짐

5. 결 론

본 연구에서는 비주기 B3-spline을 사용한 유한대판법을 다경간 프리스트레스트 박스 거더 교량의 해석에 성공적으로 적용하였다. 본 연구에서 사용된 데이터 입력방식이나 해석 과정은 유한 요소법에 비하여 상당히 간편하고 편리하다. Spline 유한대판법에서는 텐던점이 스트립 내에서 쉽게 정의되고 텐던력이 절점 라인의 등가 하중으로 쉽게 변환된다. 또한, 직선 및 곡선의 다경간 프리스트레스트 박스 거더 교량을 해석함에 있어서 비주기 B3-spline 유한대판법에 의한 해석 결과는 매우 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

참고 문헌

1. Au, F.T.K and Cheung, Y.K., "Static and Free Vibration Analysis of Variable-depth Bridges of Arbitrary Alignments Using the Isoparametric Spline Finite Strip Method" , *Thin-Walled Structures*, Vol. 24, 1996,pp.19-51.
2. 최창근,홍현석, "비주기 B-spline 유한대판법(I) : 5/6 자유도의 쉘", 대한토목학회 논문집, 제 20 권 제 3-A 호, 2000, pp.447-459
3. 최창근,홍현석, "비주기 B-spline 유한대판법(II) : 곡선 박스 거더 교량의 해석", 대한토목학회 논문집, 제 20 권 제 3-A 호, 2000, pp. 461-471
4. 최창근,홍현석, "spline 유한대판법을 이용한 다경간 박스 거더 교량의 해석", 대한토목학회 학술발표회(1), 2000, pp. 23~26.
5. Scordelis, A.C., Chen, E.C., Ketchum, M.A.and Van der Walt, P, *Computer programs for prestressed concrete box girder bridges,* Department of Civil Engineering, UCB/SESM-85/03, U.C, Berkeley, CA,1985
6. Abdullah, M.A. and Abdul-Razzak, A.A., Finite strip analysis of prestressed box-girders, *Computers and Structures*, Vol. 36, No. 5, 1990, pp. 817-822