

접합부 강성변화를 고려한 단층 래티스 돔의 좌굴해석

Buckling Analysis for Single Layer Latticed Domes considering the Change of Joint Rigidity

이 후진* 권택진**
Lee, Hu-Jin Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

This paper is concerned with the change of joint rigidity in estimating the degree of semi-rigidity of connections and the buckling load in a single layer latticed dome. The estimations are based on information about the ratio for the rotational stiffness of the connection to the flexural stiffness of the member and the minimum eigenvalue of a structure for pinned, semi-rigid and completely rigid cases, respectively. Connection characteristics are reflected in the ratio control of joint rigidity for the DOFs to be related using the spring element by FEM.

1. 서 론

단층 래티스 돔은 세장한 선형부재로 구성되어 곡률을 가진 곡면구조형태의 셀구조의 원리에 의해 만들어진 형태저항형 구조이며 스페이스 프레임 구조의 일종이다. 또한 다양한 기하학적 패턴에 의해 조형미가 우수하고, 경량이면서 강성이 높다는 역학적 합리성과 그 기능성으로 인해 내부에 기둥이 없는 대공간 구조물 구현에 현재 널리 사용되고 있다. 단층 래티스 돔의 구조적 특징은 연속체 셀과 외관적, 역학적으로 유사한 특징을 가지므로 자체의 곡률을 이용하여 면외방향으로 작용하는 외부하중을 면내력으로 저항할 수 있다는 것이다. 그러나 선형의 부재로 이루어져 사용 재료의 경량화와 단면의 최소화에 의해 외력이 어느 한 계 값에 도달하면, 부재가 재료적인 비선형성을 나타내기 전에 좌굴이라고 하는 탄성 불안정 현상으로 인해 파괴되는 경향을 보인다.⁽¹⁾

단층 래티스 돔의 좌굴은 접합부 강성, 경계조건, 하중에 의해 크게 영향을 받는다. 특히, 접합부에 대해서는 일반적인 해석에 있어 완전한 핀접합이나 완전한 강접으로 고려된다. 그러나 대부분의 실제 구조물의 접합부 거동은 일반적으로 반강접(semi-rigid)이라고 하는 거동특성에 의해 이 두 극단적인 부류(핀접합, 강접)사이 어딘가에 속하게 된다. 각 부재들의 접합형식에 따른 이러한 현상은 전체 구조물 거동에 미치는 영향이 크기 때문에 접합부의 반강접성에 대한 정확한 평가가 반드시 이루어져야 한다.

본 논문에서는 탄성안정문제에 있어서 단층 래티스 돔의 접합부 특성이 반영된 좌굴현상을 규명하는 것을 목적으로 한다. 따라서 현재 돔 제작에서 일반적으로 많이 사용되고 있으며, 반강접 거동특성을 보이는 메로 시스템(mero system)으로 구성된 단층 래티스 돔을 대상으로 접합부 형식을 반영하기 위한 접합부 단위모델을 제안한다. 여기서 제안된 단위모델을 사용하여 해석하려는 구조물을 모델링하고 이산화해석법의 대표적인 유한요소법을 사용하여 정식화한다. 그리고 접합부 모델의 강성변화에 따른 선형좌굴해석을 수행하여, 여기서 얻어진 최소 고유치로 좌굴하중과 좌굴모드를 구한다.

* 성균관대학교 건축학과 석사과정

** 성균관대학교 건축학과 교수

2. 래티스 구조물의 불안정 현상

래티스 구조물은 세장한 선형부재들의 결합으로 이루어져 있기 때문에 일반 구조물과는 다른 양상으로 좌굴과 같은 불안정 현상에 민감하게 반응하여 구조물 전체에 영향을 줄 수 있다. 따라서 이러한 불안정 현상에 대해 우선 살펴보기로 한다.

2.1. 구조물의 안정성

안정상태에 있는 구조물에 외력이 작용하여 탄성적인 변형을 할 경우, 외력과 내력은 안정 평형상태를 이룬다. 여기서 물체의 안정성은 외력에 의해 식(2.1)의 물체의 포텐셜 에너지 Π 가 증가하면 안정한 상태이며, 감소하면 불안정한 상태인 것으로 파악할 수 있다.

$$\Pi = U - W \quad (2.1)$$

여기서, $U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$: 내력에 의한 변형도 에너지
 $W = \int_V F_i u_i dV + \int_S T_i u_i dS$: 외력에 의한 일, F_i : 물체력, T_i : 표면력

그러나 물체의 변형 양식에 따라서는 변형 또는 외력의 크기가 어느 정도 이상이 되면 지금까지의 변형과는 전혀 다른 변형 양식의 안정 평형상태로 이동하거나 급격한 대변형의 발생으로 인해 파괴된다. 이러한 현상을 다루는 탄성안정(elastic stability) 문제는 유한요소 강성방정식의 탄젠트 강성행렬의 특성에 따라 파악될 수 있으며, 구조물의 안정성 여부를 결정하기 위해서는 탄젠트 강성행렬의 행렬값 및 고유치 해석이 병행되어야만 한다.

2.2. 불안정 현상의 종류

단층 래티스 등에 나타나는 불안정 현상에는 발생모드에 따라 부재좌굴(member buckling), 절점좌굴(joint buckling) 및 전체좌굴(overall buckling)로 분류할 수 있으며 구조물에 미치는 영향은 매우 크다. 또한 하중-변위 곡선상의 평형경로의 특성에 따라 분기현상(bifurcation), 굴복현상(flattening) 및 뾰현상(snap-through)으로 구분할 수 있다. 여기서 분기현상과 뾰현상은 탄젠트 강성행렬 $[K_T]$ 의 행렬값과 고유치에 따라 파악될 수 있으며, 특히 탄성안정문제의 대부분을 차지하는 이러한 분기현상은 Euler 좌굴문제와 같은 선형좌굴문제이다. 수학적으로는 고유치문제가 여기에 해당되며 진동 고유치문제와 구별되는 점은 좌굴문제의 경우, 최소 고유치만의 문제로 된다는 점이다.⁽²⁾

3. 단층 래티스 등의 접합부 모델

3.1. 보-기둥 요소의 강성 방정식

래티스 구조물의 해석 시 접합부를 편으로 가정하여 각 부재의 단부에서는 회전 모멘트가 발생하지 않는 것으로 가정하지만, 실제로 있어서는 어느 정도의 휨강성이 생기므로 이러한 반강접성을 해석에 반영하기 위해서 입체 트러스 요소 대신에 그림1에서와 같은 보-기둥 요소를 사용하여 유한요소로 정식화하였다. 요소 좌표계의 절점하중 벡터와 절점변위 벡터는 다음의 식(3.1)과 같다.

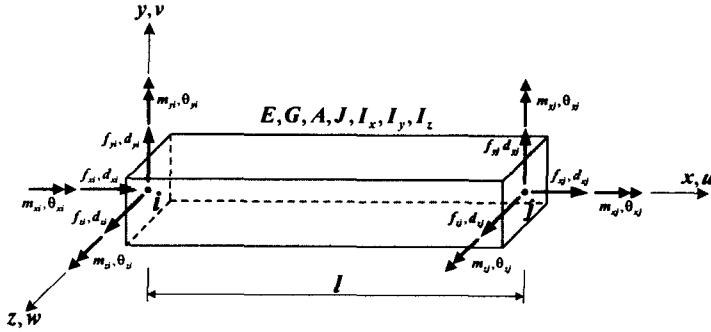


그림1 보-기동 요소

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{ f_{xi}, f_{yi}, f_{zi}, m_{xi}, m_{yi}, m_{zi}, f_{xj}, f_{yj}, f_{zj}, m_{xj}, m_{yj}, m_{zj} \}^T \\ \mathbf{d} &= \{ d_{xi}, d_{yi}, d_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, d_{xj}, d_{yj}, d_{zj}, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj} \}^T \end{aligned} \quad (3.1)$$

일반적인 보 요소에서 부재요소 내 임의의 변위를 절점변위 벡터 $\{d\}$ 를 사용하여 나타내면 식(3.2)와 같다.

$$\{ \bar{d} \} = [N] \{ d \} \quad (3.2)$$

여기서, $\{ \bar{d} \} = \{ u, v, w, \Theta_x, \Theta_y, \Theta_z \}^T$ 는 요소 내 임의의 변위벡터, $[N]$ 는 절점변위를 경계조건에 의해 계산된 변위 형상함수이다.

식(3.2)에서 얻어진 변위 형상함수를 변형도-변위관계식에서 형상함수의 도함수를 행렬 $[B]$ 라 하면,

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ d \} \quad (3.3)$$

여기서 변형도-합응력 관계식을 구하고 식(3.3)을 대입하면 다음과 같은 절점변위에 의한 함수를 구할 수 있다.

$$\{ \sigma \} = [E] \{ \varepsilon \} = [E] [B] \{ d \} \quad (3.4)$$

여기서 식(2.1)을 행렬형태로 바꾸어 이로부터 가상일의 원리를 적용하면

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = \int_V \{ \delta \varepsilon \}^T \{ \sigma \} dV - \{ \int_V \{ \delta d \}^T \{ F \} dV + \int_S \{ \delta d \}^T \{ T \} dS \} = 0 \quad (3.5)$$

다시 식(3.5)에 식(3.3)과 식(3.4)를 각각 대입하여 정리하면

$$\int_V [B]^T [E] [B] dV \{ \bar{u} \} = \int_V [N]^T \{ F \} dV + \int_S [N]^T \{ T \} dS \quad (3.6)$$

식(3.6)에서 우변의 오른쪽의 항은 변위에 대한 부재의 저항성능을 나타내는 요소 강성행렬이고, 왼쪽 항은 물체력과 표면력을 형상함수를 사용하여 요소의 절점력 벡터를 나타낸 것으로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [k] &= \int_V [B][E][B] dV \\ \{f\} &= \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_S [N]^T \{T\} dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

따라서 식(3.6)과 식(3.7)에 의해 일반적인 보 요소의 요소 좌표계에서의 강성방정식은 다음과 같다.

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (3.8)$$

그러면 여기서 보 요소에 축력 중 압축력을 고려한 보-기둥 요소의 강성방정식은 위의 경우와 마찬가지로 가상일의 원리를 이용해서 구할 수 있다. 우선 식(3.2)에서 요소 내 변위벡터와 변위 형상함수는 같은 매개 변수를 사용하므로 다음과 같은 관계가 성립될 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\bar{d}'\} &= [N']\{d\} \\ \{\bar{d}''\} &= [N'']\{d\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

절점력 벡터 $\{f\}$ 와 절점 가상변위 $\{\delta d\}$ 가 한 가상일과 축력 P 와 이 힘에 의해 발생한 가상변위 $\{\delta A\}$ 와 한 일은 각각 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= \{\delta d\}^T \{f\} \\ \delta W_2 &= P \int_0^l \{d'\} \{\delta \bar{d}'\} dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

따라서 외력에 의한 전체 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = \{\delta d\}^T \{f\} + P \int_0^l \{d'\} \{\delta \bar{d}'\} dx \quad (3.11)$$

또한 부재 내부에 발생하는 모멘트 M 과 가상곡률 $\{\delta x\}$ 의 내력에 의한 가상일은 다음 식과 같다.

$$\delta U = - \int_0^l M \{\delta x\} dx = - \int_0^l EI(x) \{\delta x\} dx = \int_0^l EI(\bar{d}'') \{\delta \bar{d}''\} dx \quad (3.12)$$

식(3.5)에서와 같이 가상일의 원리를 적용하고, 여기에 다시 요소좌표계의 강성방정식인 식(3.8)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\{\delta d\}^T \{f\} = \{\delta d\}^T [k]\{d\} = \int_0^l EI(\bar{d}'') \{\delta \bar{d}''\} dx - \int_0^l P \{\bar{d}'\} \{\delta \bar{d}'\} dx \quad (3.13)$$

위 식에 다시 형상함수에 관한 식(3.9)를 대입하면

$$[k] = \int_0^l EI[N'']^T [N''] dx - \int_0^l P[N']^T [N'] dx \quad (3.14)$$

식(3.14)에서 우변의 첫 번째 항은 휨강성행렬(flexural stiffness matrix) 또는 탄성강성 행렬(elastic stiffness matrix)이며, 우변의 두 번째 항은 압축력 P 에 의해 휨강성의 증감을 나타내는 기하강성행렬(geometrical stiffness matrix) 또는 초기응력행렬(initial stress matrix)이다. 따라서 요소 좌표계의 강성방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{f\} = [k]\{d\} = [k_E - k_G]\{d\} \quad (3.15)$$

식(3.15)에서 요소 좌표계를 전체 좌표계로 변환시켜주는 12×12 좌표변환 행렬 $[T]$ 를 양변에 곱해주면 전체 좌표계에서의 강성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [T]\{f\} &= [k_E - k_G][T]\{d\} \\ \{f\} &= [T]^T [k_E - k_G] [T]\{d\} \\ &= [[T]^T [k_E] [T] - [T]^T [k_G] [T]]\{d\} \\ &= [K_E - K_G]\{d\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

여기서, $[K_E] = [T]^T [k_E] [T]$: 전체 좌표계에서의 탄성강성행렬
 $[K_G] = [T]^T [k_G] [T]$: 전체 좌표계에서의 기하강성행렬

식(3.13)에서 임의의 $\{\delta d\}$ 에 대해서 전체 좌표계의 좌굴방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_E - K_G]\{d\} = 0 \quad (3.17)$$

대변형 이론에서 식(3.17)의 강성행렬 부분은

$$[K_T] = [K_E - K_G] = [K_E + \lambda K_G] \quad (3.18)$$

이며 $[K_T]$ 를 접선강성 행렬(tangent stiffness matrix)이라 하고, 그 값에 따라 임계상태를 평가하는 지표가 된다. 또한 식(3.17)이 $\{d\}$ 에 관하여 비자명해(non-trivial solution)를 가지기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$|K_E + \lambda K_G| = 0 \quad (3.19)$$

즉, 식(3.18)의 접선강성 행렬의 행렬값이 0이 되는 식(3.19)은 선형 좌굴고유치의 특성방정식이 되며, 여기에 전체 구조물의 절점력과 절점변위에 경계조건을 적용하여 구한 고유치 λ 중 가장 작은 최소고유치가 그 구조물의 좌굴하중이 된다.

3.2. 접합부의 모델화

접합부의 반강접성을 고려하기 위해서는 접합부의 변형율이 반드시 고려되어야 한다. 따라서 접합부 거동을 위한 모델링은 접합부의 모멘트-회전과 외력-변위 특성에 대한 정보를 필요로 하며, 이를 얻기 위해 그림2에서 같이 각 부재 절점에 3개의 탄성 스프링을 사용하였다. 우선, 그림(a)에서 볼 죠인트 방식의 실제 메로 시스템으로 연결된 두 부재가 있다고 할 때, 이를 그림(b)에서 동일한 재료특성 값을 갖는 앞 절에서 정식화 한 보-기둥 요소를 사용하여 2개의 부재로 나눈다. 그리고 그림(c)에서는 메로 시스템의 접합부 부분을 절점4,2와 절점2,5로 구성된 요소로써 각각 고려해 준다.

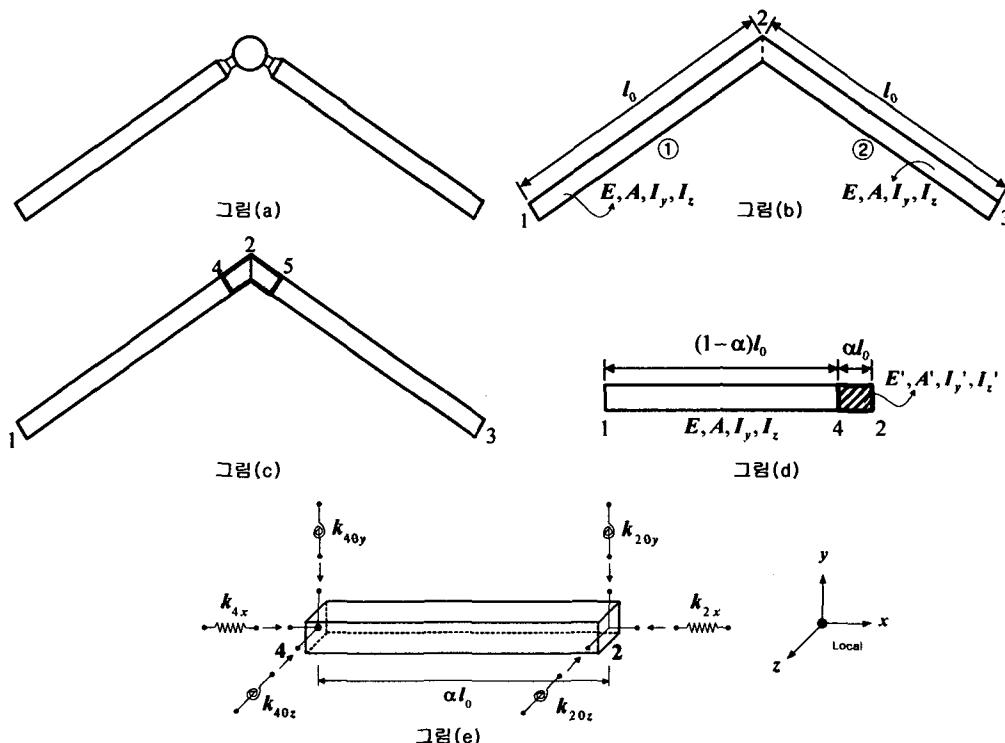


그림2 접합부 모델

그림(d)에서는 부재(절점1,4)인 파이프와 빗금 친 부분인 볼(ball)의 일부, 슬리브(sleeve), 콘(cone)과 락-핀(lock pin)으로 고정된 볼트(bolt)로 구성된 접합부(절점4,2)로 분리한다. 여기서 접합부의 거동을 정성적으로 평가하기 위해 그림(e)에서와 같이 부재 요소의 축방향, y축 및 z축 둘레 회전에 해당되는 자유도에 접합부의 거동을 나타내기 위한 3개의 탄성 스프링 k_x , k_{θ_y} , k_{θ_z} 를 결합시킨다. 그러면 접합부의 접합형식을 나타내기 위한 식으로는 접합부의 회전강성과 부재의 휨강성 비를 사용한 다음 식으로 규정 될 수 있다.⁽³⁾⁽⁴⁾

$$R = \frac{K_s}{EI/L} \quad (3.20)$$

여기서, R 은 강성계수(rigidity factor), K_s 는 접합부의 회전강성, EI/L 은 부재의 휨강성을 각각 나타낸다.

또한 R 값이 0에 가까운 값일수록 편 접합거동을, 값이 100이상인 경우에는 강 접합거동을, 그 중간 값인 경우에는 반강접 거동을 보인다고 가정하여, K_s 를 다음 식과 같이 3개의 스프링으로 나누어 R 값을 각각의 경우에 대해 고려하고 스프링 계수 값을 구한다. 본 연구에서는 R 값으로 5, 10, 50, 100을 대상으로 하였다.

$$k_x = R \frac{E' A'}{\alpha l_0}, \quad k_{\theta y} = R \frac{E' I_y'}{\alpha l_0}, \quad k_{\theta z} = R \frac{E' I_z'}{\alpha l_0} \quad (3.21)$$

위의 식(3.21)에서 구해진 스프링 계수 값을 적용하여 탄성 스프링 강성행렬을 구성하고, 앞 절에서 유도한 탄성강성 행렬과 이 탄성 스프링 강성행렬을 결합시켜 전체 강성방정식에 적용한다. 따라서 반강접 접합부 해석을 위한 단위모델은 그림3과 같이 나타낼 수 있다.

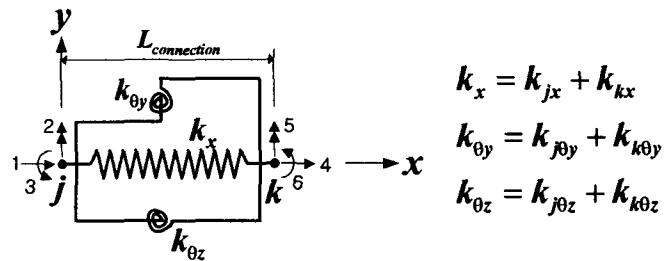


그림3 반강접 접합부 단위모델

3. 예제해석 및 고찰

본 연구에서 예제해석은 예비적인 단계로써 그림4와 같은 간단한 2차원 트러스 모델을 대상으로 하였다.

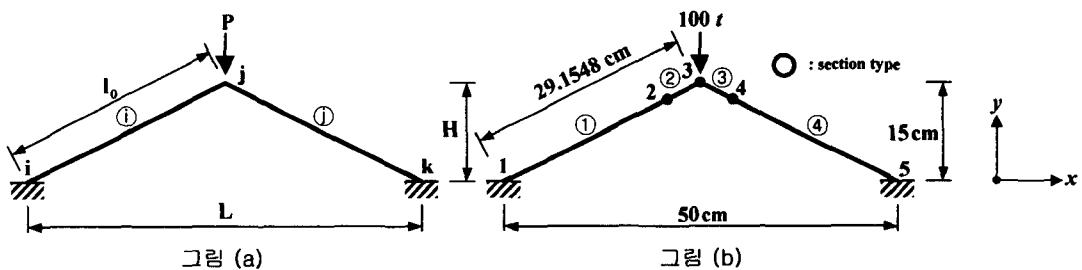


그림4 2차원 트러스 해석모델

앞장에서 언급한 바와 같이 그림(a)의 일반적인 트러스 모델을 접합부의 반강접성을 고려하기 위해 그림(b)와 같이 구성하였다. 접합부에 해당되는 ②, ③부재를 부재길이 l_0 의 5, 10, 20%의 경우로 각각 나누어 해석하였고, 스프링 강성은 축강성(k_x)과 회전강성($k_{\theta y}$, $k_{\theta z}$)이 같은 비율로 변하는 경우와 각각 다른 비율로 변하는 경우로 나누어 해석을 하였다. 두 경우의 해석결과는 다음의 표1과 표2와 같다. 또한 트러스 부재의 재료적인 조건은 다음과 같다.

직경(ϕ): 7.63 cm, 두께(t): 0.3 cm, 단면적(A): 6.908 cm², 단면 2차모멘트(I): 46.475 cm⁴, 영계수(E): 2.1 x 10⁶ kg/cm²

표1 접합부의 축강성과 회전강성이 같은 비율로 변할 때의 해석결과

(Ax: 축강성 R, Ro: 회전강성 R)

좌굴 하중	접합부 5%								접합부 10%								접합부 20%							
	R(5,10,50,100)								R(5,10,50,100)								R(5,10,50,100)							
	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro
	5:5	10:10	50:50	100:100	5:5	10:10	50:50	100:100	5:5	10:10	50:50	100:100	5:5	10:10	50:50	100:100	76.29	97.83	125.85	130.48				
Pcr (ton)	106.13	174.02	347.21	393.74	93.01	135.92	213.32	229.31	66.78	84.86	107.97	111.72												

표2 접합부의 축강성과 회전강성이 다른 비율로 변할 때의 해석결과

(Ax: 축강성 R, Ro: 회전강성 R)

좌굴 하중	접합부 5%								접합부 10%								접합부 20%								
	R(5,10,50,100)								R(5,10,50,100)								R(5,10,50,100)								
	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	Ax	Ro	
	5:1	10:1	50:1	100:1	5:1	10:1	50:1	100:1	5:1	10:1	50:1	100:1	5:1	10:1	50:1	100:1	66.78	84.86	107.97	111.72					
Pcr (ton)	102.80	166.12	233.82	236.18	87.28	126.46	188.46	198.31																	

접합부의 축강성과 휨강성이 같은 비율로 변하는 경우, 접합부가 5%인 경우에는 100t의 외부하중에 대해 좌굴하중이 모두 그 이상의 값이 나와 좌굴이 발생하지 않았고, 접합부가 차지하는 비율이 10%, 20%로 증가하면서 일부 5:5인 경우와 10:10인 경우에서 좌굴이 발생하였다. 또한 접합부의 축강성과 회전강성이 다른 비율로 변하는 경우도 앞의 경우와 마찬가지로 전체적으로 좌굴하중 값은 저하되면서 비슷한 양상을 보였다. 그러나 축강성의 비율을 휨강성보다 작게 하면 좌굴하중은 현저하게 낮아졌다. 즉, 접합부의 축강성의 영향이 회전강성의 것보다 접합형식에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있었다.

4. 결론 및 추후연구과제

단층 래티스 등의 접합부 반강접성을 고려하기 위한 방법으로 요소에 스프링의 사용과 반강접성을 표현하기 위한 적절한 계수를 이용한 요소강성행렬의 수정과 관련이 있다. 즉, 해당 자유도의 강성비에 따라 접합형식을 반영할 수 있었다. 본 연구에서는 부재길이에서 접합부가 차지하는 비율과 축강성과 휨강성 비에 국한하여 탄성 선형해석을 수행하였지만, 라이즌 스판비, 세장비와 같은 또 다른 부재요소의 반영과 좌굴 후 거동, 재료적 비선형에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

참고 문헌

1. 日置與一郎, “ラチスドームの不安定現象の概説,”『單層ラチスドームの安定解析-その現状と問題點-』1章, 日本建築學會シエル空間構造連絡委員會 スペースフレーム小委員會, 1989. 8, pp.3-19.
2. See, T. and McConnel, R. E., “Large Displacement Elastic Buckling of Space Structures,” *Journal of Structural Engineering*, Vol.112, No.5, 1986. 5, pp.1052-1069.
3. Kato, Shiro and Shomura, Masaaki, “Effects of Joint Rigidity on Buckling Load of Single Layer Reticular Domes on Circular Plan - On expression of the column buckling strength curves,” *J. Struct. Constr.*, AIJ, No.465, 1994. 11, pp.97-107.
4. Chenaghlu, M. R. and Nooshin, H., “Estimation of Semi-Rigidity of Connections in Space Structures using Neural Networks,” *The Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures*, 1996. 10, pp.238-246.