

## 집중 질량을 갖는 후판의 좌굴 및 진동해석 Buckling and Vibration Analysis of Thick Plates with Concentrated Mass

김 일 중\*      오 속 경\*\*      이 용 수\*\*\*  
Kim, Il-Jung    Oh, Soog-Kyoung    Lee, Yong-Soo

### ABSTRACT

This paper is for the buckling and vibration analysis of thick plate with concentrated mass on a inhomogeneous pasternak foundation. A thick rectangular plate resting on a inhomogeneous pasternak foundation is isotropic, homogeneous and composite with linearly elastic material .

In order to analyze plate which is supported on inhomogeneous pasternak foundation, the value of winkler foundation parameter(WFP) of central and border zone of plate are chosen as  $Kw1$  and  $Kw2$  respectively. The value of  $Kw1$  and  $Kw2$  can be changed as 0, 10,  $10^2$ ,  $10^3$  and the value of SFP(shear foundation parameter) also be changed 0, 5, 10, 15 respectively.

Finally, In this paper, buckling stress of rectangular plate on the inhomogeneous pasternak foundation, natural frequency of this plate with or without uniform in-plane axial stresses are calculated

### 1. 서    론

구조 부재중 판(plate) 요소는 건축, 토목, 항공, 기계, 선박등 공학 전반적인 분야에서 활용되고 있다. 이러한 판 부재의 좌굴 및 고유진동수는 판으로 조합된 구조부재의 내력에 큰영향을 미치게 된다.

특히 기초와 같은 판 요소는 지반 진동문제를 근본으로 해결하기 위해 기초판에 작용하는 좌굴응력과 진동특성에 대한 연구가 필요하다. 집중질량을 갖는 기초구조의 거동 특성에 대해, 본 연구는 집중질량을 갖는 판의 좌굴응력과 진동수를 구하여 Mat 기초와 슬라브등과 같은 구조물의 설계시 집중질량에 대한 효과를 파악하고 효율적인 설계를 하는데 그 목적이 있다.

집중질량을 갖는 판의 안정해석에 대해서는 1956년 Cohen과 Hendelman<sup>(2)</sup>에 의해 Rayleigh-Riz법을 이용하여 여러 가지 경계조건하에서 장방형판의 고유진동수 해석이 이루어 졌고, 1961년 Wah는 Dirac Delta 함수를 이용하여 집중질량(point mass)을 갖는 판에 대한 연구가 이루어졌다. 또한 Szilard, Soedel 과 Gorman<sup>(9)</sup>에 의해 많은 연구가 있었으며, 최근에는 집중질량에 의한 판의 진동특성에 대해 Amba-Rao, Magrab, Laura<sup>(8)</sup>, Low<sup>(3),(4),(10)</sup>등이 발표한바 있다.

본 연구에서는 집중질량을 갖는 판의 질량크기, 지반강성, 면내력, 지지조건등을 변화시켜가며 좌굴 및 진동수를 구할 수 있도록 하였고, 판을 지지하는 지반을 전단지반이 고려된 Pasternak 지반으로 해석하였다.

\* 정회원, 정인대학 건축계열 조교수, 원광대학교 박사수료  
\*\* 학생회원, 원광대학교 건축공학과 박사과정  
\*\*\* 정회원, 원광대학교 건축공학과 교수, 공학박사

판의 해석을 위해 다음과 같이 가정하였다.

1. 판의 처짐은 두께에 비해 아주 적다.
2. 변형전 중립면에 수직인 평면은 직선을 유지하나 변형 후 중립면에 수직일 필요는 없다.
3. 하중에 의한 중립면의 수직응력은 무시한다.

## 2. 유한요소법을 이용한 좌굴 및 고유진동

### 2-1 지반 모델링

판을 지지하는 지반의 모델링은 그림1.에서 보는 바와 같다. Winkler지반은 근접한 탄성매개체와 상호 독립적으로 구성되어 지반의 거동이 불연속이 된다. 지반과 구조물 사이에 전단층을 고려하여 지반의 거동이 상호 연계될 수 있도록 보완한 것이 Pasternak 지반이다. 따라서 본 연구에서는 Pasternak지반에 의해 지반을 모델링하여 실제 지반과 유사하도록 하여 해석하였다.

Pasternak 지반을 구성하는 Winkler 지반파라미터( $WFP$ )와 전단지반 파라미터( $SFP$ )는 다음과 같다.

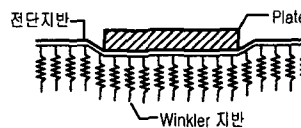
$$WFP = \frac{K_w a^4}{D}, \quad SFP = \frac{K_G a^2}{D} \quad (1)$$

여기서,  $K_w$  : Winkler 지반 계수,  $K_G$  : 전단 지반 계수

$a$  : 판의 길이,  $D$  : 휨강성



(a) Winkler 지반



(b) Pasternak 지반

그림1. 탄성지반 모델

### 2-2. 판의 강성 매트릭스

가상일의 원리를 이용하여 판의 좌굴과 진동 방정식을 얻었으며, 운동에너지( $T_e$ )와 변형에너지( $U_e$ ) 그리고 외력( $W_p$ )에 의한 일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho \left( h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dx dy + M(k, h) \cdot \dot{w}^2(k, h) \right\} \\
 U_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b D \left( \frac{\partial}{\partial x} \theta_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} \theta_y^2 + 2\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{Gh^3}{12} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + x^2 \cdot h \cdot G \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 \right\} \right] dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ K_w \cdot w^2 + K_G \cdot \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\
 W_p &= \frac{1}{2} \int \int N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy
 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$\rho$  : 단위 면적당 판의 질량  
 $M$  : 좌표  $(k, h)$  에서의 집중질량  
 $h$  : 판의 두께  
 $D$  : 판의 휨강성  
 $G$  : 전단탄성계수  
 $N_x$  : 판의 단위길이당 응력

$\alpha^2$  : 전단보정계수 ( $\pi^2/12$ )  
 $K_w$  : winkler 지반계수  
 $K_G$  : 전단지반계수  
 $w$  : 판의 변위  
 $\theta_x, \theta_y$  : 판의 x,y 방향의 회전각  
 $2a, 2b$  : 판의 x,y방향의 판의 길이

위 (2)식을 변분을 취하고 행렬 형태로 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \delta T_e &= \{ \dot{w}_e \}^T [m_e] \{ \dot{w}_e \} + \{ \dot{w}_e \}^T [m_p] \{ \dot{w}_e \} \\
 \delta U_e &= \{ w_e \}^T [K_e] \{ w_e \} + \{ w_e \}^T [K_f] \{ w_e \} \\
 \delta W_e &= \{ w_e \}^T [K_G] \{ w_e \}
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서

$[m_e]$  : 질량 강성매트릭스  
 $[m_p]$  : 집중질량에 의한 강성 매트릭스  
 $[K_e]$  : 판에 대한 요소 강성 매트릭스  
 $[K_f]$  : 지반강성에 대한 요소강성매트릭스  
 $[K_G]$  : 기하강성 매트릭스

식(3)의 강성 행렬은 무차원 변수  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{b}$  를 이용하였으며, 수치적분은 야코비안 가우스적분점을 이용하였으며,  $2 \times 2$  축소적분점(reduced integration point)으로 적분하였다.

### 2-3. 변위 함수 구성

본 해석을 위해 8절점 아이소파라매트릭 요소를 사용하였으며 요소내의 임의점 좌표  $x, y$ 를 절점 좌표로 표시하면 다음과 같다.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \tag{4}$$

처짐 및 회전각은 다음과 같다.

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{x_i} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{y_i} \tag{5}$$

여기서, 함수  $N_i$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4 & N_5(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1+\eta)(1+\xi+\eta)/4 \\
 N_2(\xi, \eta) &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 & N_6(\xi, \eta) &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
 N_3(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4 & N_7(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4 \\
 N_4(\xi, \eta) &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 & N_8(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2
 \end{aligned} \tag{6}$$

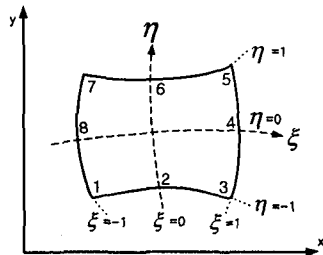


그림2. 8절점 2차원 요소

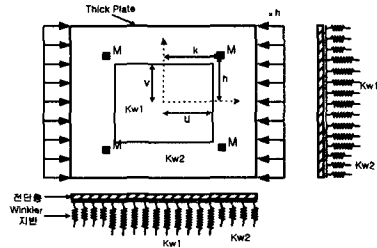


그림3. 해석 지반 모델링

2-4. 고유치 방정식

집중질량을 갖는 판의 고유치 방정식은 다음과 같다.

$$[K_E] - \alpha[K_G] - \omega_e^2[M] = 0 \tag{7}$$

여기서,

$[K_E]$  : 판의 전체 요소 강성 매트릭스 =  $[K_e] + [K_f]$      $[M]$  : 집중질량을 갖는 판의 전체 질량 매트릭스 =  $[m_e] + [m_p]$   
 $[K_G]$  : 단위응력당 판의 전체 기하강성 매트릭스     $\omega_e$  : 판의 원진동수

(7)식에서 질량 매트릭스  $[M]=0$ 으로 하면 좌굴하중을 구할 수 있고, 기하강성 매트릭스  $[K_G]=0$ 으로 할 경우 집중질량을 갖는 판의 고유진동수를 구할 수 있다. 그리고 판의 좌굴응력에 응력비를 곱하여 면내응력을 주었을 때 판의 진동수를 구할 수 있다.

3. 유한요소해석의 적용

유한요소해석을 위해 판의 대칭성을 고려하여 정방형 판의 1/4부분을 5×5로 요소 분할하여 해석하였다. 해석을 통하여 얻어진 판의 좌굴응력, Pasternak지반 위의 판의 고유진동수를 기존해와 비교검증 후 비균질 Pasternak 지반에 의해 지지된 판에 적용하였다.(그림3.참조). 유한요소해석의 신뢰성을 검증한 후 지반 변화에 따른 좌굴하중 산정과 질량변화에 대한 고유진동수산정 그리고 지반 강성변화와 면내력을 받는 판의 진동수에 구하였다.

해석 조건은 다음과 같다.

- |  |  |
|--|--|
| 탄성계수( $E$ ) : $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$           | 지반강성 변화위치( $u, v$ ) : 0.3 m                |
| 단위체적질량( $\rho$ ) : $7.981413 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^3$ | WFP( $Kw1, Kw2$ ) : 0, 10, $10^2$ , $10^3$ |
| 포아송비( $\nu$ ) : 0.3  | SFP( $K_G$ ) : 0, 5, 10, 15                |
| 판 두께( $h$ ) : 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 15.0 cm            | 집중질량비(mc/m) : 1.0, 4.0                     |
| 판의 크기 $a \times b$ : $1.0 \times 1.0m$                     | 판의 지지상태 : 4변단순지지, 4변고정지지                   |

표1. 두께에 따른 좌굴응력에 대한 비교 (4변단순지지)

Thickness (cm)	좌굴응력 $\sigma_{cr}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )		
	이론해 (Thin plate)	본 연구	
		좌굴하중	좌굴계수
0.5	189.80	188.10	3.96
1.0	759.20	757.78	3.99
2.0	3036.80	3029.10	3.99
5.0	18980.01	18699.67	3.94
10.0	75920.03	71790.09	3.78
15.0	170820.01	151457.00	3.55

표2. 지반강성 변화에 따른 고유진동수(  $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$  ) (  $t=20cm$ , 4변 단순지지 )

SFP	WFP	참고문헌[5] (단순지지)	본해석(오차율)
0	0	17.4486	17.4345 ( 0.08%)
	10	17.7208	17.7071 ( 0.08%)
	$10^2$	20.0042	19.9952 ( 0.05%)
	$10^3$	35.5028	35.5161 (-0.04%)
	$10^4$	98.5331	98.7452 (-0.22%)
10	0	22.2117	22.1956 ( 0.07%)
	10	22.4261	22.4104 ( 0.07%)
	$10^2$	24.2698	24.2580 ( 0.05%)
	$10^3$	38.0638	38.0741 (-0.03%)
	$10^4$	99.4473	99.6619 (-0.22%)

표1.는 Thin Plate 이론해와 본 유한 요소해석해를 비교한 결과 t=2.0cm 이하에서는 0.89%이하의 적은 오차를 보였다. 판의 두께가 증가할 수록 해석 값의 차이가 크게 나타났으나, 이는 박판(Thin Plate) 이론해에서는 무시된 전단변형에 대한 효과에 의한 것으로 볼 수 있다.

표2.는 Winkler 지반강성과 전단지반 강성을 고려한 고유진동수를 참고문헌[5]과 비교하였으며 최대 0.22% 이하의 적은 오차를 보였다.

이상에서 보는바와 같이 이론해 및 참고문헌과 본 해석해를 비교한 결과에 신뢰할만한 결과를 얻을 수 있었다.

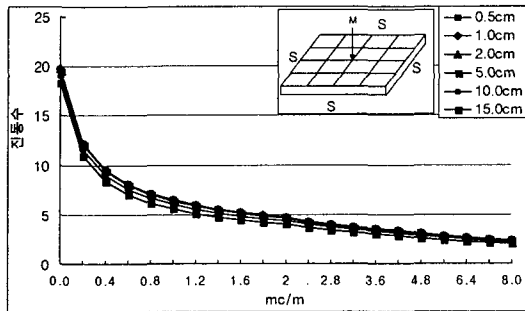
### 3-1. 좌굴해석

표3. 지반강성 변화에 따른 좌굴응력 단위 (kgf/cm<sup>2</sup>)

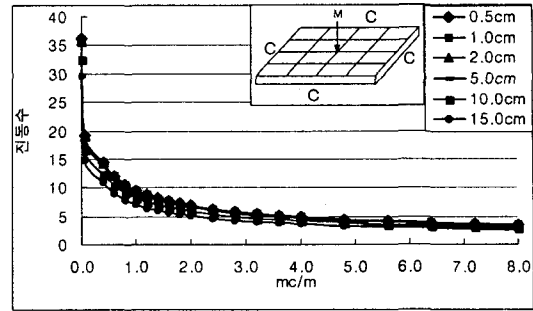
지지상태 강성변화		4변 단순지지 (t=5.0cm)				4변 고정지지 (t=5.0cm)			
		SFP				SFP			
kl	k2	0	5	10	15	0	5	10	15
0	0	18699.67	23508.36	28324.29	33131.07	45403.81	49595.61	53729.84	57802.62
	10	18791.48	23599.53	28416.27	33223.04	45419.32	49612.44	53749.11	57816.83
	10 <sup>2</sup>	19602.46	24411.91	29229.87	34034.32	45576.72	49769.08	53894.29	57956.74
	10 <sup>3</sup>	27167.42	31953.36	36738.35	41501.66	47046.04	51179.96	55245.50	59247.46
10	0	19094.00	23902.64	28713.17	33533.29	45690.30	49880.74	54009.99	58076.04
	10	19185.18	23992.84	28806.46	33625.82	45710.08	49894.67	54025.96	58089.92
	10 <sup>2</sup>	19999.69	24806.96	29621.43	34440.23	45863.13	50049.19	54166.48	58227.83
	10 <sup>3</sup>	27567.64	32355.84	37132.35	41605.80	47318.18	51452.61	55509.75	59501.26
10 <sup>2</sup>	0	22666.64	27479.15	32290.94	37095.61	48266.73	52384.88	56428.74	60396.98
	10	22761.39	27570.29	32381.28	37190.21	48283.36	52397.08	56439.65	60410.86
	10 <sup>2</sup>	23583.04	28393.26	33204.65	38009.77	48427.53	52534.71	56574.27	60538.89
	10 <sup>3</sup>	31201.90	35985.13	40753.98	45513.66	49785.33	53936.50	57812.13	61717.93
10 <sup>3</sup>	0	50675.75	53610.82	56463.55	59260.66	67096.44	70290.73	73421.33	76535.19
	10	50733.18	53665.14	56514.37	59316.07	67097.16	70294.46	73430.66	76542.34
	10 <sup>2</sup>	51258.33	54126.52	56952.46	59713.91	67161.47	70369.10	73500.89	76611.32
	10 <sup>3</sup>	54811.52	57498.07	60168.92	62827.10	67838.28	71028.27	74171.05	77280.59

Winkler지반 강성이 작은 경우 전단지반에 의한 영향이 상당히 크게 나타나 전단지반을 고려하지 않은(SFP=0)경우보다 SFP=15인 경우 좌굴응력이 52%이상, 크게는 70%이상 증가를 보였다.

상대적으로 Winkler지반 강성이 큰 경우는 전단 지반강성에 의한 영향이 줄어드는 것을 알 수 있다. Winkler지반강성이 10<sup>2</sup> 과 10<sup>3</sup>사이에서 급속히 증가하였으며, 오히려 전단지반에 대한 조건도 무시할 수 없을 정도로 좌굴하중의 증가에 상당한 영향이 있음을 알 수 있다.



(a) 단순지지



(b) 고정지지

그림4. 집중질량을 갖는 판의 진동수 변화 (집중질량위치 : 중앙)

그림4에서 보는 바와 같이 중앙집중질량을 갖는 판은 질량이 증가할수록 진동수의 급격한 감소를 보였으며 판의 두께에 대한 진동수의 변화폭이 크지않은 것을 알수 있으며 질량이 커질수록 일정한 값에 수렴함을 나타냈다.

표4. 비균질 지반위의 집중질량을 갖는 판의 진동수 ( $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ )

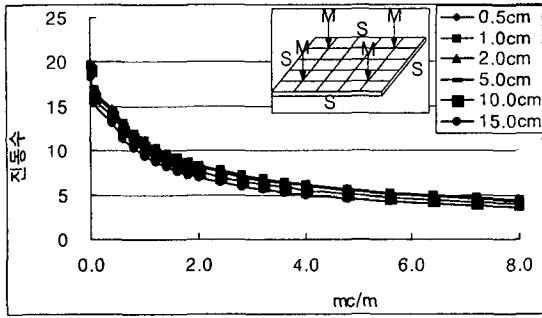
(a) mc/m=4.0, P=0.4Pcr, U,V=0.3m 집중질량위치=중앙1개소, B.C= S-S-S-S					
WFP		SFP			
$K_{wl}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	2.65	3.11	3.49	3.82
	$10^2$	2.73	3.17	3.54	3.86
	$10^3$	3.29	3.63	3.93	4.19
10	0	2.68	3.14	3.51	3.84
$10^2$		3.04	3.43	3.77	4.06
$10^3$		5.06	5.24	5.41	5.57

(b) mc/m=4.0, P=0.8Pcr, U,V=0.3m 집중질량위치=중앙1개소, B.C= S-S-S-S					
WFP		SFP			
$K_{wl}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	1.59	2.34	2.87	3.29
	$10^2$	1.74	2.43	2.94	3.34
	$10^3$	2.65	3.08	3.45	3.77
10	0	1.64	2.38	2.89	3.32
$10^2$		2.22	2.78	3.22	3.59
$10^3$		4.74	4.95	5.14	5.31

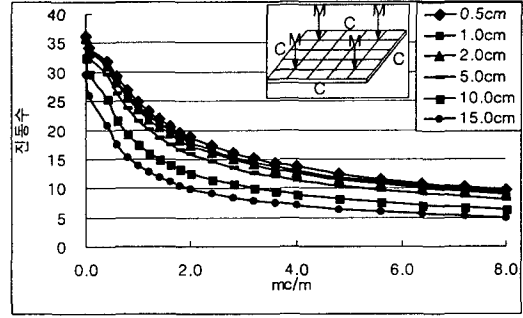
(c) mc/m=4.0, P=0.4Pcr, U,V=0.3m 집중질량위치=중앙1개소, B.C= C-C-C-C					
WFP		SFP			
$K_{wl}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	11.07	11.27	11.46	11.63
	$10^2$	11.10	11.30	11.49	11.66
	$10^3$	11.38	11.56	11.73	11.89
10	0	11.08	11.28	11.46	11.64
$10^2$		11.18	11.37	11.54	11.71
$10^3$		11.76	11.89	12.03	12.16

(d) mc/m=4.0, P=0.8Pcr, U,V=0.3m 집중질량위치=중앙1개소, B.C= C-C-C-C					
WFP		SFP			
$K_{wl}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	10.72	10.95	11.16	11.35
	$10^2$	10.75	11.19	11.19	11.38
	$10^3$	11.05	11.26	11.45	11.63
10	0	10.73	10.96	11.17	11.36
$10^2$		10.85	11.07	11.25	11.44
$10^3$		11.53	11.68	11.82	11.95

표4는 중앙집중질량을 갖는 판에 0.4Pcr, 0.8Pcr의 면내력을 받는 경우의 진동수를 나타낸 것이다. P=0.4Pcr인 경우 전단지반강성에 대한 변화보다 Winkler지반 강성에 대해 변화를 보였으며, 4변고정지지판의 경우는 강성변화에 비해 진동수의 변화가 크지 않음을 알 수 있다.



(a) 단순지지



(b) 고정지지

그림5. 집중질량을 갖는 판의 진동수 변화 (집중질량위치 : U,V=0.3m 4개소)

그림5. 는 U,V=0.3m에 4군데 집중질량을 갖는 경우이며 4변단순지지판은 그림4와 마찬가지로 질량 증가에 따라 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있다. 특히 4변고정지지판은 하중이 증가하면서 판의 두께에 따라 수렴하는 형태 및 진동수의 차이를 보였다.

표5. 비균질 지반위의 집중질량을 갖는 판의 진동수 ( $\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ )

(a) mc/m=1.0, P=0.4Pcr, U,V=0.3m 집중질량=0.3m위치 4개소, B.C= S-S-S-S						(b) mc/m=1.0, P=0.8Pcr, U,V=0.3m 집중질량=0.3m위치 4개소, B.C= S-S-S-S					
WFP		SFP				WFP		SFP			
$K_{w1}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$	$K_{w1}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	4.89	5.63	6.21	6.69	0	10	3.18	4.45	5.31	5.95
	$10^2$	5.06	5.76	6.32	6.79		$10^2$	3.47	4.64	5.45	6.07
	$10^3$	6.36	6.85	7.26	7.63		$10^3$	5.41	6.09	6.62	7.07
10	0	4.94	5.66	6.24	6.72	10	0	3.28	4.51	5.34	5.98
$10^2$		5.45	6.05	6.55	6.97	$10^2$		4.21	5.10	5.78	6.32
$10^3$		7.63	7.89	8.14	8.38	$10^3$		7.21	7.49	7.77	8.02

(c) mc/m=1.0, P=0.4Pcr, U,V=0.3m 집중질량=0.3m위치 4개소, B.C= C-C-C-C						(d) mc/m=1.0, P=0.8cr, U,V=0.3m 집중질량=0.3m위치 4개소, B.C= C-C-C-C					
WFP		SFP				WFP		SFP			
$K_{w1}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$	$K_{w1}$	$K_{w2}$	$K_G=0$	$K_G=5$	$K_G=10$	$K_G=15$
0	10	11.07	11.27	11.46	11.63	0	10	10.73	10.97	11.17	11.37
	$10^2$	11.10	11.30	11.48	11.66		$10^2$	10.77	10.99	11.20	11.39
	$10^3$	11.38	11.56	11.73	11.89		$10^3$	11.07	11.28	11.47	11.65
10	0	11.08	11.28	11.46	11.64	10	0	10.75	10.97	11.18	11.37
$10^2$		11.18	11.37	11.54	11.71	$10^2$		10.87	11.08	11.27	11.45
$10^3$		11.76	11.89	12.03	12.16	$10^3$		11.55	11.69	11.83	11.96

표5.는 U,V=0.3m 위치에 집중질량을 갖는 경우이다. 앞의 표4.의 경우와 같이 4변단순지지판에서 전단 지반강성 변화로 약간의 진동수차이를 보였다. 4변 고정지지의 경우는 강성에 대해 진동수변화는 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구는 집중 질량을 갖는 판의 좌굴응력과 고유진동수를 지반 강성에 변화를 주며 해석하였다. 판의 질량크기, 지반강성, 면내력, 지지조건등을 변화시켜가며 좌굴 및 진동수를 구하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 좌굴응력 산정시 전단지반(SFP)의 효과가 상당히 크게 나타났음을 알 수 있다.
2. 집중질량에 의한 판의 진동수는 질량의 차이보다 면내력의 크기에 따라 진동수에 더 많은 변화를 주었다.
3. 집중질량은 질량의 크기에 의한 진동수 변화 보다 작용하는 위치에 따라 많은 변화가 발생하였으며, 특히 중앙에 집중질량을 갖는 경우가 진동수를 크게 감소시키는 경향이 있었다.
4.  $U, V=0.3$ 위치에 작용하는 질량에 의해 4변고정판의 경우 질량이 작아짐에 따라 진동수 변화가 적으며 일정 질량 크기 이상에서 급격한 진동수 감소가 생긴 뒤 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있다.

#### 참고문헌

1. K. N.saha, R. C. Kar and P. K Datta, "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation", vol.63, pp 1213-1222, JCS, 1997.
2. H.Cohen and G.Handelman, Vibration of a rectangular plate with distributed added mass, J. Franklin Inst.261, 319-329 (1956)
3. K.H.Low. Analytical and experimental investigation on a vibration rectangular plates with mounted weights. J. Sound Vibr. 160(1), 111-121 (1993)
4. K.H.Low, C.K.Ng and Y.K.Ong, Comparative study of frequencies for carrying mass. ASCE J.Engng Mech. ASCE 119(5), 917-937 (1993)
5. L.S.Nair,G.Singh and G.Venkateswara Rao,"Stability of Shear Deformable Rectangular Plates using Finite Element Model",vol(55),pp 877-881, computer & structures,1995.
6. C.Mei, " Large amplitude vibrations of plates with initial stresses", vol(60), pp 461-464, JSV, 1978.
7. Y.F Rashed , M.H.Aliabadi , C.A. Brebbia, "A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation", vol(70), pp 515-532, JCS, 1999.
8. P.A.A Laura and R.H.Gutierrez, "Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method ", vol(101) , pp 307-315, JSV, 1985.
9. D.J.Gorman , " Free Vibration Analysis of Rectangular Plates ", Elsevier North Holland , 1982.
10. K.H.Low, C.K.Ng and Y.K.Ong, Comparative study of frequencies for carrying mass. ASCE J.Engng Mech. ASCE 119(5), 917-937 (1993)
11. 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술 발표 논문집, 제12권 2집 통권 제23호, pp 35-42, 1999.
12. 이수곤 외, "중간탄성지점을 갖는 유공부재의 탄성임계응력과 고유진동수와의 관계", 대한건축학회논문집 제8권 12호, pp 97-104, 1992.