

## 일단은 일반적인 지지조건을 갖고 타단은 집중질량을 갖는 변단면 보의 자유진동

### Free Vibrations of Tapered Beams with General Boundary Condition at One End and Mass at the Other End

오 상 진\*      이 병 구\*\*      이 태 은\*\*\*  
Oh, Sang-Jin      Lee, Byoung-Koo      Lee, Tae-Eun

---

#### ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the natural frequencies and mode shapes of tapered beams with general boundary condition(translational and rotational elastic support) at one end and carrying a tip mass with translational elastic support at the other end. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing differential equation for the free vibrations of linearly tapered beams is solved numerically using the corresponding boundary conditions. Numerical results are compared with existing solutions by other methods for cases in which they are available. The lowest three natural frequencies and the corresponding mode shapes are calculated over a wide range of section ratio, dimensionless spring constant, and mass ratio.

---

#### 1. 서 론

보는 기둥, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본이 되는 구조요소이어서 다양한 조건을 갖는 보의 정, 동적 거동에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다. 구조계의 진동특성 및 안정성에 대한 지배인자들의 영향을 결정하는 문제는 공학관련 분야에서 매우 실제적이고 중요한 문제로 취급되고 있다.<sup>(1)</sup> 지배인자들 중 특히 축방향력, 지지조건, 수학적 모형, 추가질량, 단면변화 등은 보의 횡방향 진동 특성 및 안정성에 중요한 영향인자로 알려져 있어 이에 대한 폭넓은 연구가 이루어지고 있다.<sup>(2)-(8)</sup>

이 논문에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지된 일반적인 단부조건을 갖고 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 파악하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 해석대상 보의 단부조건에 대한 경계조건을 적용하여 변화율이 직사각형 단면을 갖는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 해석 예에서는 단면비, 무차원 스프링상수 및 질량비에 따른 고유진동수 및 진동형의 변화를 고찰하였다.

---

\* 담양대학 토목공학과 조교수

\*\* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\*\* 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

## 2. 해석모형

그림 1은 좌측단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되어 있고, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 직간길이  $l$ 인 변단면 보를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $A$ 와  $I$ 는 각각 보축상 임의점  $x$ 에서의 단면적과 단면2차모멘트이며,  $A_a$ 와  $I_a$ 는 좌측단에서,  $A_b$ 와  $I_b$ 는 우측단에서 보단면의 단면적과 단면2차모멘트이다. 그리고  $K_{ra}$ 는 회전스프링상수,  $K_{ta}$ 와  $K_{tb}$ 는 수직방향 스프링상수,  $M$ 은 집중질량의 크기이며,  $w(x, t)$ 는 횡방향 진동변위이다. Bernoulli-Euler 보이론을 적용하면 변단면 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

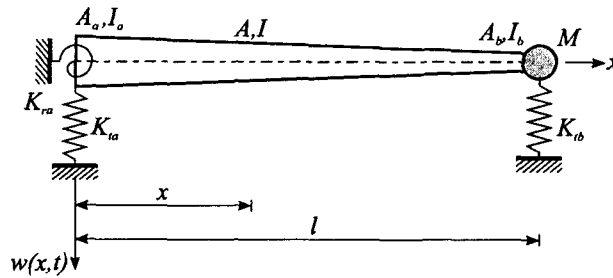


그림 1 변단면 보의 지지조건 및 제변수

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식(1)에서  $E$ 와  $\rho$ 는 각각 보 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

대상 보가 조화진동을 한다고 가정하면, 횡방향 진동변위에 대한 조화진동식은 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

여기서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s),  $i$ 는 모드번호이다.

본 연구에서는 해석대상 보로서 좌측단의 단면적 및 단면2차모멘트를 기준으로 식(3), (4)에 나타낸 바와 같이 단면적과 단면2차모멘트가 변화하는 직사각형 단면을 갖는 변단면 보를 택하였다.

$$A = A_a [1 + (\beta - 1)x/l], \quad I = I_a [1 + (\beta - 1)x/l]^3 \quad (3,4)$$

윗 식들에서  $\beta$ 는 좌측단과 우측단에서 단면의 높이  $d_a$ 와  $d_b$ 의 비로서 이후 단면비( $d_b/d_a$ , section ratio)라 한다.

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l, \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5-7)$$

식(7)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

식(1)에 식(2)~(4)를 대입하고, 식(5)~(7)의 무차원변수들을 이용하여 정리하면 식(8)과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = - \frac{6(\beta - 1)}{[1 + (\beta - 1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \frac{6(\beta - 1)^2}{[1 + (\beta - 1)\xi]^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{C_i^2}{[1 + (\beta - 1)\xi]^2} \eta \quad (8)$$

이상에서 식(8)은 변화율이 직사각형 단면을 갖는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다.

좌측단은 회전스프링과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은  $EI_a d^2 w_x / dx^2 = K_{ra} dw_x / dx$ ,  $EI_a d^3 w_x / dx^3 = -K_{la} w_x$ 이며, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은  $EI_b d^2 w_x / dx^2 = 0$ ,  $EI_b d^3 w_x / dx^3 = K_{lb} w_x - \omega_i^2 M w_x$ 이다. 이들 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음 식들과 같다.

$$d^2 \eta / d\xi^2 - k_{ra} d\eta / d\xi = 0, \quad d^3 \eta / d\xi^3 + k_{la} \eta = 0 \quad (9,10)$$

$$d^2 \eta / d\xi^2 = 0, \quad d^3 \eta / d\xi^3 - \beta^{-3} (k_{lb} - C_i^2 \mu \theta) \eta = 0 \quad (11,12)$$

식(9), (10), (12)에서  $k_{ra}$ ,  $k_{la}$ ,  $k_{lb}$ 는 무차원화한 스프링상수로서 그 내용은 식(13)~(15)와 같고,  $\mu$ 는 자유단의 집중질량과 보 전체질량의 비(mass ratio)로서 식(16)과 같다. 그리고  $\theta$ 는 변단면 보를 동일지간의 등단면 보로서 변환한 경우 보 단면의 단면적  $A_m$ 과 좌측단에서의 단면적  $A_a$ 의 비로서 식(17)에 보인 바와 같이 단면비  $\beta$ 의 항으로 표시된다.

$$k_{ra} = K_{ra} l / (EI_a), \quad k_{la} = K_{la} l^3 / (EI_a), \quad k_{lb} = K_{lb} l^3 / (EI_a) \quad (13-15)$$

$$\mu = M / (\rho A_m l), \quad \theta = (\beta + 1) / 2 \quad (16,17)$$

### 3. 수치해석 에 및 고찰

본 연구에서는 식(8)의 지배미분방정식을 수치해석하여 해석대상 보의 고유진동수 및 진동형을 산출하였으며, 해석과정의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식(8)의 미분방정식에는 불확정량인 미지의 무차원 고유진동수  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저  $C_i$ 값을 가정하여 미분방정식에 대입하고, 좌측단에서 우측단까지 수치적분을 시행한다. 가정한 값의 대상구조에 대한 고유치 여부 판단은 수치적분에서 얻어진 우측단에서의 결과가 식(11), (12)의 경계조건을 만족하는지 여부로 판단한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 매우 높아 진동문제 등에 많이 사용되는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 무차원 고유진동수  $C_i$ 는 행렬값탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다.<sup>(9)</sup>

표 1 결과검증

Geometry	Reference	Frequency parameter, $C_i$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\beta=0.8, k_{ra}=1, k_{la}=10^8,$ $k_{lb}=0, \mu=1$	This study	0.78897	10.470	37.117
	Ref. [5]	0.78896	-	-
$\beta=0.8, k_{ra}=0.1, k_{la}=10^8,$ $k_{lb}=0, \mu=100$	This study	0.032647	8.9628	35.554
	Ref. [5]	0.032646	-	-
$\beta=0.6, k_{ra}=0.1, k_{la}=10^8,$ $k_{lb}=0, \mu=10$	This study	0.10768	7.9239	31.356
	Ref. [5]	0.10768	-	-
$\beta=1, k_{ra}=k_{la}=10^8,$ $k_{lb}=0.1, \mu=10$	This study	0.55032	15.512	50.064
	Ref. [8]	0.55071	15.524	50.010
$\beta=1, k_{ra}=k_{la}=10^8,$ $k_{lb}=10, \mu=100$	This study	0.36013	15.428	49.975
	Ref. [8]	0.36024	15.439	50.010

표 2  $k_{ra} = k_{ta} = 10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수

$\mu$	$k_{tb}$	Frequency parameter, $C_i$								
		$\beta=1.0$			$\beta=0.8$			$\beta=0.6$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	0	3.5160	22.034	61.697	3.6083	20.621	56.192	3.7371	19.114	50.354
	0.1	3.5724	22.044	61.700	3.6758	20.634	56.197	3.8214	19.133	50.361
	1	4.0401	22.126	61.730	4.2275	20.747	56.239	4.4942	19.304	50.428
	10	6.9639	22.980	62.026	7.4372	21.940	56.669	7.9840	21.101	51.119
	100	13.254	31.539	65.352	12.842	32.177	61.642	12.159	32.484	59.084
	$10^8$	15.418	49.965	104.25	14.258	45.244	93.954	12.990	40.210	82.974
0.1	0	2.9678	19.356	55.518	2.9978	17.840	50.013	3.0306	16.152	44.097
	0.1	3.0162	19.360	55.519	3.0551	17.846	50.014	3.1011	16.160	44.099
	1	3.4186	19.399	55.528	3.5260	17.896	50.025	3.6701	16.228	44.113
	10	6.0220	19.814	55.617	6.4179	18.445	50.138	6.9119	17.003	44.262
	100	12.874	25.516	56.638	12.621	25.951	51.530	12.054	26.862	46.345
	$10^8$	15.418	49.965	104.25	14.258	45.244	93.954	12.990	40.210	82.974
1	0	1.5573	16.250	50.896	1.5283	14.967	45.998	1.4842	13.563	40.779
	0.1	1.5830	16.250	50.896	1.5580	14.967	45.998	1.5195	13.564	40.779
	1	1.7979	16.253	50.896	1.8033	14.970	45.998	1.8061	13.567	40.779
	10	3.2359	16.279	50.899	3.3854	15.000	46.001	3.5692	13.601	40.783
	100	8.9058	16.637	50.930	9.3768	15.470	46.037	9.8669	14.288	40.823
	$10^8$	15.418	49.965	104.25	14.258	45.244	93.954	12.990	40.210	82.974
10	0	0.54138	15.512	50.064	0.52627	14.336	45.324	0.50499	13.052	40.270
	0.1	0.55032	15.512	50.064	0.53651	14.336	45.324	0.51700	13.052	40.270
	1	0.62512	15.512	50.064	0.62112	14.336	45.324	0.61468	13.052	40.270
	10	1.1269	15.512	50.064	1.1684	14.336	45.324	1.2179	13.053	40.270
	100	3.1713	15.516	50.065	3.3396	14.340	45.324	3.5395	13.057	40.270
	$10^8$	15.418	49.965	104.25	14.258	45.244	93.954	12.990	40.210	82.974

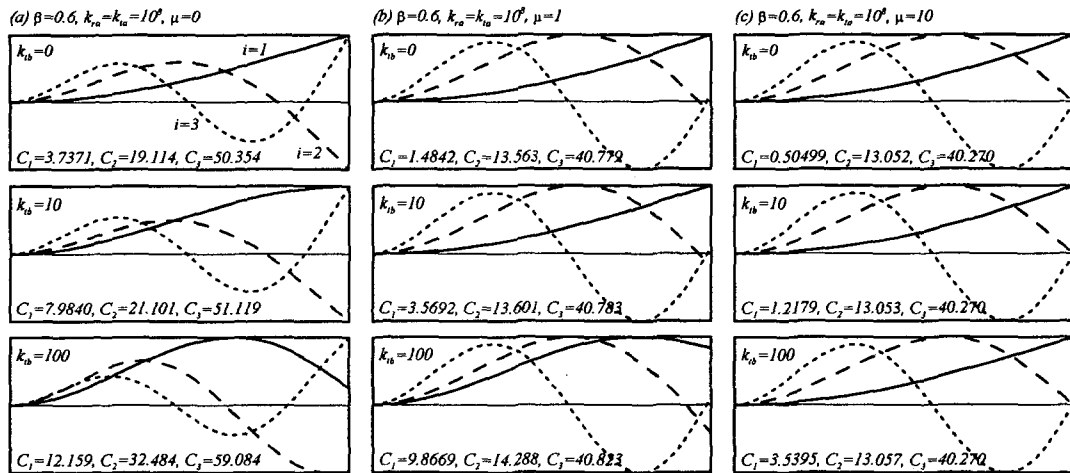


그림 2  $k_{ra} = k_{ta} = 10^8$ 인 경우 진동형의 예

표 3  $k_{ra} = 10^8$ ,  $k_{ia} = 10$ 인 경우 무차원 고유진동수

$\mu$	$k_{ib}$	Frequency parameter, $C_i$								
		$\beta = 1.0$			$\beta = 0.8$			$\beta = 0.6$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0	0	2.4872	7.0132	30.566	2.9022	6.5614	27.428	3.5045	6.0462	24.204
	0.1	2.5326	7.0331	30.572	2.9521	6.5859	27.438	3.5648	6.0748	24.220
	1	2.8854	7.2181	30.630	3.3293	6.8170	27.523	3.9932	6.3641	24.359
	10	4.2407	9.2460	31.229	4.5036	9.3372	28.415	4.8638	9.5167	25.817
	100	4.9242	17.915	37.962	4.9151	17.097	37.508	5.0363	15.607	37.277
	$10^8$	5.0128	22.667	61.848	4.9639	19.943	55.061	5.0551	17.094	47.943
0.1	0	2.2355	6.3414	27.093	2.5637	5.9473	23.909	2.9786	5.5709	20.551
	0.1	2.2790	6.3529	27.096	2.6127	5.9598	23.912	3.0398	5.5817	20.556
	1	2.6241	6.4604	27.120	2.9964	6.0806	23.946	3.5125	5.6947	20.605
	10	4.1229	7.8484	27.373	4.4193	7.8208	24.301	4.8206	7.9055	21.143
	100	4.9220	16.582	30.872	4.9140	16.318	29.592	5.0359	15.284	29.336
	$10^8$	5.0128	22.667	61.848	4.9639	19.943	55.061	5.0551	17.094	47.943
1	0	1.3140	5.3223	23.537	1.4243	5.1642	20.680	1.5100	5.1415	17.689
	0.1	1.3419	5.3232	23.537	1.4545	5.1650	20.680	1.5443	5.1419	17.689
	1	1.5702	5.3320	23.538	1.7022	5.1720	20.682	1.8239	5.1455	17.691
	10	2.9617	5.4496	23.551	3.2151	5.2765	20.700	3.5286	5.2072	17.712
	100	4.8965	9.4394	23.702	4.9016	9.8758	20.901	5.0315	10.396	18.017
	$10^8$	5.0128	22.667	61.848	4.9639	19.943	55.061	5.0551	17.094	47.943
10	0	0.47271	5.0477	22.762	0.50019	4.9858	20.024	0.51563	5.0642	17.158
	0.1	0.48285	5.0477	22.762	0.51090	4.9858	20.024	0.52740	5.0642	17.158
	1	0.56593	5.0478	22.762	0.59875	4.9859	20.024	0.62339	5.0643	17.158
	10	1.0914	5.0491	22.763	1.1545	4.9868	20.024	1.2219	5.0647	17.158
	100	3.1337	5.0694	22.764	3.3172	5.0029	20.026	3.5347	5.0727	17.160
	$10^8$	5.0128	22.667	61.848	4.9639	19.943	55.061	5.0551	17.094	47.943

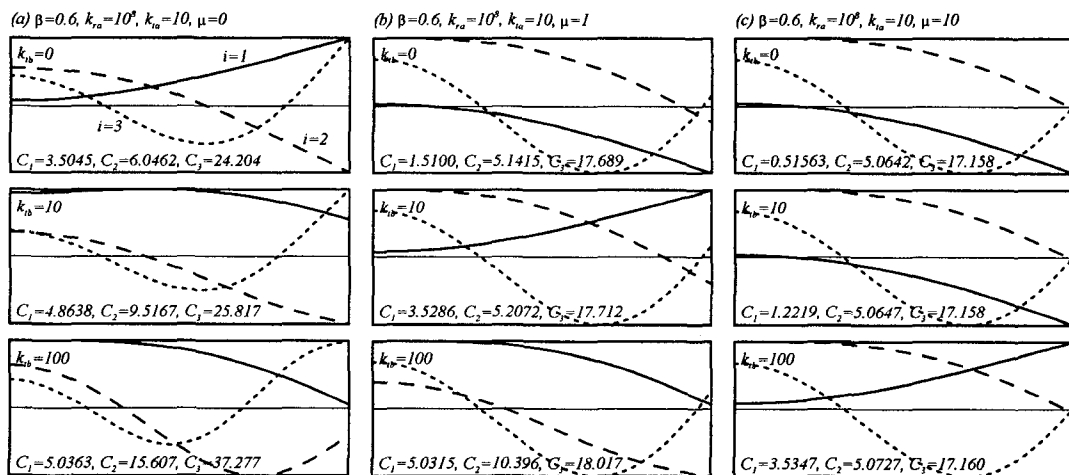


그림 3  $k_{ra} = 10^8$ ,  $k_{ia} = 10$ 인 경우 진동형의 예

표 4  $k_{ra} = k_{ia} = 10$  인 경우 무차원 고유진동수

$\mu$	$k_{ib}$	Frequency parameter, $C_i$								
		$\beta = 1.0$			$\beta = 0.8$			$\beta = 0.6$		
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	0	2.2736	6.7931	28.527	2.6164	6.4583	25.707	3.0865	6.1008	22.806
	0.1	2.3265	6.8113	28.533	2.6748	6.4802	25.716	3.1559	6.1264	22.822
	1	2.7312	6.9818	28.594	3.1126	6.6892	25.804	3.6542	6.3835	22.964
	10	4.2248	8.9287	29.215	4.4616	9.0738	26.724	4.7695	9.2938	24.459
	100	4.9213	17.106	36.152	4.9149	16.275	35.898	5.0055	14.856	35.688
	$10^8$	5.0066	21.172	57.800	4.9667	18.714	51.600	5.0308	16.140	45.086
0.1	0	2.0321	6.2115	25.357	2.3009	5.9145	22.478	2.6309	5.6393	19.435
	0.1	2.0819	6.2219	25.359	2.3564	5.9259	22.482	2.6976	5.6502	19.441
	1	2.4698	6.3204	25.385	2.7858	6.0364	22.517	3.2072	5.7620	19.492
	10	4.1007	7.6444	25.655	4.3685	7.6775	22.894	4.7132	7.8169	20.063
	100	4.9192	16.009	29.449	4.9137	15.657	28.551	5.0050	14.603	28.581
	$10^8$	5.0066	21.172	57.800	4.9667	18.714	51.600	5.0308	16.140	45.086
1	0	1.1852	5.2981	22.007	1.2793	5.1729	19.423	1.3589	5.1450	16.714
	0.1	1.2162	5.2989	22.007	1.3127	5.1737	19.423	1.3964	5.1455	16.714
	1	1.4650	5.3072	22.009	1.5813	5.1807	19.425	1.6962	5.1501	16.716
	10	2.9148	5.4174	22.023	3.1473	5.2842	19.442	3.4354	5.2268	16.739
	100	4.8944	9.3733	22.192	4.9005	9.8178	19.671	4.9991	10.334	17.087
	$10^8$	5.0066	21.172	57.800	4.9667	18.714	51.600	5.0308	16.140	45.086
10	0	0.42609	5.0400	21.264	0.45061	4.9896	18.791	0.46708	5.0431	16.202
	0.1	0.43731	5.0400	21.264	0.46246	4.9896	18.791	0.48002	5.0431	16.202
	1	0.52761	5.0401	21.264	0.55790	4.9897	18.791	0.58369	5.0432	16.202
	10	1.0720	5.0413	21.264	1.1334	4.9907	18.791	1.2013	5.0438	16.202
	100	3.1275	5.0608	21.266	3.3080	5.0075	18.794	3.5227	5.0547	16.205
	$10^8$	5.0066	21.172	57.800	4.9667	18.714	51.600	5.0308	16.140	45.086

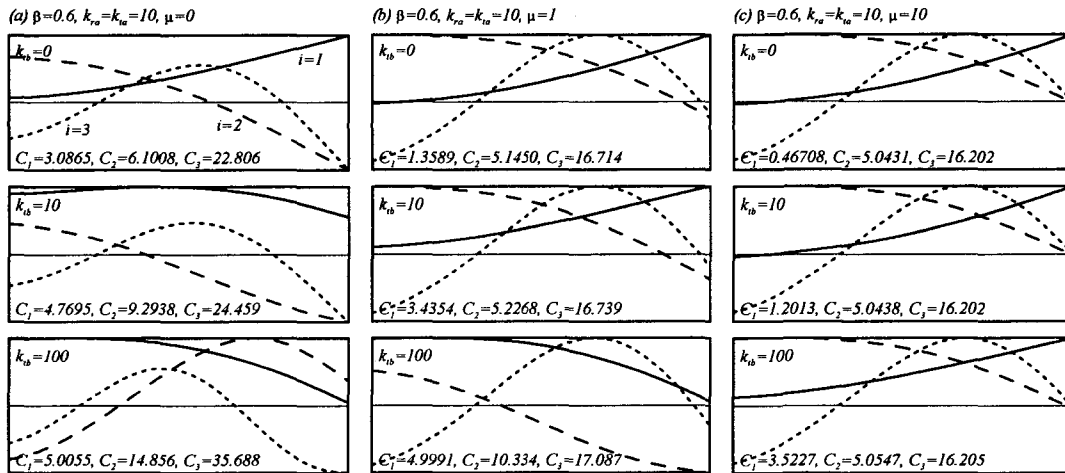


그림 4  $k_{ra} = k_{ia} = 10$  인 경우 진동형의 예

표 5  $k_{ra} = 10$ ,  $k_{ta} = 10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수

$\mu$	$k_{tb}$	Frequency parameter, $C_i$								
		$\beta = 1.0$			$\beta = 0.8$			$\beta = 0.6$		
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	0	2.9678	19.356	55.518	3.0953	18.197	50.662	3.2602	16.966	45.525
	0.1	3.0296	19.366	55.522	3.1678	18.211	50.667	3.3488	16.987	45.533
	1	3.5318	19.455	55.553	3.7483	18.334	50.712	4.0408	17.171	45.605
	10	6.4457	20.394	55.874	6.8841	19.634	51.178	7.3635	19.104	46.351
	100	11.842	29.268	59.526	11.418	29.859	56.600	10.787	29.946	54.823
	$10^8$	13.430	44.722	95.093	12.466	40.560	85.778	11.412	36.131	75.857
0.1	0	2.5319	17.048	49.973	2.6028	15.786	45.094	2.6817	14.376	39.854
	0.1	2.5854	17.052	49.975	2.6650	15.792	45.095	2.7568	14.385	39.856
	1	3.0217	17.097	49.985	3.1662	15.850	45.108	3.3505	14.463	39.872
	10	5.6561	17.575	50.086	6.0459	16.484	45.237	6.5139	15.364	40.044
	100	11.615	23.983	51.280	11.289	24.637	46.892	10.726	25.597	42.584
	$10^8$	13.430	44.722	95.093	12.466	40.560	85.778	11.412	36.131	75.857
1	0	1.3553	14.219	45.621	1.3546	13.144	41.290	1.3416	11.965	36.685
	0.1	1.3843	14.219	45.621	1.3875	13.144	41.290	1.3800	11.966	36.685
	1	1.6222	14.222	45.621	1.6546	13.148	41.291	1.6866	11.970	36.686
	10	3.1219	14.254	45.625	3.2878	13.185	41.295	3.4885	12.013	36.690
	100	8.6926	14.746	45.662	9.0997	13.858	41.338	9.4406	13.058	36.739
	$10^8$	13.430	44.722	95.093	12.466	40.560	85.778	11.412	36.131	75.857
10	0	0.47437	13.519	44.818	0.46946	12.541	40.637	0.45918	11.472	36.189
	0.1	0.48454	13.519	44.818	0.48090	12.541	40.637	0.47234	11.472	36.189
	1	0.56793	13.519	44.818	0.57362	12.541	40.637	0.57748	11.472	36.189
	10	1.0955	13.519	44.818	1.1431	12.542	40.637	1.1988	11.473	36.189
	100	3.1573	13.524	44.819	3.3278	12.547	40.638	3.5300	11.478	36.190
	$10^8$	13.430	44.722	95.093	12.466	40.560	85.778	11.412	36.131	75.857

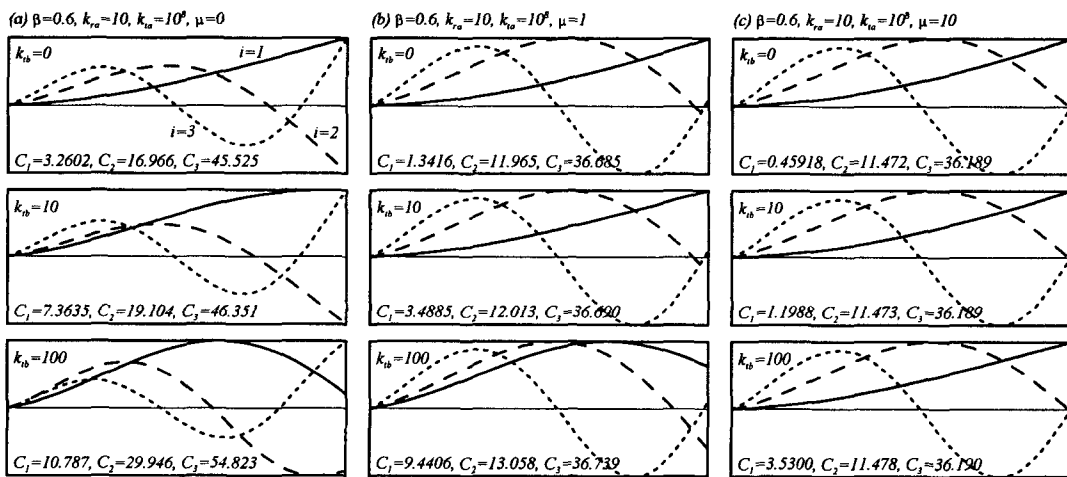


그림 5  $k_{ra} = 10$ ,  $k_{ta} = 10^8$ 인 경우 진동형의 예

본 연구에서는 해석대상 보에 대한 단면비  $\beta$ , 질량비  $\mu$  및 무차원 스프링상수  $k_{ra}$ ,  $k_{la}$ ,  $k_{lb}$ 가 입력되면 무차원 고유진동수와 진동형이 계산되도록 FORTRAN77어로 컴퓨터 프로그램을 작성하였으며, 해석 예에서는 최저차 3개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌들의 결과와 표 1에 비교하였다. 이 표에서 본 연구와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

표 2는  $k_{ra} = k_{la} = 10^8$ , 표 3은  $k_{ra} = 10^8$ ,  $k_{la} = 10$ , 표 4는  $k_{ra} = k_{la} = 10$ , 표 5는  $k_{ra} = 10$ ,  $k_{la} = 10^8$ 인 경우 질량비  $\mu(0, 0.1, 1, 10)$ , 우측단의 수직방향 스프링상수  $k_{lb}(0, 0.1, 1, 10, 100, 10^8)$ , 단면비  $\beta(1, 0.8, 0.6)$ 에 따른 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다. 그리고 그림 2~5는 질량비  $\mu(0, 1, 10)$  및 우측단의 수직방향 스프링상수  $k_{lb}(0, 10, 100)$ 에 따른 진동형의 변화를 나타낸 것이다.

#### 4. 요약 및 결론

본 연구에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되고 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였으며, 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과를 검증하였다. 해석 예로서 단면비, 무차원 스프링상수 및 질량비 변화에 따른 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 본 연구결과를 이용하는 경우 스프링으로 지지된 보뿐만 아니라 고정적인 단부조건 즉 고정-자유( $k_{ra} = k_{la} = \infty$ ,  $k_{lb} = 0$ ), 고정-회전( $k_{ra} = k_{la} = \infty$ ,  $k_{lb} = \infty$ ), 회전-회전( $k_{ra} = \infty$ ,  $k_{la} = \infty$ ,  $k_{lb} = \infty$ )의 지지조건을 갖는 보의 고유진동수 및 진동형을 정확하고 효율적으로 산출할 수 있다.

#### 참고 문헌

1. R.D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, 1979.
2. T.C. Huang, "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 28, 1961, pp.579-584.
3. C.L. Amba-Rao, "Effect of End Conditions on the Lateral Frequencies of Uniform Straight Columns," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 42, 1967, pp.900-901.
4. H. Matsuda, C. Morita, T. Sakiyama, "A Method for Vibration Analysis of a Tapered Timoshenko Beam with Constraint at any Points and Carrying a Heavy Tip Body," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, 1992, pp.331-339.
5. N.M. Aucilleo, "Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, 1996, pp.25-34.
6. N.M. Aucilleo, G. Nole, "Vibrations of a Cantilever Tapered Beam with Varying Section Properties and Carrying a Mass at the Free End," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, 1998, pp.105-119.
7. W.L. Li, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, 2000, pp.709-725.
8. H.K. Kim, M.S. Kim, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, 2001, pp.771-784.
9. S.J. Oh, B.K. Lee, I.W. Lee, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp.4871-4891.