

## 국부좌굴을 고려하는 개선소성힌지해석을 이용한 3차원 강뼈대 구조물 해석

### 3-D Frame Analysis Using Refined Plastic-Hinge Analysis Accounting for Local Buckling

김승억\*                      박주수\*\*  
Kim, Seung-Eock          Park, Joo-Soo

#### ABSTRACT

In this paper, 3-D frame design using refined plastic-hinge analysis accounting for local buckling is developed. This analysis accounts for material and geometric nonlinearities of the structural system and its component members. Moreover, the problem associated with conventional refined plastic-hinge analyses, which do not consider the degradation of the flexural strength caused by local buckling, is overcome. Efficient ways of assessing steel frame behavior including gradual yielding associated with residual stresses and flexure, second-order effect, and geometric imperfections are presented. In this study, a model consisting of the width-thickness ratio is used to account for local buckling. The proposed analysis is verified by the comparison of the LRFD results.

#### 1. 서 론

현재 사용되고 있는 설계방법에서는, 구조시스템의 해석시 기하학적 및 재료적 비선형성을 고려하지 않기 때문에 유효길이계수를 사용하여 개별부재의 강도에 미치는 구조시스템의 영향을 고려한다. 따라서, 다음과 같은 문제점을 내포하고 있다. (1) 비탄성 비선형거동을 하는 구조시스템의 실제 파괴 모드는 유효길이계수를 기반으로 하는 구조시스템의 탄성좌굴모드와 일반적으로 일치하지 않는다. 따라서, 구조시스템과 개별부재간에 강도와 안정에 대한 상호작용을 정확하게 고려하지 못하기 때문에 구조시스템의 붕괴에 대한 안전을 정확하게 알 수 없다. (2) 탄성해석을 수행한 후 설계기준에 주어진 개별부재의 강도검토식을 사용하는 것으로는 비선형거동을 하는 구조시스템의 변위조건을 고려하지 못하므로, 개별부재와 구조시스템에 속한 각 부재 사이에 적합조건이 성립하지 않는다.

종래 설계방법의 문제점을 극복할 수 있는 방법은 비선형, 비탄성해석을 직접 수행하는 방법뿐이다.<sup>(1)</sup> 최근 컴퓨터 기술의 발전으로 구조시스템과 그에 속한 개별부재의 거동과 강도를 직접적이고 적극적으로 결정할 수 있는 비선형비탄성해석이 가능하게 되었다.<sup>(2),(3)</sup> 비선형비탄성해석법은 (1) 소성영역법(plastic-zone method) (2) 소성힌지해석법(plastic-hinge analysis) 으로 대분할 수 있다. 이러한 방법들은 부재의 소성화를 표현하는 정밀도에 따라서 구분된다. 소성영역법은 가장 상세하게, 소성힌지해석법은 가장 단순하게 소성화

\*정회원 · 세종대학교 토목환경공학과 부교수

\*\*세종대학교 토목환경공학과 대학원 석사과정

를 표현한다. 소성영역법은 일종의 유한요소법으로서, 구조 부재를 길이방향으로 유한개의 요소로 나누고 각 요소의 단면은 다시 다수의 요소로 나눈다.<sup>(4),(5),(6)</sup> 소성영역법은 정밀해로 알려져 있음에도 불구하고 요소의 수가 너무 많이 필요하여 경제성이 없는 바 일반 설계에는 사용되지 않는다.

비선형성을 간단히 표현할 수 있는 방법은 개선소성힌지해석법이다. 지금까지 Ziemian et al<sup>(7)</sup>, Prakash and Powell<sup>(8)</sup>, Liew and Tang<sup>(9)</sup>, Kim et al.<sup>(10)</sup> 등이 몇가지 개선소성힌지해석에 대하여 연구하였다. 소성힌지해석법의 장점은 구조시스템과 개별부재의 강도와 안정성을 효율적이고 정확하게 평가하는데 있다.

종래의 개선소성힌지해석법에서는 국부좌굴효과를 고려하지 못한다. 따라서 해석시 사용부재는 조밀단면으로 가정한다. 그러나, 실제 사용되는 강뿔대 구조물의 경우는 조밀단면이 아닌 경우가 많으므로 개선소성힌지해석을 광범위하게 사용하기 위해서는 국부좌굴효과를 반드시 고려하도록 개선하여야 할 것이다. 2차원 뿔대구조물에 대하여 국부좌굴효과를 고려한 개선소성힌지해석법이 개발된 바 있다.<sup>(11)</sup> 본 연구에서는 3차원 강뿔대구조물에 대한 국부좌굴효과를 고려하는 실용적인 개선소성해석기법을 개발하는데 목적이 있다.

## 2. 개선소성힌지해석

### 2.1 기하학적 비선형을 고려하는 안정함수

기하학적인 비선형성을 고려하기 위하여 안정함수를 사용한다. 안정함수란 축방향력에 의하여 휨 강성이 감소하는 영향을 고려하는 함수로서 부재를 하나 혹은 두 개의 요소로 이상화하여 기하학적인 비선형을 효과적으로 고려할 수 있다.<sup>(12),(13)</sup> 3차원 보-기둥 부재에 대하여 안정함수를 이용한 힘-변위의 관계는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{yA} \\ M_{yB} \\ M_{zA} \\ M_{zB} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 \frac{EI_y}{L} & S_2 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 \frac{EI_y}{L} & S_1 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_3 \frac{EI_z}{L} & S_4 \frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 \frac{EI_z}{L} & S_3 \frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서,  $P$ ,  $M_{yA}$ ,  $M_{yB}$ ,  $M_{zA}$ ,  $M_{zB}$  및  $T$ 는 축력,  $y$ 와  $z$ 축에 대한 단모멘트 및 비틀림을 각각 나타낸다.  $\delta$ ,  $\theta_{yA}$ ,  $\theta_{yB}$ ,  $\theta_{zA}$ ,  $\theta_{zB}$  및  $\phi$ 는 축변형, 절점의 회전각 및 비틀림각이다.  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 와  $S_4$ 는 각각의  $y$ 와  $z$ 축에 대한 안정 함수로서 식 (2a), (2b), (2c) 및 식 (2d)와 같다.

$P > 0$  일 경우

$$S_1, S_3 = \frac{\pi^2 \rho \cosh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho} \sinh(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho} \sinh(\pi\sqrt{\rho})} \quad (2a)$$

$$S_2, S_4 = \frac{\pi\sqrt{\rho} \sinh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2 \rho}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho} \sinh(\pi\sqrt{\rho})} \quad (2b)$$

$P < 0$  일 경우

$$S_1, S_3 = \frac{\pi\sqrt{\rho} \sin(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2 \rho \cos(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho} \sin(\pi\sqrt{\rho})} \quad (2c)$$

$$S_2, S_4 = \frac{\pi^2 \rho - \pi\sqrt{\rho} \sin(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho} \sin(\pi\sqrt{\rho})} \quad (2d)$$

여기서  $\rho = P/(\pi^2 EI/L^2)$ 이다.

## 2.2 잔류응력을 고려하는 "Column Research Council"(CRC) 접선탄성계수 사용

잔류응력을 가진 부재가 축방향력에 의하여 점진적으로 항복하는 것을 고려하기 위하여 CRC 접선탄성계수를 사용한다. 단면의 탄성 부분의 감소를 고려하기 위하여 단면이차모멘트 대신에 탄성계수를 감소시키도록 한다. 이 접선탄성계수는 식 (3a) 및 식 (3b)와 같이 축력의 함수로 나타낼 수 있다.<sup>(14)</sup>

$$E_t = 1.0E : P \leq 0.5P_y \quad (3a)$$

$$E_t = 4 \frac{P}{P_y} E \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) : P > 0.5P_y \quad (3b)$$

## 2.3 휨 모멘트 영향을 고려하는 강도감소계수의 적용

부재가 축력과 휨을 받는 경우 탄성강성에서 완전 소성강성 즉 영까지 점진적 변화를 나타내기 위하여 연화소성힌지(softening plastic hinge)를 사용한다. 연화소성힌지는 포물선함수 식 (4a) 및 식 (4b)로 나타낼 수 있다.

$$\eta = 1 \quad : \quad \alpha \leq 0.5 \quad (4a)$$

$$\eta = 4\alpha(1 - \alpha) \quad : \quad \alpha > 0.5 \quad (4b)$$

여기서,  $\alpha$ 는 단면에 작용하는 부재력의 크기를 나타내는 함수다. 그러므로, 3차원 보-기둥 부재의 연화 소성힌지를 고려하는 힘-변위의 관계는 식 (7)과 같이 정식화 된다.

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{yA} \\ M_{yB} \\ M_{zA} \\ M_{zB} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_t A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & k_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yz} & k_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iz} & k_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iz} & k_{iz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서,

$$k_{yy} = \eta_A \left[ S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} (1 - \eta_B) \right] \frac{E_t I_y}{L} \quad (6a) \quad : \quad k_{iz} = \eta_A \left[ S_3 - \frac{S_4^2}{S_3} (1 - \eta_B) \right] \frac{E_t I_z}{L} \quad (6d)$$

$$k_{yy} = \eta_A \eta_B S_2 \frac{E_t I_y}{L} \quad (6b) \quad : \quad k_{zz} = \eta_A \eta_B S_4 \frac{E_t I_z}{L} \quad (6e)$$

$$k_{yy} = \eta_B \left[ S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} (1 - \eta_A) \right] \frac{E_t I_y}{L} \quad (6c) \quad : \quad k_{zz} = \eta_B \left[ S_3 - \frac{S_4^2}{S_3} (1 - \eta_A) \right] \frac{E_t I_z}{L} \quad (6f)$$

### 3. 국부좌굴효과를 고려하는 휨강도 감소모델

국부좌굴은 플랜지 및 복부의 폭-두께비 즉 세장비가 한계상태를 초과하는 경우에 압축플랜지 및 복부에서 휨좌굴이 일어나는 현상이다. 일반적으로 압연보는 주로 조밀단면을 사용하는 반면 판형은 폭-두께비가 큰 세장한 단면으로 제작되므로 국부좌굴현상은 판형보의 강도에 보다 직접적인 영향을 미친다. 폭-두께비가 충분히 작으면 단면은 소성휨강도를 발휘하지만 그렇지 않을 경우 탄성 혹은 비탄성 국부좌굴에 의하여 단면의 휨강도가 급격히 저하된다.

국부좌굴을 실용적으로 고려하는 방법으로서 폭-두께비 등으로 구성되는 부재의 휨강도 감소모델을 개선 소성힌지해석에 적용하는 것이다. 본 논문에서는 휨강도 감소모델 중 가장 실용적인 AISC-LRFD식을 채택 하였으며 H형 압연보 및 판형에 대한 식은 다음과 같다.<sup>(15)</sup>

$$\lambda \leq \lambda_p \text{ 일 때} \quad M_n = M_p \quad (7)$$

$$\lambda_p < \lambda \leq \lambda_r \text{ 일 때} \quad M_n = M_p - (M_p - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \quad (8)$$

$$\lambda > \lambda_r \text{ 일 때} \quad M_n = M_{cr} = SF_{cr} \leq M_p \quad (9)$$

상기 식의 각항은 표 1과 같이 정의 된다.

복부의  $\lambda$ 가  $\lambda_r$ 보다 클 경우에는 다음 식을 사용하여 휨강도를 구하여야 한다.

$$M_n = S_{xc} R_{PG} F_{cr} \quad (11)$$

여기서  $R_{PG}$ 는 복부의 세장비가 휨강도에 미치는 영향을 고려하는 계수로서 다음 식과 같이 정의된다.

$$R_{PG} = 1 - \frac{a_r}{1200 + 300a_r} \left( \frac{h_c}{t_w} \sqrt{F_{cr}} \right) \leq 1.0 \quad (12)$$

여기서  $a_r$ =압축플랜지 면적에 대한 복부면적의 비

$s_{xc}$ =압축플랜지의 단면 계수

$h_c$ =도심에서 압축 플랜지 용접하단면까지 거리의 2배

임계응력  $F_{cr}$ 은 횡비틀림좌굴 및 플랜지 국부좌굴에 대한 세장비로 결정된다. 본 논문에서는 국부좌굴만 고려하므로 국부좌굴 한계상태에 따른 임계응력은 다음과 같다.

$$\lambda \leq \lambda_p \text{ 일 때} \quad F_{cr} = F_y \quad (13)$$

$$\lambda_p < \lambda \leq \lambda_r \text{ 일 때} \quad F_{cr} = C_b F_y \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \right] \leq F_y \quad (14)$$

$$\lambda > \lambda_r \text{ 일 때} \quad F_{cr} = \frac{C_{PG}}{\lambda^2} \quad (15)$$

플랜지 국부좌굴에 대한 한계상태는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{b_f}{2t_f} \quad (16) \quad ; \quad \lambda_p = \frac{65}{\sqrt{F_y}} \quad (17) \quad ; \quad \lambda_r = \frac{230}{\sqrt{F_y / k_c}} \quad (18)$$

$$C_{po} = 26,200k_c \quad (19) \quad ; \quad C_b = 1.0 \quad (20)$$

여기서  $k_c = 4/\sqrt{h/t_w}$  그리고  $0.35 \leq k_c \leq 0.763$

단면의 LRFD소성강도식중 휨강성  $M_p$ 를 상기식(7)-(20)로 결정되는 휨강도 감소모델  $M_n$ 으로 대체하면 다음식과 같다.

$$\frac{P}{P_y} + \frac{8 M_y}{9 M_{yp}} + \frac{8 M_x}{9 M_n} = 1.0 \quad \text{for } \frac{P}{P_y} \geq 0.2 \quad (21)$$

$$\frac{P}{2P_y} + \frac{M_y}{M_{yp}} + \frac{M_x}{M_n} = 1.0 \quad \text{for } \frac{P}{P_y} \leq 0.2 \quad (22)$$

이 식을 고등해석 프로그램중 개별부재의 강도 검토식에 적용함으로써 부재의 국부좌굴효과를 고려하였다.

표 1. 폭-두께비 한계

항목	플랜지좌굴	복부좌굴
$M_p$		$F_y Z_x$
$M_r$	$F_L S_x$	$F_y S_x$
$F_{cr}$	$\frac{20,000}{\lambda^2}$ : 압연보 $\frac{20,000k_c}{\lambda^2}$ : 판형	식 (13), (14), (15)
$\lambda$	$b_f/2t_f$	$h/t_w$
$\lambda_p$	$\frac{65}{\sqrt{F_y}}$	$\frac{P_u}{\Phi_b P_y} \leq 0.125$ 일때 $\frac{640}{\sqrt{F_y}} (1 - \frac{2.75 P_u}{\Phi_b P_y})$ $\frac{P_u}{\Phi_b P_y} \geq 0.125$ 일때 $\frac{191}{\sqrt{F_y}} (2.33 - \frac{2.75 P_u}{\Phi_b P_y}) \geq \frac{253}{\sqrt{F_y}}$
$\lambda_r$	$\frac{141}{\sqrt{F_L}}$ : 압연보 $\frac{162}{\sqrt{F_L/k_c}}$ : 판형보	$\frac{970}{\sqrt{F_y}} (1 - \frac{0.74 P_u}{\Phi_b P_y})$

여기서,  $s_x$ =강축에 대한 단면계수,  $F_y$ =항복응력(ksi),  $F_L = F_y - F_R$ (ksi)  
 $F_R$ =플랜지의 압축잔류응력, 압연보는 10ksi 판형보는 16.5ksi,  $b_f$ =플랜지 폭,  $t_f$ =플랜지두께,  
 $h$ =복부 높이,  $t_w$ =복부두께,  $\Phi_b$ 저항계수(=0.9)

표 2. 단면치수

단면(mm)			
$h$	$b_f$	$t_w$	$t_f$
900	300	8	12

#### 4. 해석결과검증

그림 1의 수직하중과 수평하중을 동시에 받고 있는 3차원 1층 강뼈대 구조물에 대하여 해석하였다. 각 부재의 항복강도는 250MPa(36 ksi)이고, 탄성계수는 200,000MPa(30,000 ksi), 전단탄성계수는 79,239MPa(11,500 ksi)이다. 보 및 기둥 부재는 모두 표 2에 나타난 부재를 사용하였다.

작용하중이 201.42kN(45.28kips)에 도달했을 때, (1)번 절점에서 국부좌굴이 발생하였다. 그 때의 (1)번 절점의 축력 P는 81.185kN(18.25kips), 약축에 대한 휨모멘트  $M_y$ 는 94.71kNm(838.1in.-k) 그리고 강축에 대한 모멘트  $M_z$ 는 305.9kNm(839.2in.-k)이다. 이 부재력을 LRFD 소성강도식(22)에 대입하면 1.00이 된다. 따라서 본 해석법이 국부좌굴효과를 정확하게 고려하고 있음이 검증되었다.

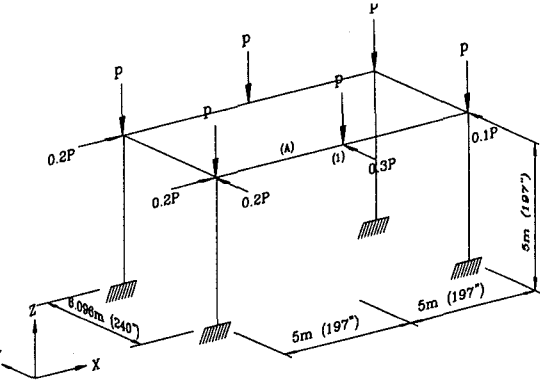


그림 1. 1층 강뼈대구조물

#### 5. 예제해석

국부좌굴효과를 고려하는 개선소성힌지해석과 종래의 개선소성힌지해석결과를 비교함으로써 국부좌굴이 구조시스템의 강도에 미치는 영향을 평가하고자 한다. 예제해석은 그림 2과 같이 수직하중과 수평하중을 동시에 받는 3차원 2층 뼈대구조물을 대상으로 실시하였다. 응력-변형률 관계는 완전 탄-소성으로 가정하였으며, 항복응력 250MPa(36ksi) 및 탄성계수 200,000MPa(29,000ksi)을 사용하였다. 사용부재는 모두 표2의 부재를 사용함으로써 해석의 편의를 도모하였다.

해석결과 구조물은 (1)~(5)절점에서 순차적으로 국부좌굴이 발생하여 파괴되었다. 이때 구조시스템의 받을 수 있는 극한하중  $P_u$ 는 397.4kN(89.34kips)로 산정되었다. 국부좌굴효과를 고려하지 않은 개선소성힌지해석을 할 경우 구조 시스템은 휨좌굴에 의해 파괴되었고, 그 때 구조시스템이 받을 수 있는 극한하중  $P_u$ 는 634kN(142.53kips)로 산정되었다. 국부좌굴효과를 고려한 경우와 그렇지 않은 경우에 절점 (1)의 수직하중-변위 관계를 그림 3에 나타내었다. 결과적으로 종래의 개선소성힌지해석이 국부좌굴효과를 고려한 개선소성힌지해석에 비해 극한하중을 1.6배 과대 평가함을 알 수 있었다.

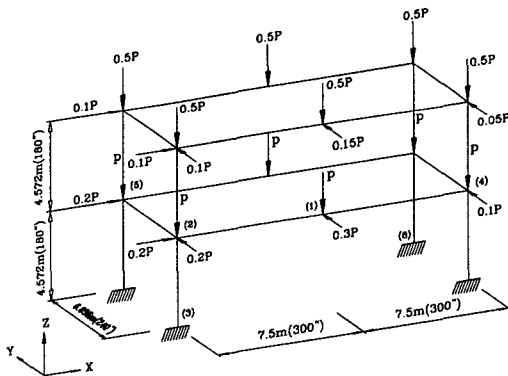


그림 2. 2층 강뼈대 구조물

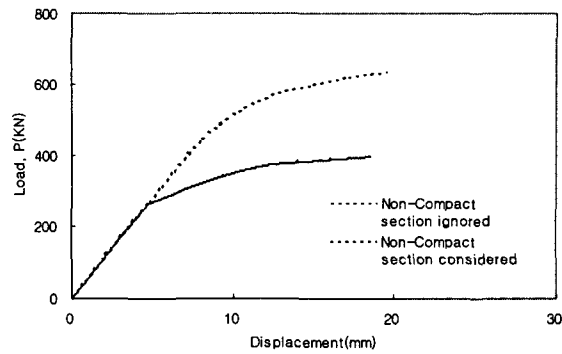


그림 3. 2층 강뱀대 구조물에 대한 하중-변위 관계

## 6. 결 론

본 연구에서 국부좌굴을 고려하는 개선소성힌지해석을 개발하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 개발된 개선소성힌지해석을 검증한 결과 국부좌굴효과를 포함한 구조물의 비탄성 비선형거동을 적절히 반영하고 있음을 알 수 있었다.
- 2) 본 방법은 기존의 LRFDb방법과 비교하여 오차가 1% 미만임을 알 수 있었다.
- 3) 예제해석을 통하여 국부좌굴을 고려하지 않은 개선소성힌지해석은 그렇지 않은 경우에 비해 1.6배 정도 과대 평가함을 알 수 있었다. 따라서, 국부좌굴은 개선소성힌지해석에 반드시 고려하여야 할 매우 중요한 요소임을 알 수 있었다.
- 4) 본 방법은 개별부재의 강도 뿐만 아니라 구조시스템의 강도를 평가함으로써 구조시스템에 대한 균등한 안전율을 확보할 수 있다.
- 5) 본 방법은 고 비용과 많은 시간이 소요되는 소성영역법을 대체할 수 있으므로 경제적이고 정밀한 기법이다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실(2000-N-NL-01-C-162) 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참고 문헌

1. Chen, W.F. and Kim, S.E., *LRFD steel design using advanced analysis*, Boca Raton, FL, CRC Press, 1997
2. 박문호, 김승억, 최세휴, "3차원 강뿔대 구조물의 실용적인 고등해석 기법 개발", 대한토목학회논문집. 대한토목학회, 제20권, 제1-A호, 2000, pp.37-49
3. 김승억, 최세휴, 박문호, "반강접 공간 강뿔대 구조물의 고등해석", 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제21권 제1-A호, 2001, pp.155-164
4. Clarke, M.J., Bridge, R.Q., Hancock, G.J. and Trahair, N.S., "Benchmarking and verification of second-order elastic and inelastic frame analysis programs", in *SSRC TG 29 workshop and monograph on plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames*, White, D.W. and Chen, W.F., Eds., SSRC, Lehigh University, Bethlehem, PA, 1992
5. Vogel, U., "Calibrating frames", *Stahlbau*, 10, 1985, 1-7
6. White, D.W., "Material and geometric nonlinear analysis of local planar behavior in steel frames using iterative computer graphics", M.S. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY, 1985, pp.281
7. Ziemian, R.D., McGuire, W., and Dierlein, G.G., "Inelastic limit states design part II: three-dimensional frame study", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118(9), 1992, pp. 2550-2568
8. Prakash, V. and Powell, G.H., "DRAIN-3DX: Base program user guide, version 1.10", A Computer Program Distributed by NISEE / Computer Applications, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1993
9. Liew, J.Y. and Tang, L.K., "Nonlinear refined plastic hinge analysis of space frame structures", Research Report No. CE027/98, Department of Civil Engineering, National University of Singapore, Singapore, 1998
10. Kim, S.E., Park, M.H., Choi, S.H., "Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis", *Engineering Structures*, 23(11), 2001, pp.1491-1502
11. 김승억, "국부좌굴을 고려한 강뿔대 구조물의 개선소성현저해석", 대한토목학회 논문집, 제20권, 제2-A호, 2000, pp.293-300
12. Kim, S.E. and Chen, W.F., "Practical advanced analysis for braced steel frame design", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 122(11), 1996a, pp.1266-1274
13. Kim, S.E. and Chen, W.F., "Practical advanced analysis for unbraced steel frame design", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 122(11), 1996b, pp.1259-1265
14. Chen, W.F. and Lui, E.M., *Stability design of steel frames*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1992
15. AISC, Load and resistance factor design specification, American Institute of Steel Construction, 2nd Ed., Chicago, 1994