

## 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 정적 요소강도행렬

### Exact Static Element Stiffness Matrix of Shear Deformable Nonsymmetric Thin-walled Elastic Beams

김 남 일\*      광 태 영\*\*      이 준 석\*\*\*      김 문 영\*\*\*\*  
Kim, Nam-II   Kwak, Tae-Young   Lee, Jun-Seok   Kim, Moon-Young

#### ABSTRACT

Derivation procedures of exact static element stiffness matrix of shear deformable thin-walled straight beams are rigorously presented for the spatial buckling analysis. An exact static element stiffness matrix is established from governing equations for a uniform beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. First this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, the displacement functions of displacement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using member force-displacement relationships. The buckling loads are evaluated and compared with analytic solutions or results of the analysis using ABAQUS' shell elements for the thin-walled straight beam structure in order to demonstrate the validity of this study.

#### 1. 서 론

비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뿔대부재의 비틀 및 횡좌굴에 대한 해석이론에 대하여 Kim<sup>등1,2)</sup> 및 Chang<sup>등3)</sup>은 단면회전의 2차효과를 고려한 박벽 공간뿔대구조의 횡좌굴 이론을 제시하였다.

지금까지의 박벽보 구조의 좌굴해석에 관한 연구에서 Leung<sup>4,5)</sup> 및 Banerjee와 Williams<sup>6)</sup> 그리고 Willamas와 Wittrick<sup>7)</sup> 등은 정적강도행렬을 엄밀히 산정하는 방법을 제시하였지만 전단변형 및 회전관성효과를 고려하여 엄밀하게 정적강도행렬을 산정하는 기법을 제시한 연구는 찾아볼 수 없었다.

본 연구에서는 전단변형 및 회전관성효과를 고려한 박벽보 구조의 정적응력해석 및 좌굴해석을 수행하기 위하여 임의의 경계조건을 가지며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 해석기법을 제시한다.

먼저 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 평형방정식과 힘-변위 관계식을 얻는다. 이 지배방정식은 고차의 연립미분방정식이므로 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환시킨다.

이때 운동방정식의 경우와는 달리 평형방정식은 8개의 적분상수가 발생하므로 이를 제거한 후에 6개의 비제차 연립 1계 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 얻는다. 이로부터 제차해와 특별해를 각각 풀어서

\* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정  
\*\* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정  
\*\*\* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정  
\*\*\*\* 성균관대학교 토목환경공학과 교수

엄밀한 처짐함수를 얻는다. 그리고 힘-변위 관계식을 적용함으로써 엄밀한 정적 14×14 요소강도행렬을 산정한다. 마지막으로 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단 순지지 및 캔틸레버 박벽보에 대한 좌굴하중을 산정하고, 해석해 혹은 ABAQUS의 쉘요소<sup>8)</sup>를 이용한 해석결과와 비교, 검토한다.

## 2. 전단변형을 고려한 박벽보의 정적 요소강도행렬

### 2.1 박벽보의 평형방정식의 변환

본 연구에서는 전단력, 비틀모멘트 그리고 바이모멘트가 각각 영( ${}^oF_2 = {}^oF_3 = {}^oM_1 = {}^oM_\phi = 0$ )이어서 축력, 휨모멘트가 부재축을 따라서 일정한 경우에 정적강도행렬을 산정한다. 안정성 해석을 위한 비대칭 직선 박벽 보 요소의 평형방정식의 엄밀해를 구하는데, 이전 연구<sup>9)</sup>에서 개발된 운동방정식의 해법을 그대로 사용할 수 없다. 14개의 연립 미분방정식으로 변환한 후에 고유치문제의 해를 구할때 복수개의 영의 값을 갖는 고유치가 발생하기 때문이다. 이러한 영의 값을 갖는 고유치를 제거하기 위하여 가능한 미리 적분하는 것이 필요하다. 문헌<sup>9)</sup>의 운동방정식 (1)을 적분한 결과는 다음과 같다.

$$U_x + S_2\omega_2/A - S_3\omega_3/A = a_1 + a_2x \quad (1a)$$

$$GA_2(U_y' - \omega_3) + GA_{23}(U_z' + \omega_2) + GA_{2r}(\omega_1' + f) + {}^oF_1U_y' - {}^oM_2\omega_1' = a_6 \quad (1b)$$

$$EI_3\omega_3' - ES_3U_x' - EI_{23}\omega_2' - EI_{3\phi}f' - {}^oF_1U_y + {}^oM_2\omega_1 = a_5 - a_6x \quad (1c)$$

$$GA_3(U_z' + \omega_2) + GA_{23}(U_y' - \omega_3) + GA_{3r}(\omega_1' + f) + {}^oF_1U_z' - {}^oM_3\omega_1' = a_{10} \quad (1d)$$

$$EI_2\omega_2' + ES_2U_x' - EI_{23}\omega_3' + EI_{2\phi}f' + {}^oF_1U_z - {}^oM_3\omega_1 = a_9 + a_{10}x \quad (1e)$$

$$\begin{aligned} GJ\omega_1' + GA_{1r}(\omega_1' + f) + GA_{2r}(U_y' - \omega_3) + GA_{3r}(U_z' + \omega_2) \\ - {}^oM_2U_y' - {}^oM_3U_z' + {}^oM_\phi\omega_1' = a_{14} \end{aligned} \quad (1f)$$

$$EI_\phi f' + EI_{2\phi}\omega_2' - EI_{3\phi}\omega_3' + GJ\omega_1 - {}^oM_2U_y - {}^oM_3U_z + {}^oM_\phi\omega_1 = a_{13} + a_{14}x \quad (1g)$$

여기서  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14$  는 7개의 미분방정식을 각각 적분하여 발생한 8개의 적분상수이다.

운동방정식의 해를 구하는 경우의 변위벡터와는 달리, 다음과 같이 14개의 변위 파라미터로 구성되는 변위벡터를 정의한다.

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \rangle^T \quad (2)$$

여기서

$$d_1 = U_x + S_2\omega_2/A - S_3\omega_3/A \quad (3a)$$

$$d_2 = U_x' + S_2\omega_2'/A - S_3\omega_3'/A \quad (3b)$$

$$d_3 = U_y, \quad d_4 = \omega_3 \quad (3c,d)$$







$$s_1 = EA, \quad s_2 = 1.0, \quad s_3 = {}^oF_1, \quad s_4 = -0.5 {}^oM_2, \quad s_5 = -0.5 {}^oM_3, \quad s_6 = -GJ - {}^oM_p$$

이후의 정적 요소강도행렬의 유도과정은 참고문헌<sup>9)</sup>의 동적강도행렬의 유도과정과 동일하다. 요소의 절점변위를 나타내는 식 (15)를 식 (16)에 대입하면, 다음과 같이 임의의  $x$ 에서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위 파라미터 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = S X(x) E^{-1} U_e \quad (18)$$

한편 부재양단의 절점력벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$F_e = \langle F^p, F^q \rangle^T \quad (19a)$$

여기서

$$F^a = \langle F_1^a, F_2^a, M_3^a, F_3^a, M_2^a, M_1^a, M_\phi^a \rangle^T, \quad a = p, q \quad (19b)$$

이제 식 (18)을 이용하여 부재 양단( $x = 0, l$ )의 부재력을 구한후 정리하면 박벽 직선보의 엄밀한 정적 요소강도행렬  $K$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_e = K U_e \quad (20a)$$

여기서,

$$K = \begin{bmatrix} -S X(0) E^{-1} \\ S X(l) E^{-1} \end{bmatrix} \quad (20b)$$

박벽보 구조의 좌굴하중은 대응하는 하중파라미터  $\lambda$ 를 변화시키서 정적강도행렬의 행렬식이 영이 되는 조건으로부터 산정할 수 있다.

$$\det | K(\lambda) | = 0 \quad (21)$$

### 3. 수치해석

#### 3.1 단순지지 보구조

다음의 표 1은 아래와 같은 단면제원을 가지는 단순지지 비대칭 박벽보에 대하여 전단변형효과를 고려할 경우, 본 연구에서 제안한 방법과 해석해<sup>10)</sup>를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 본 연구에 의한 결과와 해석해가 서로 일치함을 알 수 있다.

$$E = 10000.0 \text{ N/cm}^2, \quad G = 5000.0 \text{ N/cm}^2, \quad A = 30.0 \text{ cm}^2, \quad J = 10.0 \text{ cm}^4, \quad L = 100.0 \text{ cm}$$

$$I_2 = 100. \text{ cm}^4, \quad I_3 = 800. \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 83750. \text{ cm}^6, \quad I_{2\phi} = 600. \text{ cm}^5, \quad I_{3\phi} = -8000. \text{ cm}^5$$

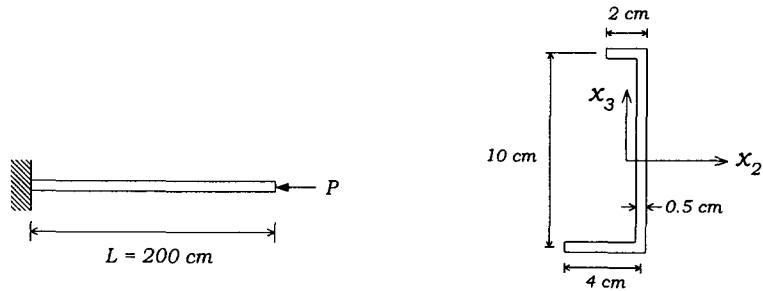
$$\beta_1 = 30.0 \text{ cm}^2, \quad \beta_2 = 25.0 \text{ cm}, \quad \beta_3 = -22.0 \text{ cm}, \quad f_{\phi 2} = 30, \quad f_{\phi 3} = 50, \quad C_r = 20$$

표 1. Flexural-torsional buckling load under axial load P [N]

mode	at shear center		at centroid		at $(x_2, x_3) = (-5, 7)$	
	Present study	Analytic solution	Present study	Analytic solution	Present study	Analytic solution
1	184.528	184.528	261.338	261.338	242.156	242.156
2	742.641	742.641	960.533	960.533	2511.28	2511.28
3	3061.37	3061.37	15375.5	15375.5	9066.84	9066.84

3.2 캔틸레버 보구조

본 예제에서는 비대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽 보구조에 대하여 좌굴해석을 수행한다. 그림 1은 축력  $P$ 이 도심에 작용하는 길이  $L = 200\text{ cm}$ 인 캔틸레버 보구조와 단면을 보여주고 있으며, 단면제원은 아래와 같다.



(a) Cantilever beam under an axial load (b) Nonsymmetric channel section

그림 1. Cantilever beam with nonsymmetric channel section

$$E = 30000.0\text{ N/cm}^2, G = 11500.0\text{ N/cm}^2, A = 8.0\text{ cm}^2, J = 0.6667\text{ cm}^4, L = 200\text{ cm}$$

$$I_2 = 114.872\text{ cm}^4, I_3 = 7.54463\text{ cm}^4, I_\phi = 408.333\text{ cm}^6, I_{2\phi} = 182.413\text{ cm}^5, I_{3\phi} = 18.9757\text{ cm}^5$$

$$\rho = 0.00785\text{ kg/cm}^3, \beta_1 = 15.3021\text{ cm}^2, \beta_2 = 0.57706\text{ cm}, \beta_3 = 5.93192\text{ cm}$$

$$f_2 = 5.28221, f_3 = 1.79271, C_r = 0.01766$$

표 2. Flexural-torsional buckling loads for cantilever under axial load at centroid [N]

mode	With shear deformation	Without shear deformation	ABAQUS
1	13.789	13.800	14.001
2	111.84	112.55	113.10
3	191.16	191.84	190.08
4	255.10	258.54	256.67
5	406.28	414.76	408.53

좌굴하중은 가장 작은 값만 물리적 의미를 갖지만 여기서는 수치적인 비교를 위하여, 표 2에 정적강도행렬을 이용한 5개의 엄밀해와 9절점 감차적분이 적용된 600개의 ABAQUS 쉘요소(S9R5)를 사용한 유한요소해를 함께 제시하였다. 표에서 보는 바와 같이 고차 모드로 갈수록 전단변형효과를 고려한 직선보요소에 의한 해석결과가 전단변형효과를 무시한 해석결과와 비교하여 ABAQUS의 결과에 보다 근접함을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

전단변형을 고려한 비대칭 단면을 가지는 직선 박벽보의 3차원 좌굴해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다. 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여 엄밀한 정적강도행렬을 유도하였다. 요소강도행렬을 이용하여 단순지지 및 캔틸레버 보구조에 대한 좌굴하중을 산정하고, 해석해 및 ABAQUS 쉘요소를 이용한 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. Hermitian다항식 혹은 isoparametric interpolation 함수와 같은 형상함수를 도입하여 일반적으로 산정하는 요소강도행렬과는 달리, 본 연구의 요소강도행렬은 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.

#### 참고 문헌

1. Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams I: analytical approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.4097-4115.
2. Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability analysis of thin-walled space frames", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.39, 1996, pp.499-525.
3. Chang S.P., Kim S.B. and Kim M.Y., "Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches", *Journal of Engineering Mechanics* Vol.112, No.9, 1996, pp.844-854.
4. Leung A.Y.T., "Dynamic stiffness for lateral buckling", *Computers and Structures* Vol.42, No.3, 1992, pp.321-325.
5. Leung A.Y.T., "Non-conservative dynamic stiffness analysis of axial-lateral buckling", *Journal of Sound and Vibration* Vol.165, No.3, 1993, pp.553-561.
6. Banerjee J.R. and Williams F.W., "Exact Bernoulli-Euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.23, 1986, pp.1615-1628.
7. Williams F.W. and Wittrick W.H., "Exact buckling and frequency calculations surveyed", *Journal of Structural Engineering* Vol.109, No.1, 1983, pp.169-187.
8. *ABAQUS User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.
9. 김문영, 김남일, 윤희택, "초기하중을 받는 전단변형을 고려한 비대칭 박벽보의 엄밀한 동적 요소강도행렬", 대한토목학회 논문집, 심사중, 2001.
10. Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams II: numerical approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.4117-4140.