

전단변형을 고려한 이방성 적층판의 좌굴해석 Buckling Analysis of Anisotropic Laminated Plates with Shear Deformation

최 용 회* 권 택 진**
Choi, Yong-Hee Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

This paper deals with the buckling load of antisymmetric angle-ply and cross-ply laminated rectangular plates. Buckling analysis is performed for a simply supported, shear deformable laminated plate subjected to uniaxial compression and biaxial compression combined with uniform lateral pressure. The shear deformation theory is considered to figure out a more exact behavior of laminated plates exactly.

The purposes of this study are to formulate anisotropic laminated plates with shear deformation and to investigate the buckling load according to the various variables of laminated plates by using the exact solutions for anisotropic laminated plates having simply supported boundary.

1. 서 론

일반적으로 구조물 설계시에 중요한 설계 요구 조건중의 하나로 중량 감소인데 이러한 중량감소는 강성의 저하를 초래하여 구조물의 안정성에 크게 영향을 미치나, 복합재료는 2종류 이상의 소재나 성분을 일체화시킨 재료로써, 구조물 자체의 높은 강성과 강도 그리고 내구성으로 인해 구조물의 경량화를 요구하는 항공산업, 조선산업, 자동차산업, 스포츠·레저산업뿐만 아니라 최근에는 건설자재에도 사용이 되어 건축·토목분야에 그 용도가 점차 확대되어가고 있는 실정이다.^{1,2)}

복합재료로 구성된 이방성 적층판은 적층판의 각도와 층수를 조절함으로써 결정할 수 있는 이방성 적층판의 특성을 가지고 있어서 요구조건에 따른 적합한 특성을 갖는 설계가 이루어지도록 합리적인 재료 배치가 요구된다. 또한, 판의 경우 두께가 두꺼워 질수록 전단변형에 의한 영향이 점점 커져서 전단변형을 고려하지 않은 두꺼운 판의 해석시 임계 좌굴하중이 과대 평가된다. 그러므로 본 논문에서는 전단변형을 고려하여 보다 정확한 적층판의 좌굴해석을 하였다.

본 연구에서는 전단변형을 고려한 이방성 적층판의 기초방정식을 정식화하고, 4변 단순지지경계를 갖는 수직교차 적층(cross-ply)판과 역대칭 앵글플라이(antisymmetric angle-ply)판에 대하여 이론적인 좌굴해석을 수행하였다. 또한 다양한 변수 즉, 변장/두께비(a/h), 탄성 계수비 (E_1/E_2), 적층수, 각도의 변화 그리고 변장비(a/b)의 변화에 따라 이방성 적층판의 일축압축과 이축압축시 임계 좌굴하중을 결정하였으며, 이를 고전이론과 비교하였다.

* 성균관대학교 건축학과 석사과정

** 정회원 · 성균관대학교 건축공학과 교수

2. 전단변형을 고려한 이방성 적층판의 좌굴 이론

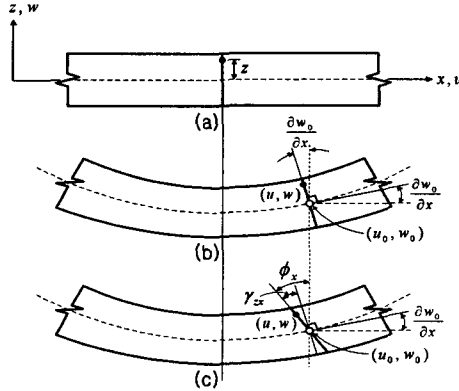


그림1. 판의 기하학적 형태

(a)변형전의 형태 (b)변형후의 형태(고전이론) (c)변형후의 형태(전단변형고려)

이방성 적층판의 좌굴식을 유도하기 위한 기본가정으로 그림1과 같이 변형 전 중립면에 수직이었던 면이 변형후에 직선을 유지하나 전단변형의 영향으로 중립면에 수직이 아니므로 전단변형을 고려하였다. 또한, 미소변형의 원리 $((\partial w/\partial x)^2 \ll 1, (\partial w/\partial y)^2 \ll 1)$ 를 사용하였으며, 법선의 길이가 일정 $(\epsilon_z \approx 0)$ 이라는 가정과 두께 방향의 수직응력은 무시 $(\sigma_z \approx 0)$ 하는 가정을 사용하였다.^{1),3)}

2.1. 구성방정식

이방성 적층에 대한 응력도-변형도 관계에서 m 번째 층에서의 구성 방정식은 식(1)과 같다.^{1),2),3)}

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_m \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} \cos \theta \sin^3 \theta + Q_{11} \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{12} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} \cos^3 \theta \sin \theta + Q_{11} \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta, \quad \bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

위 식(2)의 \bar{Q}_i 는 주재료 방향(principal material directions)으로 감소된 강성(reduced stiffnesses) Q_i 로부터 구조축 좌표계로 변환시킨 강성을 말한다. \bar{Q}_i 행렬은 “변환된 감소 강성행렬”이라 불리고, m 번째 층의

방향과 재료 특성을 나타낸다.

2.2. 합응력-합모멘트 관계식

전체 적층판에 대한 합응력-합모멘트에 관한 식은 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.^{1),2),3)}

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \epsilon_{0xy} \\ \chi_{0x} \\ \chi_{0y} \\ \chi_{0xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, 강성계수 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} ($i, j=1, 2, 6$), A_{ij} ($i, j=4, 5$) 는 층에 관한 적분이며, 다음과 같이 정의된다.^{1),2),3)}

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^N \int_{h_{m-1}}^{h_m} \bar{Q}_{ij}^{(m)}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$(A_{ij}) = \sum_{m=1}^N k_i k_j \int_{h_{m-1}}^{h_m} \bar{Q}_{ij}^{(m)} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (5)$$

여기서, A_{ij} 는 면내강성, B_{ij} 는 휨-면내 강성, D_{ij} 는 휨 강성이며, $k_i k_j$ 는 전단 보정계수이고 보통 5/6을 사용한다.

2.3. 면내하중

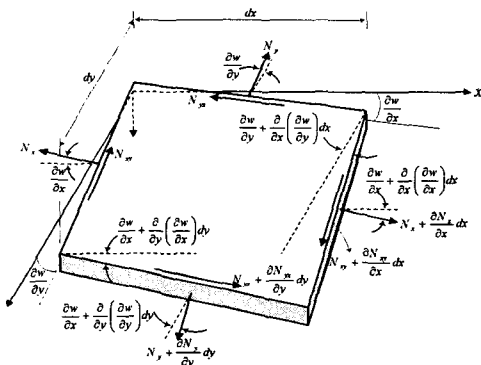


그림2. 면내하중에 의한 판의 변형 형태

좌굴은 평판에 작용하는 면내력에 의해 발생하며, 좌굴변형으로 인한 면내력의 수직분력이 휨을 일으킨다. 평판에 작용하는 면내력은 x 축 및 y 축 방향의 면내력은 N_x , N_y 와 전단응력에 의한 면내력 N_{xy} 가 있다.

그림2는 면내하중에 의한 판의 변형된 형태를 나타내며 z 축에 대해 합력을 구하고, 고차항을 무시하면 면내력은 식(6)과 같다.^{3),8)}

$$N(w) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

2.4. 이방성 적층판의 평형방정식

이방성 적층판의 평형방정식은 변형에너지라는 내적 포텐셜 에너지와 외력에 의한 외적 포텐셜에너지로부터 최소포텐셜에너지를 이용하여 식(7)과 같은 평형방정식을 구할 수 있다.^{1),2),3)}

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w) = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

위 식(7)에 식(3),(4)의 합응력-합모멘트식을 대입하면, 식(8)과 같은 변위항으로 된 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$L_{ij} d_i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 5) \quad (8)$$

여기서, $L_{ij} = L_{ji}$ 는 미분연산자이고, $d_i = \{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y\}^T$ 는 변위벡터이다.

3. 이론해석

적층판의 경계조건이 단순지지일 경우 변위와 하중을 이중삼각함수형태의 푸리에 급수(Fourier series)로 변환하고 평형방정식에 대입하여 그 해를 구하는 방법으로 수직교차 적층판과 역대칭 앵글플라이판에 적용하여 해를 구하였다.^{4),5),6)}

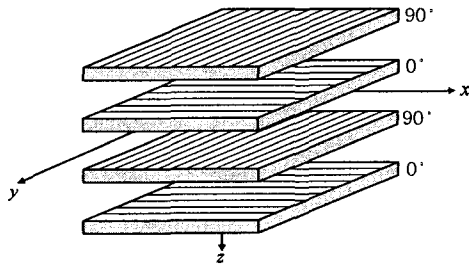


그림3. 수직교차 적층판의 형상

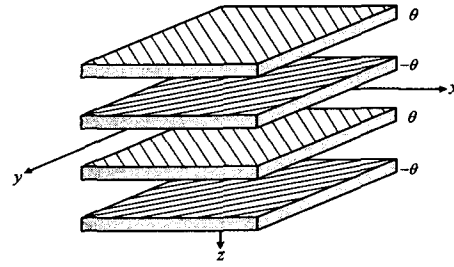


그림4. 역대칭 앵글플라이판의 형상

3.1. 수직교차 적층판

수직교차 적층판은 주재료방향인 x 축과 0° 와 90° 방향으로 이루어지고 그림3과 같으며, 수직교차 적층판의 4변 단순지지 경계조건과 이를 만족하는 이중삼각함수의 급수형태는 식(9),(10)과 같다.

$$\begin{aligned} x = 0, a \text{ 에서 } v_0 = w_0 = \phi_y = N_x = M_x = 0 \\ y = 0, b \text{ 에서 } u_0 = w_0 = \phi_x = N_y = M_y = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y, \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{xmn} \cos \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (10)$$

$$\phi_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ymn} \sin \alpha x \cos \beta y$$

여기서, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ 이다.

위 식(10)을 평형방정식 (8)에 대입하면 수직교차 적층판의 강성 K_{ij} 는 식(11)과 같다

$$\begin{aligned}
K_{11} &= -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2, \quad K_{12} = -(A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \quad K_{13} = 0, \quad K_{14} = -(B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2) \\
K_{15} &= -(B_{12} + B_{66})\alpha\beta, \quad K_{22} = -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad K_{23} = 0, \quad K_{24} = K_{15} \\
K_{25} &= -(B_{66}\alpha^2 + B_{22}\beta^2), \quad K_{33} = -A_{55}\alpha^2 - A_{44}\beta^2 + N_x\alpha^2 + N_y\beta^2, \quad K_{34} = A_{55}\alpha, \quad K_{35} = A_{44}\beta \\
K_{44} &= -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - A_{55}, \quad K_{45} = -(D_{12} + D_{66})\alpha\beta, \quad K_{55} = -D_{66}\alpha^2 - D_{22}\beta^2 - A_{44}
\end{aligned} \tag{11}$$

3.2. 역대칭 앵글플라이판

역대칭 앵글플라이판은 중앙면에 대해 주재료 방향인 x 축과 θ 와 $-\theta$ 로 역대칭으로 이루어진 판을 말하며 그림4와 같으며, 역대칭 앵글플라이판의 4변 단순지지 경계조건과 이를 만족하는 이중삼각함수의 급수형태는 식(12),(13)과 같다.

$$\begin{aligned}
x = 0, a \quad \text{에서} \quad u_0 = w_0 = \phi_y = N_{xy} = M_x = 0 \\
y = 0, b \quad \text{에서} \quad v_0 = w_0 = \phi_x = N_{xy} = M_y = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y, \quad v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
w_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{xmn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
\phi_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ymn} \sin \alpha x \cos \beta y
\end{aligned} \tag{13}$$

여기서, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ 이다.

위 식(13)을 평형방정식(8)에 대입하면 역대칭 앵글플라이판의 강성행렬 K_{ij} 는 식(14)과 같다.

$$\begin{aligned}
K_{11} &= -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2, \quad K_{12} = -(A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \quad K_{13} = 0, \quad K_{14} = -2B_{16}\alpha\beta \\
K_{15} &= -(B_{16}\alpha^2 + B_{26}\beta^2), \quad K_{22} = -A_{66}\alpha^2 - A_{22}\beta^2, \quad K_{23} = 0, \quad K_{24} = K_{15} \\
K_{25} &= -2B_{26}\alpha\beta, \quad K_{33} = -A_{55}\alpha^2 - A_{44}\beta^2 + N_x\alpha^2 + N_y\beta^2, \quad K_{34} = A_{55}\alpha, \quad K_{35} = A_{44}\beta \\
K_{44} &= -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - A_{55}, \quad K_{45} = -(D_{12} + D_{66})\alpha\beta, \quad K_{55} = -D_{66}\alpha^2 - D_{22}\beta^2 - A_{44}
\end{aligned} \tag{14}$$

면내하중에 의한 임계좌굴하중을 구하기 위해 강성행렬식을 행렬 응축기법을 사용하고 행렬식을 '0'으로 놓으면, 임계좌굴하중에 관한 식으로 식(15)와 같다.

$$N_0 = \frac{1}{\alpha^2 + k\beta^2} \left(K_{33} - \frac{K_{34}\bar{K}_{55} - K_{35}\bar{K}_{54}}{\bar{K}_{44}\bar{K}_{55} - \bar{K}_{45}\bar{K}_{54}} K_{34} - \frac{\bar{K}_{44}K_{35} - \bar{K}_{45}K_{34}}{\bar{K}_{44}\bar{K}_{55} - \bar{K}_{45}\bar{K}_{54}} K_{34} \right) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\text{여기서, } \bar{K}_{44} &= K_{44} - K_{14}\frac{c_1}{c_0} - K_{24}\frac{c_2}{c_0}, \quad \bar{K}_{45} = K_{45} - K_{15}\frac{c_1}{c_0} - K_{25}\frac{c_2}{c_0} \\
\bar{K}_{54} &= K_{45} - K_{14}\frac{c_3}{c_0} - K_{24}\frac{c_4}{c_0}, \quad \bar{K}_{55} = K_{55} - K_{15}\frac{c_3}{c_0} - K_{25}\frac{c_4}{c_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{12} & c_1 = K_{14}K_{22} - K_{12}K_{24} \\ c_2 = K_{11}K_{24} - K_{12}K_{14} & c_3 = K_{15}K_{22} - K_{12}K_{25} \\ c_4 = K_{11}K_{25} - K_{12}K_{15} \end{pmatrix}, N_x = -N_0, N_y = -kN_0 \text{ 이다.}$$

4. 해석 결과 및 분석

좌굴 해석에서 수직교차 적층판과 역대칭 앵글플라이판의 면내력에 의한 임계좌굴하중을 결정하였다. 수직교차 적층판의 경우, 변장/두께비(a/h)의 변화에 따른 일축압축과 이축압축에 대해 좌굴하중값을 고전이론과 비교 분석하였으며, 적층수, 변장비(a/b), 변장/두께비(a/h), 탄성계수비 (E_1/E_2) 등의 다양한 변수에 따른 임계좌굴하중을 그래프로 비교하였다. 역대칭 앵글플라이판에서는 일축압축과 이축압축하에 각도의 변화에 따른 임계좌굴하중값과 변장비(a/b)의 변화에 대한 임계좌굴하중의 변화를 비교·분석하였다. 좌굴하중의 무차원화 계수로는 $\bar{N} = N_c(b^2/E_2h^3)$ 을 사용하였으며, 본 논문에 사용된 계수로는 $a/b=1, E_1/E_2=25, G_{12}/E_2=0.5, G_{13}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.2, \nu_{12}=0.25, k_i k_j=5/6$ 이다.

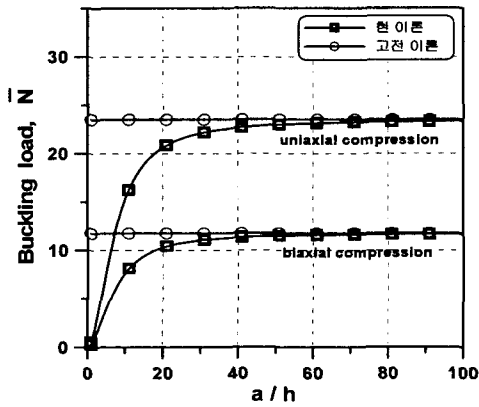


그림5. 재하방법에 따른 임계좌굴하중(0/90/90/0)

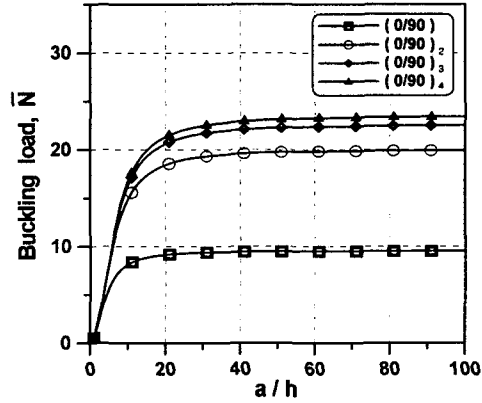
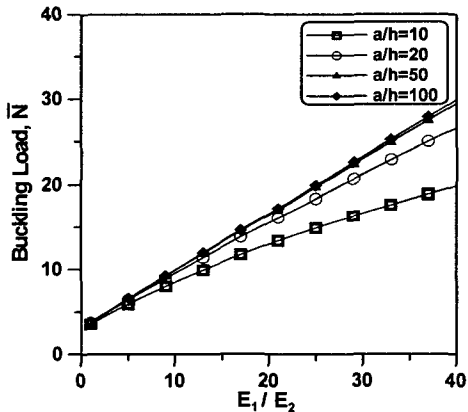
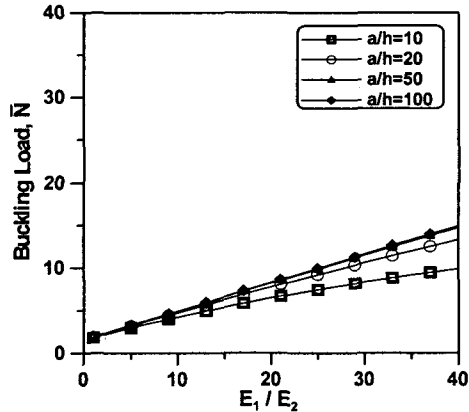


그림6. 층수의 변화에 따른 임계좌굴하중

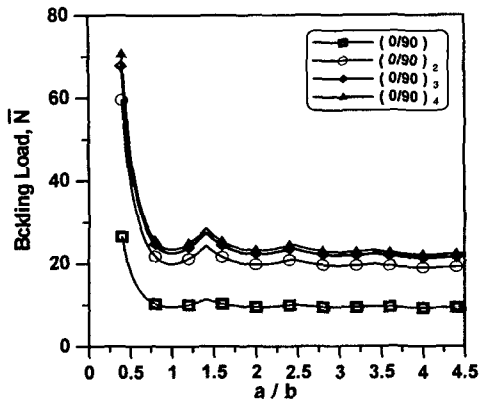


(a)일축압축 ($k=0$)

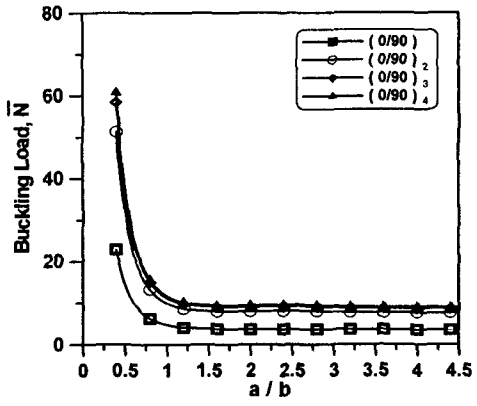


(b)이축압축 ($k=1$)

그림7. 변장/두께비(a/h)와 탄성계수비 (E_1/E_2)변화에 따른 임계좌굴하중 (0/90/90/0)인 경우

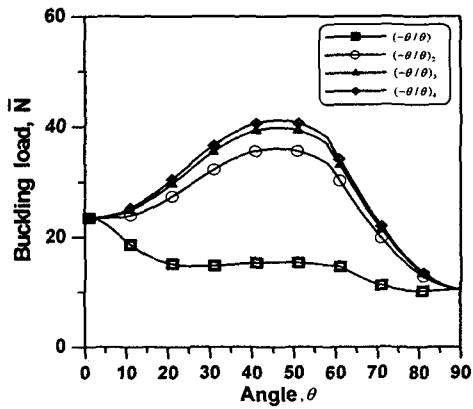


(a) 일축압축 ($k=0$)

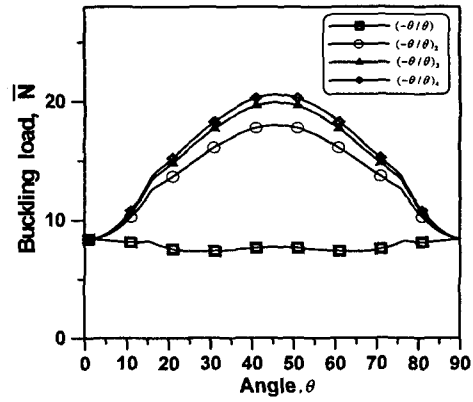


(b) 이축압축 ($k=1$)

그림 8. 적층수와 변장비(a/b)에 따른 임계좌굴하중

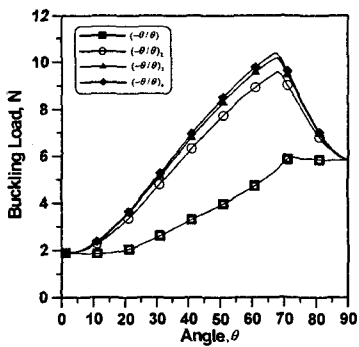


(a) 일축압축 ($k=0$)

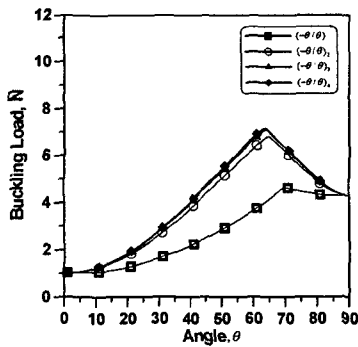


(b) 이축압축 ($k=1$)

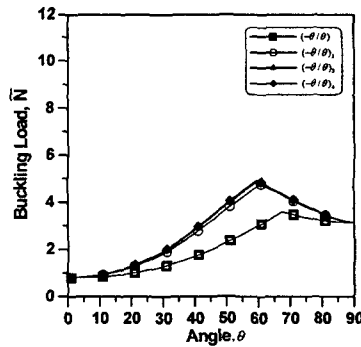
그림 9. 적층수와 각도의 변화에 따른 임계 좌굴하중



(a) $a/b=2$



(b) $a/b=3$



(c) $a/b=4$

그림 10. 변장비(a/b)와 각도의 변화에 따른 임계좌굴하중 이축압축 ($k=1$)

그림5는 고전이론과 전단변형을 고려한 이론의 차이를 비교하여 적층판의 두께가 증가할수록 두이론의 차이가 점점 커져서 전단변형의 중요성을 나타낸 그래프이다. 그림6은 적층수가 증가할수록 임계좌굴하중이 커져 적층판의 중요성을 알 수 있으며, 그림7은 일축압축과 이축압축시의 변장/두께비(a/h)와 탄성계수비(E_1/E_2)의 변화에 따라 좌굴하중을 비교하여 탄성계수비가 커질수록 임계좌굴하중의 변화정도를 파악할 수 있었다. 그림8에서는 일축압축과 이축압축시 변장비(a/b)의 변화에 따라 좌굴하중을 해석한 결과 변장비(a/b)가 증가할수록 모드의 영향을 알 수 있었고 일축압축시 보다 이축압축시 변장비(a/b)가 증가할 때 모드의 변화 영향이 적음을 알 수 있었다. 그림10은 변장비(a/b)의 변화에 따른 임계좌굴하중은 변장비(a/b)가 커질수록 줄어들며, 최적각도의 변화정도를 파악 할 수 있었다.

5. 결 론

전단변형을 고려한 이방성적층판의 정식화를 통해 다양한 변수에 따른 좌굴해석을 수행한 결과 본 연구에서 얻은 결론으로는 첫째, 전단변형의 효과는 적층판의 변장/두께비(a/h)가 감소할수록 즉, 판이 두꺼워 질수록 크게 나타나는데, 변장/두께비(a/h)가 30이하인 경우 공학 오차한도인 5% 이상이 되므로 전단변형을 반드시 고려하여야 한다. 둘째, 일축압축과 이축압축시 좌굴을 해석한 결과 이축·압축하에서는 45°를 중심으로 대칭을 이루며 4개층 이상 적층판의 경우 45°에서 가장 큰 임계좌굴하중을 얻을 수 있으며, 일축압축하에서는 대칭을 이루지 않고 90°에서 가장 불리한 적층각을 이룸을 알 수 있다. 셋째, 적층판은 4개층 이상일 경우 단층에 비해 적층이 갖는 효과가 크게 나타남을 알 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2001년도 BK21 핵심 분야사업비에 의하여 지원되었음을 밝히며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, First Edition, E & FN Spon, 1995.
2. Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated An-isotropic Plates*, Technomic Publishing Company, Inc., 1987.
3. Turvey, G. J., *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*, Chapman & Hall, 1995.
4. Aiello, M. A. and Ombres, L., "Buckling and Vibrations of Unsymmetric Laminates Resting on Elastic Foundations under in-plane and shear forces," *Composite Structures*, Vol. 44, 1999, pp.31-41.
5. Narita, Yoshihiro and Leissa, Arthur W., "Buckling Studies for Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 32, pp.909-924.
6. Liew, K. M. and Xiang, Y. and Kitipornchai, S., "Analytical Buckling Solutions for Mindlin Plates Involving Free Edges," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 38, No. 10, 1996, pp. 1127-1138.
7. Chattopadhyay, A. and Gu, H., "Exact Elasticity Solution for Buckling of Composite Laminates," *Composite Structures*, Vol. 34, 1996, pp.291-299.
8. 김상식, *구조안정해석*, 문운당, 1999, pp.200-249.
9. 半谷裕彦, *平板の基礎理論*, 彰國社, 1995.