

## Spline/NURBS 자유곡면과 쉘 해석의 연동

### The Linkage between Spline/NURBS Free Surface and Shell Finite Element Analysis

노희열\*                      조맹효\*\*  
Roh, Hee-Yuel              Cho, Maenghyo

---

#### ABSTRACT

We propose the framework which directly links shell finite element to the free form surface geometric modeling. For the development of a robust shell element, a first order shear deformable shell theory and partial mixed variational functional are provided. Bubble functions are included in the shape function of displacement to improve the performance of the developed element. The Spline/NURBS is used to generate the general free form of parameterized shell surfaces. The proposed shell finite element model linked with NURBS surface representation provides efficiency for design and analysis. Numerical examples are given in order to assess the accuracy of the performances of the proposed element.

---

#### 1. 서    론

산업 구조물의 생산과정에서 설계와 해석의 상호 작용이 가능하면 효율적인 설계가 가능하다. 하지만 현재 사용되고 있는 상용 CAE 프로그램은 구조 설계 시스템과 구조 해석 시스템이 각각 독립적인 모듈을 사용하기 때문에 근본적으로 이러한 상호 작용에 제한이 있다. 이러한 제한은 크게 기능적 차이와 환경적 차이에서 기인하는데 기능적 차이는 일반적으로 설계 모듈은 순전히 기하학적인 면에 기초한 것이고, 해석 모듈은 물리적 현상에 기초한 것이기 때문이다. 환경적 차이는 기술적인 측면으로 수학적 표현방법과 수치 계산방법에서의 차이로 특성 지어진다. 이러한 한계 때문에 설계와 해석의 반복계산에서 해석 또는 설계하고자하는 구조물의 재 모델링이나 수학적 표현식의 변형이 요구되어진다. 일반적으로 기하학적 설계를 하기 위해서는 CAD 시스템을 사용하는데 가장 널리 사용되는 수학적 표현방법이 B-Spline 함수와 B-Spline 함수를 유리화한 NURBS(Non Uniform Rational B-Spline) 이다.

쉘 유한요소는 다양한 공학적 분야에서 활발히 개발되어 왔고 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 쉘은 곡률을 가지는 얇은 구조물로서 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로는 쉘 문제를 접근하기가 까다롭다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 강력하게 적용할 수 있는 도구이므로 쉘 문제의 수치해석에 적합하다.

일반적으로 NURBS 방법에서는 곡면을 나타내기 위해 2개의 매개변수를 사용한다. 따라서 CAD 시스템에서 얻은 쉘 형상의 기하학적인 모델링을 쉘 구조물의 유한요소해석과 직접 연동하기를 원한다면 쉘 유한요소 해석 처리순서 안에 NURBS 방법을 삽입하여 하나의 해석 프로그램을 만들면 효율적일 것이다. 일반 작

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

\*\* 정희원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

표계에 기초한 쉘 유한요소는 CAD 시스템과 마찬가지로 2개의 매개변수로 해석하고자 하는 구조 시스템을 나타낼 수 있다. 따라서 설계 시스템과 해석 시스템이 일관성 있게 연동하려면 새로운 쉘 유한요소가 필요하게 되었고 또한 이러한 연동 목적에 매우 적합한 요소이다.

본 연구에서는 쉘의 기하학적 모델링과 쉘의 유한요소 해석을 연동할 수 있는 프레임워크를 개발한다. 먼저, 일반 곡선 좌표계와 일반 텐서에 기초한 쉘 이론으로부터 1차 전단 변형 쉘 유한요소를 개발한다. 수치적으로 문제를 야기하는 전단변형 잠김(transverse shear locking) 현상과 멤브레인 잠김(membrane locking) 현상을 저감하기 위해서 선별적으로 변형도 가정법을 사용하여 안정적이며 고성능을 가지는 쉘 유한요소를 개발했다. 일반 곡선 좌표계에서 주어지는 쉘 유한요소와 CAD에서 주어지는 곡면 표현식이 2개의 매개변수로 동일하여 직접 연동이 가능하기 때문에 쉘의 구조 해석을 위해 곡면을 재 근사하는 번거로움과 기하 오차(geometric error)는 발생하지 않는다. 그러므로 본 연구에서는 효과적으로 쉘의 기하학적인 곡면 모델링과 쉘의 해석을 연동하기 위해 B-spline에 기초한 곡면 생성 프로그램을 구성하고 곡면 표현식을 이용하여 쉘의 구조 해석을 수행하였다.

## 2. Spline/NURBS 자유곡면과 쉘 해석 방법

### 2.1. Spline/NURBS 자유곡면 모델링

쉘 유한요소와 CAD에서 사용하는 모델링 방법을 연동하기 위해서는 CAD에서 사용하는 모델링 방법을 알아야 한다. 본 절에서는 그 방법에 대해 간략히 살펴본다. 자세한 내용은 참고 문헌에서 찾을 수 있다.<sup>(1),(2)</sup>

#### 곡면의 B-Spline 보간방법

B-spline 곡선은 다음과 같이 정의 된다.

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) P_i \quad (1)$$

여기서  $N_{i,p}(t)$ 는 B-spline이 기저 함수이고,  $P_i$ 는 조정점을 나타내는 벡터이다.  $P$  (차수+1)는 B-spline 곡선의 차수를 나타낸다. 그리고  $[t_0, t_1, \dots, t_{n+p}]$ 는 곡선을 따라 분포하는 매개변수  $t$ 를 결정하기 위한 간격 벡터이다.

B-spline 기저 함수  $N_{i,p}(t)$ 는 B-spline 혼합 함수라고도 불리는데 그것은 다음의 식에서 볼 수 있듯이 기저 함수를 만들기 위해 이전 차수의 기저 함수를 서로 혼합하여 도출된다. 다음의 식을 살펴보면 더욱 명확히 알 수 있다.

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p+1}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p}-t}{t_{i+p}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (3)$$

knot 벡터가 처음과 마지막 knot에서 여러개의 knot이 중첩되면 비 주기적인 knot 벡터라고 한다. 일반적으로 실제적인 문제에 적용하는 데에 있어서  $t_0=0$  이에  $t_1=1$ 로 정의하여 사용한다. 그리고 knot 벡터의 간격이 일정하면 균일하다고 하고 일정하지 않으면 비 균일한 knot 벡터라고 한다. 일반적으로 비 균일한 knot 벡터가 다양한 설계 응용에 있어서 더 많은 유연성을 제공한다.

B-spline 곡면은 B-spline 곡선의 확장된 개념으로 생각하면 쉽게 얻을 수 있다. 즉 B-spline 곡면은

B-spline 곡선의 텐서 곱으로 정의 할 수 있다.  $(p \times q)$ 차 B-spline 곡면은 다음의 식과 같이 정의 할 수 있다.

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u) \quad (4)$$

$$(u_{p-1} \leq u \leq u_{m+1}, v_{q-1} \leq v \leq v_{n+1})$$

여기서  $(m+1)(n+1)$ 개의 조정점  $V_{i,j}$  는 3차원의 조정 그물망을 만들고,  $N_{i,p}$ ,  $M_{j,q}$  는 각각  $u$ 와  $v$  방향으로의 차수가  $p$  와  $q$  인 B-spline 기저 함수를 이룬다. 그림 1은 곡면은 만들기 위해 사용된 쌍 3차 비균일 B-spline 형상을 보여준다.

### 곡면의 NURBS 보간방법

다음으로 NURBS 곡면에 대해 살펴보면,  $(p \times q)$ 차 NURBS 곡면도 앞의 B-spline 곡면과 마찬가지로 곡선에서 쉽게 곡면으로 확장 할 수 있다.

NURBS 곡면을 수식으로 나타내면 다음과 같이 정의한다.

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} P_{i,j} M_{j,p}(v) N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} M_{j,p}(v) N_{i,p}(u)} \quad (5)$$

$w_{i,j}$  는 가중치이며, 음수가 아니 실수를 가져야한다. 위의 식으로부터 모든 조정점에 해당하는 가중치가 같다면, NURBS 곡면은 B-spline 곡면으로 된다. 결국 B-spline 곡면은 NURBS 곡면의 특수한 경우가 되는 것이다. NURBS 곡면이 B-spline 곡면보다 좋은점은 곡면을 모델링하기 위해서 조정점의 첨가 없이 가중치의 변화만 가지고도 곡면을 조정할 수 있기 때문이다. 다시 말하면 곡면의 나타낼 때 전체 변화없이 부분적 변화가 쉽다는 것이다.

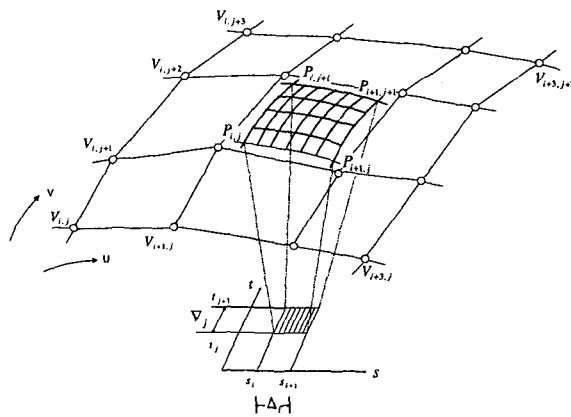


Fig.1 Geometric configuration defining a bi-cubic NURBS patch

## 2.2. 수정된 Koiter/Sanders의 일차 전단 변형 셸이론

앞 절에서 살펴본 것같이 자유곡면은 2개의 매개변수로 나타낼 수 있다. 따라서 이 2개의 매개 변수를 그대로 사용할 수 있는 셸 유한요소 개발이 필요하다. 본 절에서는 일반적인 셸이론과 유한요소화에 대해 간략히 언급한다.

본 연구에서는 Koiter/Sanders<sup>(3)</sup>의 개념을 이용한 1차 전단변형 이론에 기초하여 유한요소화에 사용되는 변형률을 가정하였다. 일반 곡선좌표계와 텐서에 기초한 셸 이론에서는 일반적으로 변형률 텐서와 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\dot{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = (\dot{g}_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (6)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 그림 2는 본 연구에서 사용되는 변형전과 변형후의 셸의 기하학적인 형상을 나타낸다. 위치벡터  $\vec{R}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{R} = \vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3 \quad (7)$$

또한 공변기저 벡터는

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}(\vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3) = \vec{a}_\alpha - b_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma \theta^3 \quad (8)$$

여기서  $\vec{a}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha}$  와  $b_\alpha^\gamma$  는 각각 표면 좌표 곡선의 접선 벡터와 혼합 곡률 텐서를 나타낸다. 변형률 텐서는 멤브레인량, 굽힘량, 전단변형량으로 나타낼수 있으며 또한 변위와 곡면 표면 메트릭과 곡률의 항으로 나타낼수 있다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha||\beta} + u_{\beta||\alpha} - 2b_{\alpha\beta}w) \quad (9)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\psi_{\alpha||\beta} + \psi_{\beta||\alpha} + \frac{1}{2}\{b_\alpha^\lambda(u_{\beta||\lambda} - u_{\lambda||\beta}) + b_\beta^\lambda(u_{\alpha||\lambda} - u_{\lambda||\alpha})\}] \quad (10)$$

$$\gamma_\alpha = (w_{,\alpha} + \psi_\alpha + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \quad (11)$$

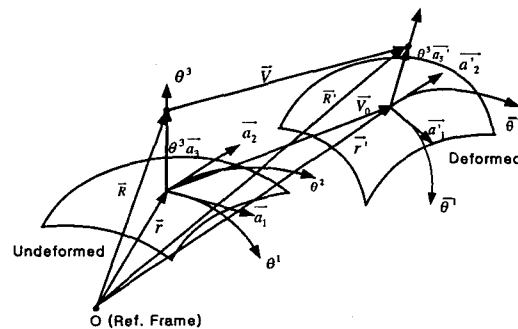


Fig.2 Shell geometry in the undeformed and the deformed configurations

### 2.3. 유한요소화

본 연구에서는 쉘의 잠김 현상과 격자의 뒤틀림 문제를 효율적으로 다루기 위해 Hellinger-Reissner의 부분 혼합 변분법을 사용하여 쉘의 변형에 관한 유한 요소 모델에 대해 정식화하고 유한 요소 해석을 위해 이산화 한다. 일반적으로 쉘의 두께가 얇아지면 멤브레인과 전단변형 잠김 현상이 나타난다. 이러한 잠김 현상을 해결하기 위해 가정된 변형률 방법이 사용되어왔다. 본 연구에서는 계산상의 효율을 높이기 위해 Hellinger-Reissner 변분법을 전체 변형률에 적용하지 않고 잠김 현상을 일으키는 멤브레인 부분과 전단 변형 부분에 적용한다. 또한 거품 함수를 도입하여 격자 뒤틀림에 민감하지 않지않도록 한다. 일반적으로 거품 함수는 요소의 경계와 절점에서는 값을 갖지 않는다. 따라서 절점의 수를 증가하지 않으면서도 향상된 성능을 얻을 수 있다. 4절점 요소에 대해서는 거품함수가 9절점요소의 요소 중앙 절점의 형상 함수와 같다. 9절점 요소에 대해서는 가능한 거품함수가 3개 존재한다. 그중 좌표계의 불변성을 제공하는 대칭 거품함수만을 사용한다<sup>(4)</sup>. 본 연구에서 사용될 거품함수의 형상은 그림3과 같다.

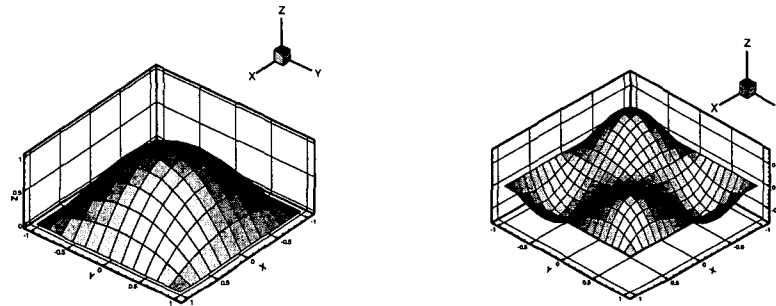


Fig. 3 4-node and 9-node Bubble functions

한 개의 거품 함수를 포함하는 변위장 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i + N_b u_b \quad (12)$$

여기서  $N_i$  는 요소 형상 함수이고  $N_b$  는 거품 함수이다.

한편 주어진 요소에서, 요소 강성 행렬의 성질은 일반적으로 가정된 변형률에 의존하게 된다. 따라서 적절히 가정된 변형률장을 선택하기 위해서는 필요 없는 허구 강체 모드(Spurious Rigid Body Modes)의 기하학적 형상을 정확히 파악할 필요가 있다. 그러한 형상들은 감차 적분에 의한 변위장 기본 모델과 저차의 가정된 변형률장을 갖은 유한요소를 등가로 가정함으로써 찾아 낼 수 있다. 본 연구에서는 거품 함수를 포함한 4절점 요소와 9절점 요소를 고려한다. 거품 함수를 갖는 가정된 변형률장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \epsilon^G + \epsilon^B \quad (13)$$

여기서  $\epsilon^G$  는 허구 강체 에너지 모드를 없애기 위한 일반적인 가정된 변형률장이고,  $\epsilon^B$  는 거품 함수 변위에 대응하는 추가적인 가정된 변형률장이다.

본 연구에 사용된 9절점 요소의 가정된 면내 변형률은  $16 - \alpha$  매개변수를 아래와 같이 선택하여 사용한다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \Phi & \Phi & \xi\eta^2 & 0 & \xi^2\eta & 0 \\ \Phi & \Lambda & \Phi & 0 & \xi^2\eta & 0 & \xi\eta^2 \\ \Phi & \Phi & \Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a\} = P_1\{a\} \quad (14)$$

가정된 전단변형을 성분에 대해서는 10 -  $\beta$  매개변수를 사용한다.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \Phi & \xi\eta^2 & \xi^2\eta \\ \Phi & \Lambda & \xi^2\eta & \xi\eta^2 \end{bmatrix} \{\beta\} = P_2\{\beta\} \quad (15)$$

위에서 가정된 변형률을 이용하여 유한요소 이산화를 수행하고 변분을 취하면 다음과 같은 요소 강성 행렬 방정식을 얻을 수 있다.

$$K_b \vec{d} + (G_m^T H_m^{-1} G_m + G_r^T H_r^{-1} G_r) \vec{d} = \vec{f} \quad (16)$$

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_r^T H_r^{-1} G_r \quad (17)$$

$$\therefore K^e \vec{d} = \vec{f}$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_b &= \int_{\Omega} \vec{d}^T B_b^T D_b B_b \vec{d} \sqrt{ad} \theta^1 \theta^2 & H_m &= \int_{\Omega} \vec{\alpha}^T P_1^T D_m P_1 \vec{\alpha} \sqrt{ad} \theta^1 \theta^2 \\ G_m &= \int_{\Omega} \vec{\alpha}^T P_1^T D_m B_m \vec{d} \sqrt{ad} \theta^1 \theta^2 & H_r &= \int_{\Omega} \vec{\beta}^T P_2^T D_r P_2 \vec{\beta} \sqrt{ad} \theta^1 \theta^2 \\ G_r &= \int_{\Omega} \vec{\beta}^T P_2^T D_r B_r \vec{d} \sqrt{ad} \theta^1 \theta^2 & \vec{f} &= \text{element nodal load vector} \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. 해석 결과

본 장에서는 수치예의 검증을 통해서 NURBS로 곡면을 표현한 쉘 유한요소의 성능을 살펴보았다. 그림 4는 12 개의 데이터 점을 가진 원통형 쉘을 NURBS를 이용하여 나타낸 것이다. 그림에서 별모양은 조정점 (control point)을 나타낸다.

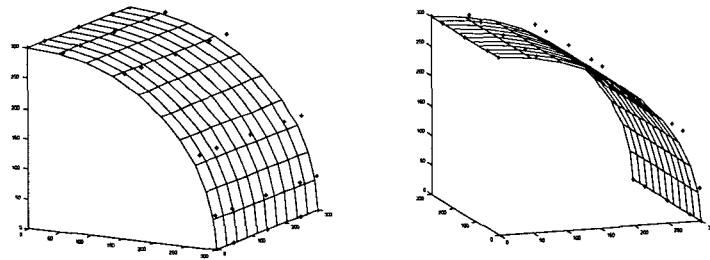


Fig.4 The cylinder configuration represented by NURBS method with 12 data points.

### 3.1. 구형 쉘에 집중하중이 가해지는 문제

그림 5는 중앙선을 따라  $90^\circ$  간격으로 반대 방향 힘이 작용하는 구형 쉘로서 대칭 성질을 이용하여 원래 문제를 1/4의 구형 쉘로 모델링 하여 해석하였다. 개발된 유한요소가 심한 멤브레인 잠김현상과 강체 운동 모드를 정확히 묘사하는가 하는 것을 시험하기 위한 모델이다. 그림 6은 NURBS를 이용하여 곡면을 표현할 때 사용되는 자료 점에 따른 해석 결과를 나타낸 그림이다. 자료 점의 수가 증가하면 정확한 표현식을 사용한 결과와 비슷해짐을 알 수 있다. 그림 7은  $17 \times 17$  자료점으로 곡면을 표현한 방법을 사용한 결과이다. 본 연구에서 개발된 유한 요소의 수렴성과 이전 참고 문헌들의 결과를 비교하였다. 그림에서 알 수 있듯이 메쉬 수가 작을 때에도 뛰어난 성능을 보이고 또한 메쉬를 늘리면 다른 이전의 유한요소 결과들 보다도 빠른 수렴성을 보인다.

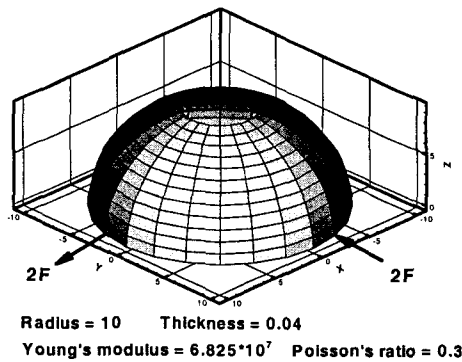


Fig.5 The configuration of hemisphere

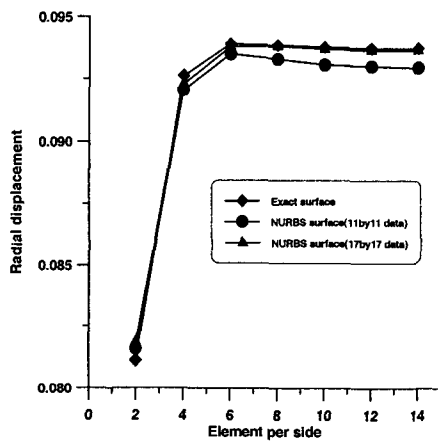


Fig.6 Radial displacement due to mesh refinement

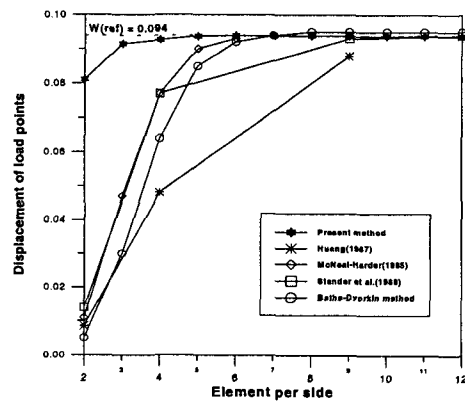


Fig.7 Comparison of convergence for displacement

#### 4. 결 론

본 연구에서는 자유곡면의 기하학적 모델링과 쉘 유한요소의 연동 프레임워크를 소개하고 해석 결과를 제시하였다. 쉘 유한요소로는 일반 곡선 좌표계에 기초한 쉘 이론으로부터 1차 전단 변형 쉘 유한요소를 개발하고 CAD에서 주어지는 자유곡면 표현식과 동일한 2개의 매개변수를 이용하여 CAD와 직접 연동이 가능하다. 그러므로 쉘의 구조 해석을 위해 곡면을 다시 근사하는 번거로움과 곡면의 재 근사에서 나타나는 기하 오차 (geometric error)는 발생하지 않는다. 두께가 얇아지면 발생하는 잠김현상을 해결하기 위해 가정된 변형률 방법과 거품함수를 사용하였으며 또한 계산상의 효율을 높이기 위해 부분 혼합 변분법을 사용하였다. 수치 예를 통해 본 연구에서 제시한 쉘 해석 기법과 곡면 모델링 연동법의 효율성을 알아 보았다.

#### 참고 문헌

1. Farin,G. *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*. New York: Academic Press, 1993.
2. DeBoor,C."On calculating with B-Splines," *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, No.1, 1972,pp.50-62
3. Budiansky.B, Sanders,J.L. Jr. "On the best First-Order Linear Shell Theory", *Prog. Appl. Mech* Vol 20, 1963, pp.129-140
4. Kemp BL, Cho CM, Lee SW. A four-node solid shell element formulation with assumed strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.43, 1998, pp.909-924.