

부분구조모델을 이용한 건축물의 국부진동해석에서의 오차원인 분석

Error Estimate of Local Vibration for Building Structures Using Substructure Models

안 상 경* 이 현 수** 이 동 근***
Ahn, Sang-Kyoung Lee, Hyun-Soo Lee, Dong-Guen

ABSTRACT

Analysis of a structure for vertical vibration requires a lot of computational efforts because large number of degrees of freedom are generally involved in the dynamic response. Especially, when a structure is loaded with local vibration source, it may not be economical to model the whole structure to obtain the responses of specific members located near or far from the sources. In this study, substructure models have been used for analysis of local vibration. An analysis of local vibration is performed for the case that the loaded point and the response point are located on the same floor. Other analysis is performed for the case that the loaded point and the response point are located on the different floor. In this case, if only the floors on which loaded and response points are located are modeled, response of substructure model is very different from that of full model. So, there should be a consideration that degrees of freedom of floors in addition to those of loaded and response floors are included to improve results of dynamic analysis. In this study, floors between loaded floor and response floor were modeled so that modeshapes which affect the response are presented well.

1. 서론

건축구조물의 안전성 및 사용성은 주로 구조물에 가해지는 진동하중에 의하여 결정된다. 진동하중은 작용하는 방향에 따라서 크게 연직진동하중과 수평진동하중으로 분류할 수 있다. 그러므로 진동하중의 특성에 따라서 구조물의 동적해석시 고려해야 할 사항들이 차이를 가지게 된다. 특히 연직진동해석의 경우에는 응답에 영향을 주는 주요 진동모드들이 고차의 진동모드이기 때문에 많은 수의 진동모드를 고려하여야 하고 이를 위해서는 많은 수의 요소분할이 필요하다. 이러한 요소분할에 의하여 계산에 필요한 메모리 요구량이 증가되고 해석시간 또한 기하급수적으로 증가하게 되는 문제점이 발생하게 된다.

이러한 문제 때문에 연직진동해석시에는 구조물 전체를 모형화 하지 않고 구조물의 일부만을 모형화하여 동적해석을 수행하는 것이 일반적이다. 그러나 이러한 모형화 방법은 때에 따라서 많은 오차를 유발하게 된다. 그러므로 부분구조모델을 사용할 때 발생하는 오차의 원인에 대한 분석이 필요하리라 판단된다.

* 정회원 · 성균관대학교 건축공학과 박사후과정
** 학생회원 · 성균관대학교 건축공학과 석사과정
*** 정회원 · 성균관대학교 건축공학과 교수

본 논문에서는 구조물의 일부분만을 모형화하여 해석할 때 발생하는 오차의 원인에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 부분구조모델의 경계조건은 행렬응축기법을 이용하여 결정하였으며, 가진점과 수진점이 동일한 층에 위치하는 경우와 각각 다른 층에 위치한 경우에 대하여 정상상태의 응답을 이용하여 오차의 원인을 분석하였다.

2. 정상상태의 응답분석

건축구조물에 기계하중과 같은 주기적인 동적하중이 가해질 경우 구조물의 동적거동양상은 초기에는 천이상태의 응답을 보이며 일정시간이 지난 후부터는 정상상태의 응답을 보인다. 일반적으로 천이상태의 응답은 구조물과 하중의 초기조건에 의해 결정되며 동적하중이 가해지기 시작한 후부터 짧은 시간동안만 지속된다. 정상상태 영역으로 들어선 후부터는 구조물의 거동양상은 가진하중의 진동수에 의해 좌우되며 동적응답은 주로 이러한 정상상태의 응답이 좌우한다. 따라서 본 논문에서는 정상상태의 응답을 주 분석대상으로 삼고, 정상상태의 응답을 간단히 얻을 수 있는 해석방법을 이용하였다. 해석에 이용될 수식의 유도과정은 다음과 같다.

구조물의 동적평형방정식은 식(1)과 같고, 조화하중 \mathbf{A} 는 식(2) 및 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{S}\mathbf{D} = \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cos \Omega t \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \quad (3)$$

식(1)을 일반화된 진동모드(normal mode)로 정규화(normalizing)시키면 식(4)와 같이 표현된다. 식(4)는 각 n 개의 진동모드에 대하여 독립적이므로 해는 단자유도계에서의 해와 같아진다.

$$\ddot{D}_{Ni} + 2n\dot{D}_{Ni} + \omega_i^2 D_{Ni} = A_{Ni} \cos \Omega t \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

A_{Ni} 는 정규화된 좌표계에서의 i 번째 진동모드형상 Φ_{Ni} 로 나타낼 수 있다.

$$A_{Ni} = \Phi_{Ni}^T \mathbf{P} \quad (5)$$

식(4)의 해는 식(6)과 같으며 이는 정규화된 좌표계에서의 i 번째 진동모드의 응답이다.

$$D_{Ni} = A_{Ni} \beta_i \cos(\Omega t - \theta_i) \quad (6)$$

여기서 β_i , θ_i 는 각각 식(7) 및 식(8)과 같다.

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{[\omega_i^2 - \Omega^2]^2 + (2\gamma_i \Omega \omega_i)^2}}, \quad \theta_i = \tan^{-1} \left[\frac{2\gamma_i \Omega / \omega_i}{1 - (\Omega / \omega_i)^2} \right] \quad (7), (8)$$

실제 좌표계에서 i 번째 진동모드의 응답은 다음의 식(9)의 관계를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\mathbf{D}_i = \Phi_{Ni} D_{Ni} \quad (9)$$

만일 하중이 특정한 자유도 k 에 작용한다면 하중 \mathbf{A} 는 식(10)과 같고, k 자유도에 가해진 하중에 의한 i 번째 진동모드의 응답 중에서 j 자유도에만 해당되는 응답은 식(11)과 같이 간략히 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A} = \{0, 0, \dots, P_k \cos \Omega t, \dots, 0\} \quad (10)$$

$$(D_{jk})_i(t) = \Phi_{Nji} \Phi_{Nki} \beta_i P_k \cos(\Omega t - \theta_i) \quad (11)$$

n 개의 자유도를 가지는 구조물에서의 응답은 1차에서 n 차 진동모드까지의 각 진동모드별 응답을 모두 더한 값이므로 다음의 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$D_{jk}(t) = \sum_{i=1}^n A_{jki} \cos(\Omega t - \theta_i) \quad (12)$$

$$A_{jki} = \Phi_{Nji} \Phi_{Nki} \beta_i P_k \quad (13)$$

식(12)를 이용하면 구조물에 조화하중이 가진되었을 경우의 정상상태 응답을 간단하게 확인할 수 있다. 특히 고유치해석을 수행한 결과 데이터를 이용하면 다양한 하중에 대하여 반복적으로 응답을 구할 수 있게 된다. 식(12)를 벡터합성법을 이용하여 다시 나타내면 식(14)와 같이 좀 더 간단한 방법으로 응답을 구할 수 있게 된다.

$$D_{jk}(t) = \alpha_{jk} \cos(\Omega t - \theta_{jk}) \quad (14)$$

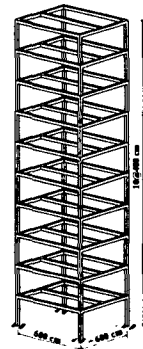
$$\alpha_{jk} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n A_{jki} \sin \theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_{jki} \cos \theta_i\right)^2}, \quad \theta_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n A_{jki} \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n A_{jki} \cos \theta_i} \quad (15), (16)$$

이상의 수식을 살펴보면 응답에 영향을 주는 변수들을 몇 가지로 나누어볼 수 있다. 첫 번째 변수는 β_i 로서 식(7)에서 알 수 있듯이 하중의 진동수와 구조물의 고유진동수와의 관계에 의하여 결정되는 일종의 동적 증폭계수의 역할을 한다. 두 번째 변수는 θ_i 로서 이는 식(8)에서 보듯이 하중의 진동수, 구조물의 고유진동수 그리고 감쇠비와의 관계에 의하여 결정되는 위상각이다. 세 번째 변수는 $\Phi_{Nji} \Phi_{Nki}$ 로서 이는 가진자유도와 응답자유도의 진동모드형상의 곱이다. 이를 이용하면 진동모드형상의 위상변화와 각 진동모드의 응답기여정도를 쉽게 확인할 수 있다. 이상의 3가지 변수를 조합하면 식(15)와 같이 모든 진동모드의 영향을 고려한 응답의 크기인 α_{jk} 를 구할 수 있다. 본 논문에서는 이상의 변수들을 이용하여 각 부분구조모델의 동적해석 결과를 비교분석 하였다.

3. 부분구조모델을 이용한 가진층의 해석

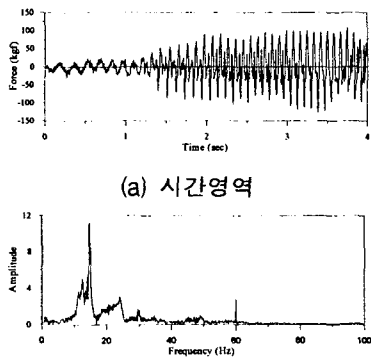
부분구조모델을 이용하여 가진층을 해석할 경우에는 해당 부분구조물의 경계조건이 해석결과에 중요한 영향을 준다. 기존의 연구결과¹⁾에 의하면 부분구조물의 경계조건을 고정지거나 단순지거나 설정할 경우에는 해석결과의 오차가 심하므로 본 논문에서는 비교적 오차가 적은 행렬응축에 의한 경계조건을 사용하였다.

먼저 행렬응축에 의한 부분구조물의 해석이 구조물 내부의 부분구조모델 위치와 무관하게 항상 유효한지 확인하기 위하여 부분구조모델의 위치에 따른 고유진동수의 변화양상을 검토하여 유효성을 검증하였다. 이를 위하여 그림 1과 같은 예제구조물을 이용하였고, 하중은 그림 2의 하중 데이터를 이용하여 해석을 수행하였다. 각 층별 부분구조모델에 대하여 그림 3과 같이 모델 M1~모델 M10의 주요 연직방향 진동모드의 고유진동수를 비교한 후, 각 부분구조모델의 점 L에 하중을 연직방향으로 가진하여 시간이력해석을 수행한 결과와 전체구조물인 모델 A의 각각의 층에 동일한 하중을 가진하여 얻은 응답을 비교하였다.

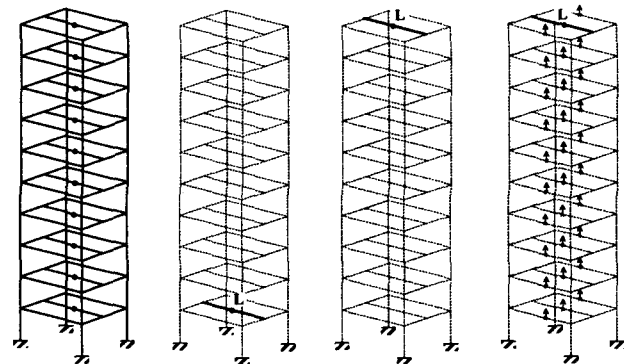


각 층별 부분구조모델의 주요 연직방향 고유진동수와 모델 A의 고유진동수는 표 1 그림 1 예제구조물

과 그림 4와 같다. 시간이력해석에 사용되는 하중의 탁월진동수가 모두 30Hz 이하이며 30Hz 이상의 진동수 성분은 거의 영향이 없을 것으로 판단되므로 각 구조물의 고유진동수도 30Hz 이하의 값들만 비교하였다. 또한 30Hz 이하의 고유진동수를 가지는 연직방향 진동모드들 중에서도 가진점의 진동이 거의 없는, 단순보의 2차 진동모드 형태의 진동모드는 가진점의 응답에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 판단되어 비교대상에서 제외시켜서 결국은 단순보의 1차 진동모드 형태와 유사한 형태의 진동모드만 비교하였다.



(a) 시간영역
(b) 진동수 영역
그림 2 하중데이터



(a) 모델 A (b) 모델 M1 (c) 모델 M10 (d) 모델 M10-1
그림 3 해석모델

그림 4에 의하면 구조물의 상부층일수록 부분구조모델의 진동수 오차가 심해지고 있음을 알 수 있다. 그러므로 예제구조물의 경우에는 대략 4층 바닥까지는 해당 층만을 부분구조물로 모형화하여도 그 층의 동적거동은 전체구조물과 비교하여 큰 오차가 없이 표현할 수 있을 것으로 판단되지만, 4층 바닥보다 상부에 위치한 층만을 부분구조물로 모형화할 경우에는 고유진동수 오차로 인하여 정확한 응답을 얻기가 힘들어질 것으로 판단된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 하중이 직접 가진되는 가진층뿐만 아니라 가진점의 응답에 영향을 미치는 진동모드형상들의 영향을 충분히 반영시킬 수 있도록 비가진층의 적절한 고려가 필요할 것이다.

표 1 부분구조모델의 위치에 따른 고유진동수 비교 (단위: Hz)

주요 진동 위치	전체구조물	부분구조물	
	고유진동수	고유진동수	모델명
2층 바닥	21.894	21.468	M1
3층 바닥	21.082	20.922	M2
4층 바닥	20.840	20.388	M3
5층 바닥	21.258	19.801	M4
6층 바닥	20.579	19.210	M5
7층 바닥	21.828	18.658	M6
8층 바닥	21.716	18.186	M7
9층 바닥	21.502	17.793	M8
10층 바닥	21.082	17.584	M9
지붕층	19.853	16.895	M10

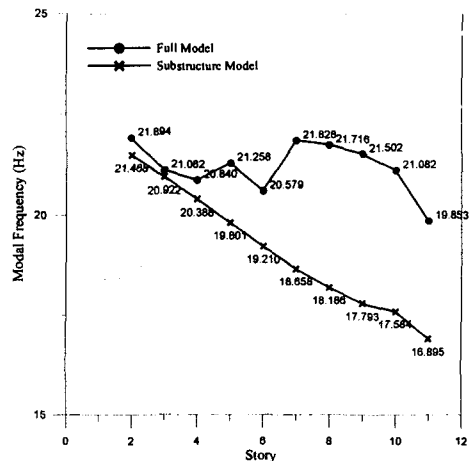
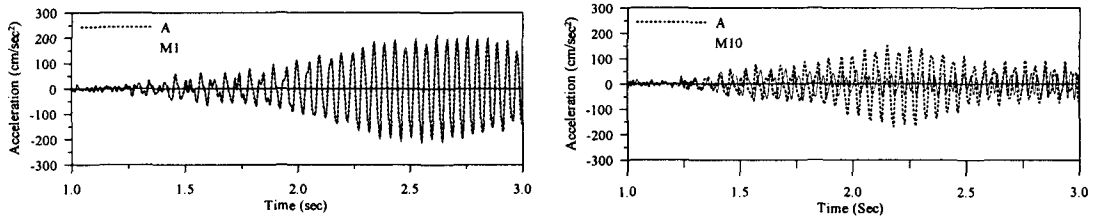


그림 4 부분구조모델의 고유진동수 변화

그림 5는 하부층과 상부층의 가속도 시간이력이다. 하부층 모델인 모델 M1은 매우 정확한 결과를 보이고 있지만 상부층 모델인 모델 M10은 오차가 매우 심하게 나타나며 이것은 주로 고유진동수의 차이에 의하여 발생하고 있다. 이러한 상부층의 부분구조모델에서 발생하는 오차를 보정하기 위한 방법으로 비가진층을 고려하는 모형화 방법을 생각할 수 있으며 그림 3(b)의 모델 M10을 수정하여 그림 3(d)와 같은 부분구조모델에 대하여 해석을 수행하였다.



(a) 모델 A와 모델 M1의 가속도 시간이력

(b) 모델 A와 모델 M10의 가속도 시간이력

그림 5 가속도 시간이력

모델 M10-1은 비가진층을 모형화하기 위하여 각 층에 위치한 보 중앙부의 연직방향 이동자유도를 고려한 모델이다. 이러한 방법으로 중간층의 자유도를 고려한 것은 가진층의 연직방향 응답에 기여할 것으로 판단되는 진동모드들의 영향을 표현할 수 있을 것으로 판단되기 때문이다. 그림 6에 의하면 모델 M10-1의 가진점에서의 가속도 응답은 매우 정확한 값을 보이고 있음을 알 수 있다. 즉 오차가 심하게 발생하는 상부층의 부분구조모델을 해석할 경우에는 비가진층에서 적절한 자유도를 고려함으로써 응답의 정확성을 향상시킬 수 있음을 알 수 있다.

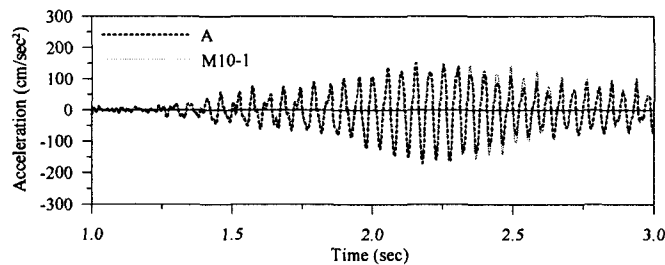


그림 6 점 L에서의 가속도 시간이력(모델 A, 모델 M10-1)

4. 부분구조모델을 이용한 비가진층의 해석

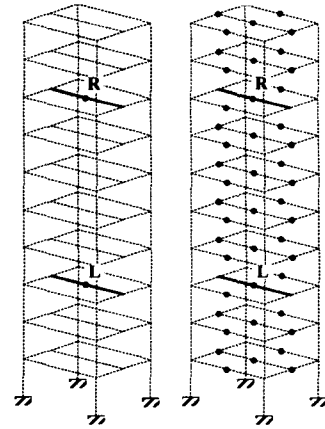
가진층과 수진층이 동일하지 않은 경우에 대하여 해석을 수행하기 위하여 그림 3(a)의 해석모델 A의 해석 결과를 정확한 값이라 가정하고 그림 7(a)와 같이 가진층과 수진층만을 모형화한 모델 M-1과 그림 7(b)와 같이 가진층과 수진층 이외의 중간층의 적절한 자유도를 고려한 모델 M-2의 해석결과를 비교하였다. 모델 M-2의 중간층에 추가된 자유도는 구조물의 진동모드형상을 분석한 후에 응답에 많은 영향을 줄 것이라고 판단되는 진동모드형상을 잘 표현할 수 있는 지점에 대하여 고려하였다.

먼저 응답의 오차발생 원인을 분석하기 위하여 응답에 영향을 주는 변수를 크게 β_i , Φ_{Nji} , Φ_{Nki} , θ_i 3 가지

로 구분하고 이 값들의 조합에 의한 A_{jk} , α_{jk} 등의 값을 예제구조물에 대하여 비교하였다.

하중은 점 L에 가진하였고 점 L과 점 R에서의 응답을 확인하였다. 정상상태의 응답을 확인하기 위하여 조화하중을 가진하였으며, 진동수는 0~60Hz 대역에 걸쳐 0.1Hz 간격으로 설정하여 해석을 수행하였다.

그림 8은 각 모델별로 가진자유도와 수진자유도 위치의 진동모드형상 진폭의 곱을 비교한 그림이다. 모델 A의 경우에는 점 L과 점 R에서 모두 약 20Hz와 45Hz 대역 부근의 진동모드가 응답에 크게 기여를 하는 것으로 나타났다. 모델 M-1은 가진점과 수진점 모두 약 20Hz와 45Hz 대역 부근의 진동모드가 응답에 기여를 하고 있지만 그림 8(b)에 의하면 약 17Hz와 34Hz 부근에서는 오차가 발생함을 알 수 있다. 반면에 모델 M-2는 그림 8(c) 및 (d)에 의하면 모델 A와 비교하여 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 고유진동수의 변화는 그림 9를 통하여도 확인할 수 있다.



(a) 모델 M-1 (b) 모델 M-2
그림 7 해석모델

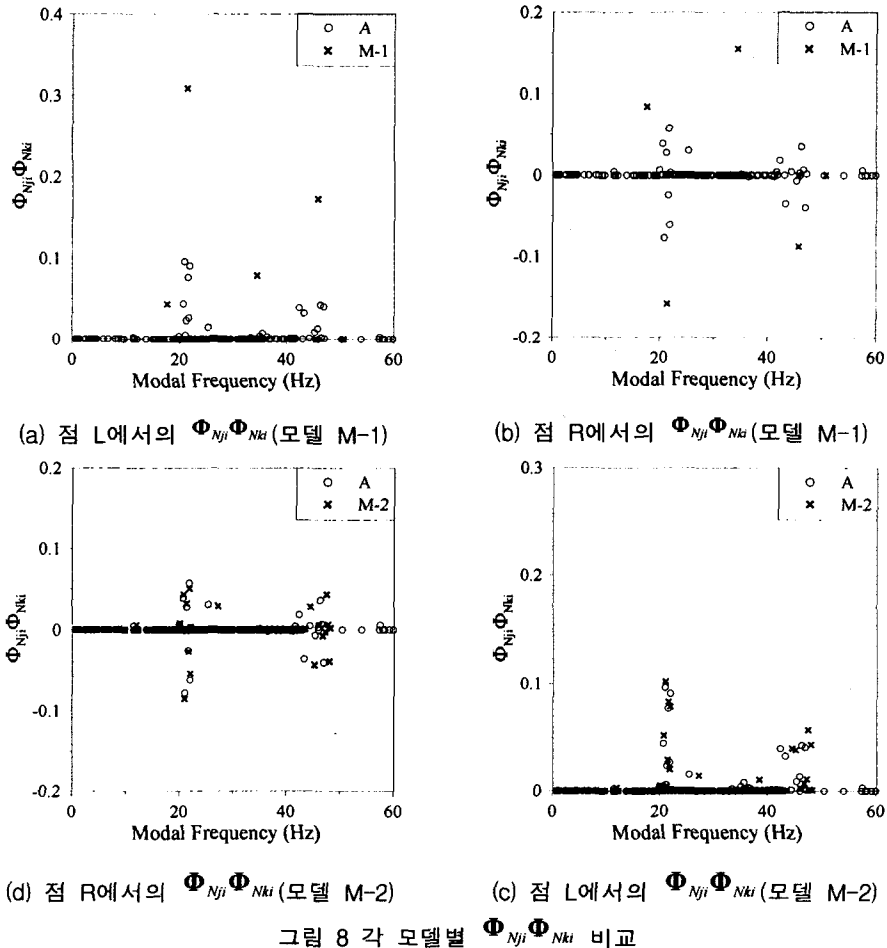


그림 9는 각 하중진동수에 대한 진동모드별로 A_{jk} 을 구하고 이를 중첩한 값을 그렸다. 가진점인 점 L에 대해서는 3개의 모델이 모두 대부분의 하중에 대하여 만족할 만한 수준의 응답을 보일 것임을 예상할 수 있다. 그러나 진동수가 약 34Hz 정도인 하중이 작용할 경우에는 모델 M-1은 비교적 많은 오차가 발생할 것이다. 이는 그림 8(a)에서도 보이듯이 모델 M-1의 진동모드 중 약 34Hz 부근의 진동모드의 오차에 의한 영향이다. 한편 그림 9(a)에서 약 20Hz 부근의 값은 모델 A와 모델 M-1이 거의 일치하고 있다. 이것도 역시 그림 8(a)를 통하여 확인할 수 있다. 또한 이것은 점 L에서 약 20Hz 부근의 $\Phi_{Nji} \Phi_{Nki}$ 값을 조사하여 중첩해 보면 쉽게 알 수 있다. 모델 A의 경우는 그 값의 합이 0.370이고 모델 M-1의 경우에는 0.353으로 약 4.8%, 모델 M-2의 경우에는 0.376으로 약 1.5% 정도의 오차만을 보이고 있다. 이는 응답을 알고자 하는 곳을 부분구조물로 모형화하였을 경우에는 자유도 개수의 감소로 인하여 진동모드의 개수는 감소되지만, 전체구조물에서 관련된 진동모드들을 대표하는 값은 큰 변화가 없음을 의미한다. 또한 각 진동모드의 위상각을 고려한 α_{jk} 를 나타낸 그림 10에서도 동일한 결론을 얻을 수 있다.

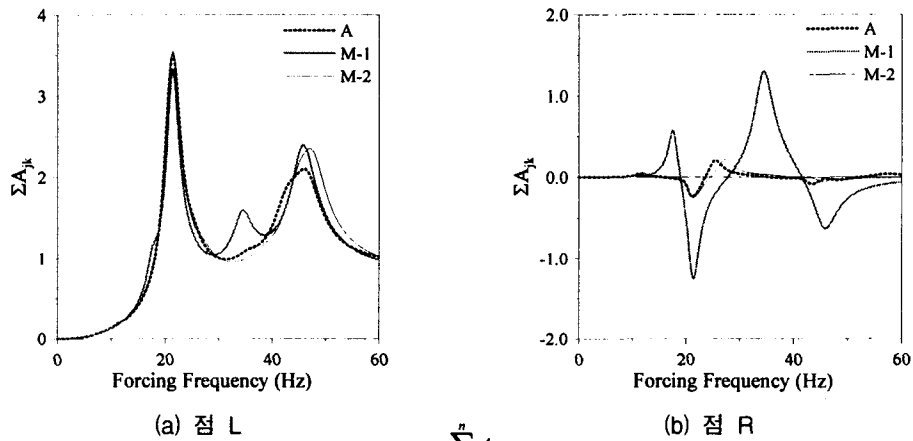


그림 9 $\sum_{j=1}^n A_{jk}$ 비교

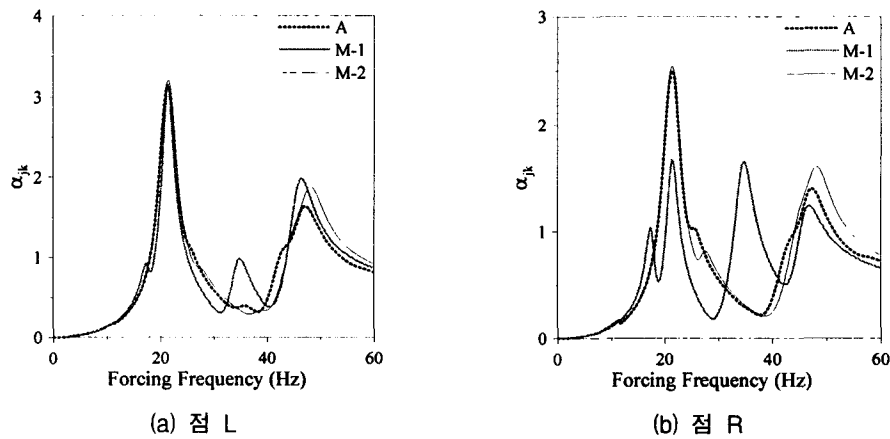


그림 10 α_{jk} 의 비교

5. 결론

본 논문에서는 부분구조모델을 이용한 국부진동해석시에 발생하는 오차의 원인에 대하여 분석하였다. 이를 위하여 행렬응축기법에 의한 부분구조모델의 경계조건을 결정하였고, 응답의 오차분석을 위하여 정상상태의 응답에 영향을 미치는 주요 변수들에 대하여 연구하였다. 먼저 부분구조모델의 위치에 따른 모형화의 유효성에 대하여 검토를 하였고, 다음으로 가진층과 수진층이 동일한 경우에 대하여 가진층만을 부분구조물로 모형화하여 해석을 수행한 후 정상상태 응답을 분석하였으며 실제 하중에 의한 시간이력해석을 수행하였다. 마지막으로 가진층의 부분구조모델을 이용한 해석결과의 분석을 토대로하여 가진층과 수진층이 멀리 떨어져 있을 경우에 대하여 해석을 수행하였으며 수진층 응답의 정확성 향상을 위하여 중간층의 모형화 방법에 대하여 연구를 수행하였다. 이상의 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 행렬응축기법을 사용하여 부분구조모델의 가진층해석시, 하부층의 경우에는 부분구조모델의 동적거동이 전체구조물과 비교하여 큰 차이가 없었다. 그러나 상부층일수록 부분구조모델의 고유진동수가 낮아짐에 의하여 응답에 오차가 발생하였으며, 이를 보정하기 위해서는 하중이 가진되지 않은 비가진층의 일부를 모형화시키는 것이 바람직하리라 판단된다.

(2) 부분구조모델에 의한 가진층의 국부진동 해석결과가 비교적 정확한 이유는 첫째, 부분구조물로 모형화하면 자유도의 감소로 인하여 진동모드형상의 개수는 감소되지만 부분구조모델이 나타내는 진동모드형상의 진폭의 합은 전체구조물이 나타내는 관련 진동모드형상의 진폭의 합과 거의 동일하기 때문이다. 둘째, 가진점과 수진점이 동일하거나 인접해 있기 때문에 모드형상의 위상이 전체구조물과 차이가 발생하지 않기 때문이다.

(3) 가진층으로부터 멀리 떨어진 수진층의 응답은 중간층의 효과적인 고려없이도 정확한 응답을 얻을 수 없다. 응답에 영향을 주는 주요 모드형상을 표현할 수 있도록 중간층 자유도를 고려할 경우에는 응답의 정확성이 향상된다. 이러한 중간층의 자유도 고려를 통하여 모드형상의 위상이 변화되는 것을 방지할 수 있고 부분구조모델의 고유진동수를 좀 더 정확히 표현할 수 있으리라 판단된다.

참고문헌

1. 이동근, 안상경, 김진구, "부분구조법에 의한 건축물의 국부진동해석," 한국전산구조공학회 논문집, 제12권, 제1호, 1999. 3, pp. 57-66.
1. Weaver, W. and Johnston, P. R., *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, Inc., 1987, pp.444-463
2. Ramsden, J. N. and Stocker, J. R., "Mass condensation a semi-automatic method for reducing the size of vibration problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.1, 1969, pp.333-349
3. Levy, R., Guyan reduction solutions recycled for improved accuracy, *NASTRAN Users Experiences*, NASA, 1971, pp.201-220
4. Down, B., "Accurate reduction of stiffness and mass matrices for vibration analysis and a rationale for selecting master degrees of freedom," *J. Mech. Design*, ASME, 1980, pp.102