

요소제거법을 이용한 구조물 위상최적설계 Structural Topology Optimization using Element Remove Method

임오강* 이진식** 김창식***
Lim,O-Kaung Lee,Jin-Sik Kim,Chang-Sik

ABSTRACT

Topology optimization has been evolved into a very efficient conceptual design tool and has been utilized into design engineering processes in many industrial parts. In recent years, topology optimization has become the focus of structural optimization design and has been researched and widely applied both in academy and industry. Traditional topology optimization has been using homogenization method and optimality criteria method. Homogenization method provides relationship equation between structure which includes many holes and stiffness matrix in FEM. Optimality criteria method is used to update design variables while maintaining that volume fraction is uniform. Traditional topology optimization has advantage of good convergence but has disadvantage of too much convergency time and additive checkerboard prevention algorithm is needed. In one way to solve this problem, element remove method is presented. Then, it is applied to many examples. From the results, it is verified that the time of convergence is very improved and optimal designed results is obtained very similar to the results of traditional topology using 8 nodes per element.

1. 서 론

구조물 최적화기법은 설계변수에 따라 치수, 형상, 위상최적설계로 나눌 수 있다. 치수최적설계에서는 구조물의 형상과 설계영역은 변화하지 않는다. 이 경우의 설계변수는 주로 바(Bar)의 단면적이나 판(Plate)의 두께이며, 어느 정도 상용화가 되어서 엑셀(Excel), 매트랩(Matlab)에서도 치수최적화는 가능하다. 형상최적설계는 구조물의 연속적인 경계면의 형상을 설계 변수로 하며, 형상과 설계영역이 계속적으로 바뀌어지기 때문에, 요소재분할(Remeshing)과정과 정교한 설계민감도 해석을 필요로 하기 때문에 치수최적설계보다는 다소 어려운 문제점이 있다. 위상최적설계는 구멍(Hole)의 개수나 위치를 찾아내는데 그 목적이 있으며, 요소를

* 정회원 · 부산대학교 기계설계공학과, 교수
** 경기공업대학 컴퓨터응용설계계열, 교수
*** 부산대학교 기계설계공학과 대학원

무한으로 나눌 수만 있다면 치수, 형상최적설계를 같이 수행하는 것과 같은 결과를 가져올 수도 있으며, 설계영역의 변화가 없기 때문에 요소재분할과정과 설계민감도 해석이 필요하지 않으며, 많은 설계변수를 취급하므로 컴퓨터의 발달에 가장 많은 영향을 받는다고 할 수 있다.

현재까지의 구조설계에서는 과거의 경험을 기초로하여 구조물의 형상과 위상은 고정시키고 치수최적화만을 수행하여 오고 있다. 하지만 형상과 위상을 고려하여 얻은 결과가 단순히 치수최적화만을 고려한 결과에 비해 월등한 효과^{(1),(2)}를 나타내는 경우가 대부분이다.

위상최적설계는 Bendsoe와 Kikuchi⁽³⁾에 의해 균질화(Homogenization)법을 이용한 위상 최적화 방법이 개발되면서 위상 최적화 분야에 획기적인 발전을 가져왔다. 균질화법을 이용한 최적화 방법은 물체를 수 많은 구멍들을 가지고 있는 미세 구조로 가정하여, 최적의 구조적 성능을 발휘하는 구멍들의 분포를 찾는다. 이때, 구멍의 크기와 강성행렬과의 관계는 균질화법에 의해 구해지고, 최적화 알고리즘으로는 최적조건법(Optimality Criteria Method)^{(4),(5)}를 사용한다.

본 연구에서는 현재 가장 많이 사용하고 있는 균질화법과 최적조건법을 그대로 사용하였다. 하지만 균질화법과 최적조건법을 같이 사용할 때 나타나는 가장 큰 단점이 수렴을 하기까지 많은 시간을 필요로 한다는 것이다. 이것을 해결하는 방법으로서 매 반복시 각 요소의 밀도를 기준으로하여 요소를 제거함으로써 빠른 수렴속도를 가지며, 기존의 위상과 같은 결과를 얻을 수 있는 새로운 요소제거법(Element Remove Method)을 제시하였다. 그리고 적용사례들을 통해 개발된 기법과 기존 기법과의 결과를 비교함으로써 이 기법의 타당성과 효율성을 확인하였다.

2. 이 론

2.1 문제 정식화

목적함수와 설계제한조건은 여러 가지가 있을수 있으나, 본 연구에서는 주어진 밀도를 이용하여 재료의 평균균질성(Mean Compliance)를 최소화하는 형상을 찾는 것으로 하면, 구조물의 위상 최적화 문제의 목적은 전체 포텐셜에너지의 최소화이며, 제약조건으로는 재료의 밀도가 전체밀도량을 넘지말아야하며, 설계변수로 사용될 a 와 b 의 값이 0에서 1사이의 값이 되어야 한다는 것이다. 이의 표현은 다음과 같이 구체화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : \Pi \\ \text{subject to} & : \Omega_s \leq \overline{\Omega}_s \\ & : 0 \leq a, b \leq 1 \\ \text{where, } \Pi & : \text{Potential Energy} \\ \Omega_s & : \text{Design Domain Density} \\ \overline{\Omega}_s & : \text{Volume Fraction} \\ a, b & : \text{Design Variables} \end{aligned}$$

위 식에서 나오는 식들을 라그랑지승수를 사용하여 제약이 없는 목적함수를 만들어내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} L = \Pi(u) & - \lambda \left[\sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \overline{\Omega}_s \right] \\ & - \sum_{e=1}^N \lambda_{a0}^e (-a^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{a1}^e (a^e - 1) \\ & - \sum_{e=1}^N \lambda_{b0}^e (-b^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{b1}^e (b^e - 1) \end{aligned}$$

where, L : Lagrange Function

$\Lambda, \lambda_{a0}^e, \dots, \lambda_{b1}^e$: Lagrange Multiplier

위 식에서 라그랑지함수를 최소화하는 것이 위상최적설계를 수행하는 것으로 간주되며, 이 라그랑지함수를 최소화하는 방안으로 최적조건법이 사용될 것이다.

2.2 균질화법(Homogenization Method)

Fig. 1에서 보여지는 것과 같이 일반적인 탄성문제는 주어진 물체에 대해 유한요소망, 구속, 하중들로 구성되어 있다. 이 문제에 사용되어진 물체를 복합재로 가정한다면, 이 복합재의 강성행렬(Constitute Matrix)은 Fig. 2에서 보여지는 것과 같이 랭크-1(rank-1)복합재인 경우 강성행렬 D 는 γ 의 함수로 표현할 수 있으며, 랭크-2(rank-2)복합재인 경우의 강성행렬 D 는 μ, γ 의 함수로 표현할 수 있다. 그리고, 각 요소마다 주기성(Periodicity)을 가지고 있다고 가정을 하게되면, 이 요소들을 Fig. 3과 같은 단위요소로 나타낼 수 있으며, 여기서 지시함수(Indicator Function)를 $X(x)$ 라고 한다면 지시함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } a=b=0 : \text{material} \\ 0 & \text{if } a=b=1 : \text{no material} \end{cases}$$

즉, 단위요소에서 $a=b=1$ 이면 물질이 비어있는 것이고, $a=b=0$ 이면 물질이 채워져있는 것으로 본다.

이 단위요소를 유한요소해석을 하여 우리가 구하고자하는 강성행렬을 구하는 것을 균질화법이라 하며, 구하고자하는 강성행렬은 이방성(Orthotropic)복합재로서 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} = f(a, b)$$

위 식에서 보여지듯이 모든 강성행렬의 값들은 a 와 b 의 함수로 표현이 가능하며, Fig. 4에 강성행렬의 값들중에서 D_{11} 의 값을 그래프화 시킨 것이다.

2.3 최소자승법(Least Square Method)

균질화법을 사용하여 강성행렬을 만들어내는 과정은 단위요소를 유한요소해석을 하여 D_{11}, D_{12}, D_{22} 및 D_{66} 을 구하는 것으로 전체 설계영역(Design Domain)에서 각 요소들에 대해 위의 과정을 반복한다면 시간적인 측면에서 좋은 결과를 얻기가 어렵다. 이런 이유로 나온 것이 최소자승법으로, 유한요소법을 사용하지 않고, 강성행렬이 a 와 b 의 함수로 표현이 가능하다는데 착안하여 보간법(Regression Method)을 사용하여 강성행렬의 값을 얻어낸다.

그 과정을 간단히 소개를 하면, 변수 a 와 b 를 각각 0부터 1까지 0.1씩 증가하면서 유한요소해석을 하여 총 121개의 정보(Data)를 가지고 최소자승법을 수행한다. 여기서는 함수로서 3차다항식(Bi-cubic Complete Polynomial)을 사용하였으며 실제로 유한요소해석을 하여 얻은 값과의 오차(Error)를 계산하고 그 오차의 제곱합(Residual)이 최소가 되게 함으로써 다항식의 계수들을 찾아 내었다. 이와 같은 과정을 간단히 요약하여

Fig. 6에 나타내었다.

Fig. 6에 보이는 방식을 그대로 따라 이 연구에서는 다항식을 3차식으로 가정하였다. 그래서 나타나는 10개의 미지수를 가진 다항식을 가지고 오차와 오차의 제곱항을 구하고, 오차의 제곱항을 최소화하는 10×10 의 연립방정식을 얻어내게되며, 이 연립방정식을 풀어서 10개의 미지수를 얻어내게 된다.

아래의 식은 최소자승법을 통해 구해낸 다항식들중 D_{11} 에 대한 항을 나타낸 것이다.

$$D_{11} = 1.03470 - 0.19507a - 0.44815b + 0.17949a^2 - 0.83233ab - 0.46682b^2 - 0.08561a^3 + 0.19546a^2b + 0.68235ab^2 - 0.04131b^3$$

위 식을 그래프화 한다면, Fig. 5에서 보이는 유한요소해석을하여 나온 결과치의 그래프와 거의 동일한 그래프를 얻을수 있다.

2.4 최적조건법(Optimality criteria method)

최적조건법이란 랑그랑지승수(Lagrange Multiplier)를 도입하여 설계제한조건을 전체 포텐셜에너지에 포함시켜 새로운 목적함수를 만들어 제한이 없는 문제형태로 바꾸어 준 뒤, 변분법을 이용하여 최적조건을 찾아내는 방법으로, 최적조건(Optimality Condition)을 만족시키도록 밀도분포와 전체밀도량(Volume Fraction)을 번갈아 가면서 개선시키면서 원하는 해에 도달할 수 있게 하는 것이다. 여기서 밀도분포를 개선하기 위해서는 유한요소법을 이용하여 수치적으로 설계변수의 민감도 정보를 구하고, 이 정보를 가지고 밀도분포를 개선시키는 것으로 또 다른 개선알고리즘(Updating scheme)을 필요로하게 된다. 이 개선알고리즘은 설계변수 a 와 b 에 똑같이 적용되게 되며 그 중 설계변수 a 에 관한 항만을 나타내게되면 다음과 같다.

$$a'_{k,i} = \begin{cases} \min\{(1+\zeta)a'_k, 1\} & \text{if } a'_k(E'_a)_k \leq \max\{(1-\zeta)a'_k, 0\} \\ a'_k[(E'_a)_k]^\eta & \text{if } \max\{(1-\zeta)a'_k, 0\} < a'_k(E'_a)_k < \min\{(1+\zeta)a'_k, 1\} \\ \max\{(1-\zeta)a'_k, 0\} & \text{if } \min\{(1+\zeta)a'_k, 1\} \leq a'_k(E'_a)_k \end{cases}$$

where, E'_a : 민감도 정보

ζ : 이동한계(move limit)

η : 가중인자(weighting factor)

위 식에서 보이는 것과 같이 설계변수 a 와 b 에 대하여 밀도분포를 개선시킬 때 사용되는 ζ 는 이동한계라하여 알고리즘의 수렴속도와 관계를 하며, η 는 가중인자로서 알고리즘의 안정성과 관계를 하고 있다. 여기서는 최적조건법을 가지고 비교를 하는게 아니라 뒤에나올 요소제거법과의 비교를 목적으로하기 때문에 각 실험에서 똑같은 값을 사용하면서도 수렴속도와 안정성에 문제를 일으키지 않을 정도의 초기치를 주었다. 본 연구에서는 이동한계는 0.02, 가중인자는 1.0을 사용하였다.

위 식은 밀도분포를 개선하는 알고리즘이며 이와 더불어 사용되는 전체밀도량을 개선시키는 알고리즘으로는 이등분법(Bisection Method)를 사용하였다. 이 이등분법은 다른 알고리즘과 비교해볼 때 민감도정보등 다른 정보를 필요로 하지 않기 때문에 쉽고 단순하게 적용할수 있다는 장점을 가지고 있어서 채택하였다.

3. 요소제거법(Element Remove Method)

위상최적설계에서 사용되는 일반적인 요소제거법⁶⁾이란 물질을 모두 가득 채운상태에서 개선알고리즘을 이용하여 물질의 밀도분포를 하나씩 제거해나가는 방식을 사용하고 있다. 하지만 본 연구에서 말하는 요소제거법이란 밀도를 제거해나가는 것이 아니라 요소를 제거해 나가는 것을 말하며, 초기 설계영역에서 요소가 제거되기 때문에 설계영역이 작아짐에 따라 유한요소해석시 시간을 줄여보자는데 목적이 있다. 요소를 제거하는 기준은 요소의 밀도를 판단의 기준으로 삼았으며, 그 식은 아래와 같다.

If ($\rho < 0.1$) then Remove Method

위 식에서 0.1이라는 수치는 단순히 물질이 비어있는 상태를 말하는 것이지 절대적인 수치의 개념이 아니다. 즉, 수치를 10^{-5} 으로 바꾸어도 결과에 미치는 영향은 거의 없었다. 제거알고리즘(Remove Algorithm)은 다음과 같은 단계로 구성되어 있으며, 요소가 직접 제거되기 때문에 요소의 개수는 제거알고리즘이 한번 수행될때마다 하나씩 작아지지만 절점(node)의 개수는 꼭 하나씩 작아지는 것은 아니다.

- 1) 전체요소의 개수를 하나씩 감소시킨다.
- 2) 제거될 요소의 요소결합도(Element Connectivity)를 저장해 둔다.
- 3) 제거될 요소의 절점들을 요소결합도와 비교 한다.
- 4) 다른 요소의 요소결합도에 제거될 요소의 절점이 있으면 절점은 제거되지 않는다.
- 5) 다른 요소의 요소결합도에 제거될 요소의 절점이 없으며 절점은 제거된다.
- 6) 절점위치, 요소결합도 벡터들을 개선한다.
- 7) 설계변수, 하중, 구속벡터들을 개선한다.

이 방식은 판단의 기준이 만족하는 요소가 생성될때마다 거치게 되며, 다음 장에서는 지금까지 언급한 일련의 방법, 최소자승법으로 재료의 강성행렬을 구하고 라그랑지승수를 도입한 최적조건법에 의한 밀도 개선 알고리즘에 각 개선단계에서 요소제거법을 도입한 최적화 방법을 몇 가지 예제에 적용해 보고자 한다.

4. 수 치 예 제

3.1 짧은 외팔보

Fig. 6의 a)에서 보여지는 것과 같이 한쪽 면이 고정된 설계영역에서 반대편의 중앙에 종방향 하중을 주었다. 가로방향으로는 20개의 요소가 세로방향으로 60개의 요소를 총 1200개의 요소를 사용하였으며, 전체밀도량은 20%를 사용한 경우에 요소제거법을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우를 나누어 표현하였다.

Fig. 6에서 사용되어진 물성치는 $E=2.2 \times 10^4$ (kgf/mm²), $\nu=0.3$ 을 사용하였으며 하중은 1kgf를 가하였다.

Fig. 6의 b)의 결과는 순수 최적조건법만을 사용한 결과로서 총 287번의 반복후에 결과가 나왔으며, 총 해석시 사용된 시간이 10~15분정도였으며, 포텐셜에너지는 0.000031이 나왔다. Fig. 6의 c)의 결과는 최진조건법과 요소제거법을 모두 사용한 알고리즘의 결과로서, 육안으로 보아도 제거된 부분에서는 요소가 없음을 알 수 있다. 이 요소가 제거됨으로써 반복이 계속 되어질수록 시간은 작게 걸림을 알 수 있다. 총 296번의 반

복후 결과가 나왔으며, 총 해석시 사용된 시간은 1~2분정도였다. 초기에 사용된 요소는 1200개이지만 최종적으로 남은 요소는 242개로서 전체밀도량 20%를 만족한다고 볼 수 있으며, 포텐셜에너지는 0.000031로서 앞의 결과와 같은 값이 나왔다.

3.2 외팔보

Fig. 7의 a)에서 보여지는바와같이 Fig. 6의 짧은 외팔보에서 횡방향길이를 확대시킨 것이며, 가로와 세로 방향으로 24개의 요소를 총 576개의 요소를 사용하였으며, 전체밀도량은 50%를 사용하였다. 여기서 사용되어진 물성치는 $E=2.2 \times 10^4(\text{kgf/mm}^2)$, $\nu=0.3$ 을 사용하였으며 하중은 1kgf를 가하였으며, Fig. 7의 b)의 결과가 순수 최적조건법만을 사용한 결과로서 총 377번의 반복횟수, 10~15분의 시간, 0.000195의 포텐셜에너지를 보였으며, Fig. 7의 c)의 결과가 요소제거법을 모두 사용한 알고리즘의 결과로서, 총 334번의 반복횟수, 2~3분의 시간, 0.000195의 포텐셜에너지를 보였다.

4. 결 론

본 연구는 최적조건법을 Fortran을 사용하여 프로그래밍하였고 최적조건법의 단점을 보완하기 위해 요소 제거법을 제한함과 동시에 최적조건법과 연계하여 위상최적화 프로그램을 완성하였다. 그리고 이 프로그램의 타당성을 보여주기 위해 최적조건법만을 사용한 결과와 요소제거법을 병행한 예를 들어 비교, 분석하였다.

앞에서 나타난 결과들을 바탕으로 이 연구가 목적하였던 시간감소는 확연한 결과가 나왔으며, 정확도 측면에서도 두 결과의 위상을 육안으로의 비교와 포텐셜에너지로 비교해 볼 때 결코 떨어지지 않음을 보였다.

후 기

본 연구는 한국과학기술재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원으로 수행되었습니다. 재단의 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

- (1) 박연규, "Topology Optimization", 한국 CAD/CAM학회지, 제3권, 제2호, 2000, pp.89~92.
- (2) 김기화, "Topology based Design", 대한조선학회지, 제35권, 제3호, 1998, pp.66~70.
- (3) Bendsoe M.P. and Kikuchi N., "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.71, 1988, pp.197~224.
- (4) Hassani B. and Hinton E., "Homogenization and Structural Topology Optimization", 1998, Springer.
- (5) 김병수, 서명원, "최적조건법에 의한 위상 최적화 연구", 한국자동차공학회논문집, 제7권, 제8호, 1999, pp.224~232.
- (6) 한석영, 배현우, "위상 최적화를 위한 양방향 요소 제거법의 개발", 대한기계학회논문집A권, 제23권, 제5호, 1999, pp.814~819

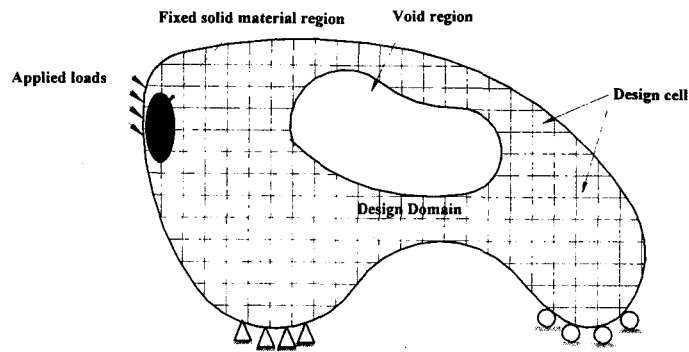


Fig. 2 General Elasticity Problem

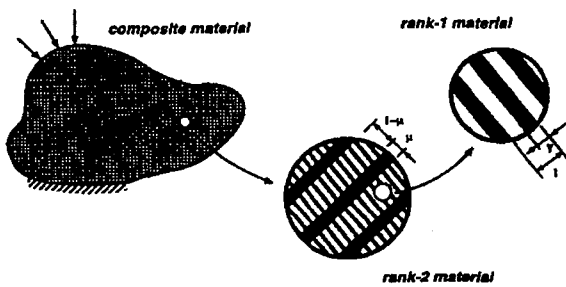


Fig. 3 Rank-1, 2 Composite Material

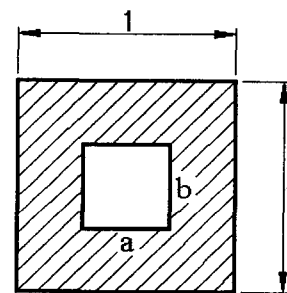


Fig. 4 Unit cell

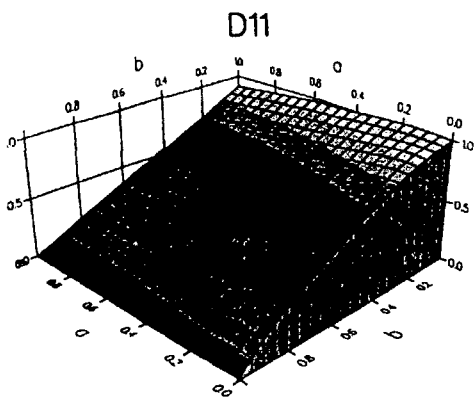


Fig. 4 Elasticity Constant

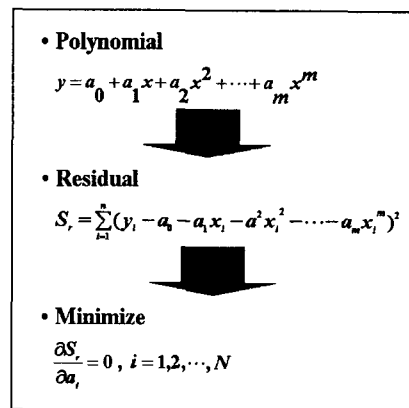


Fig. 6 Least Square Method

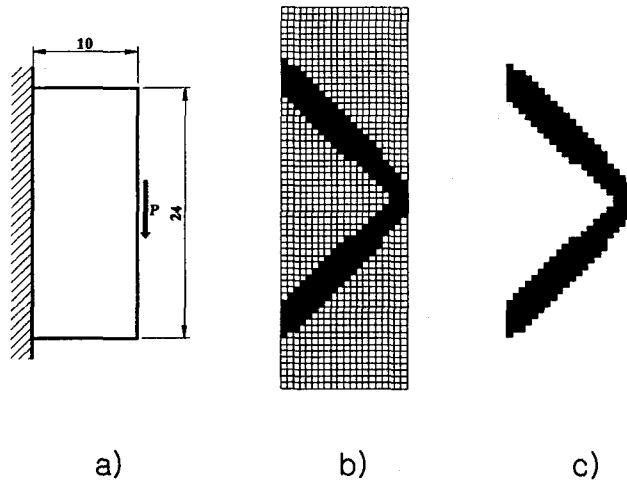


Fig. 6 Clamped Deep Beam

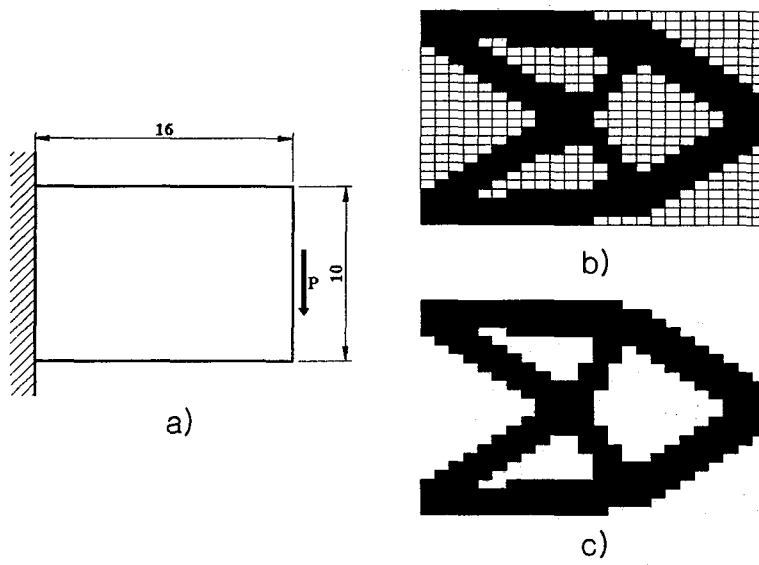


Fig. 7 Clamped Beam