

반해석적 방법을 이용한 고유치 문제의 형상 설계 민감도 향상에 관한 연구

A study on the improvement of shape design sensitivity in eigenvalue problems using semi-analytical method

김 현 기* 조 맹 효**
Kim, Hyun Gi Maenghyo Cho

ABSTRACT

Structural optimization often requires the evaluation of design sensitivities. The Semi Analytic method(SAM) for computing sensitivity is popular in shape optimization because this method has several advantages. But when relatively large rigid body motions are identified for individual elements, the SA method shows severe inaccuracy. In this paper, the improvement of design sensitivities corresponding to the rigid body mode is evaluated by exact differentiation of the rigid body modes. Moreover, the error of the SA method caused by numerical difference scheme is alleviated by using a series approximation for the sensitivity derivatives and considering the higher order terms. Finally, this paper shows that the refined SA method including the iterative method improves the results of sensitivity analysis in dynamic problems.

1. 서 론

민감도 해석은 설계 변수의 변화가 전체 구조 시스템에 어떠한 영향을 미치는가를 미리 예측, 평가하고, 설계자에게 더 좋은 설계를 위한 방향과 방법을 제시하는 중요한 척도가 되고 있다. 따라서, 그 해석은 기계 공학의 설계와 해석에서 매우 중요하며, 설계 변화율에 기초한 최적화 기법에도 항상 필요하므로 민감도 해석의 신뢰성은 구조 설계에 필수적이다. 민감도 해석시 유한요소와 연계해서 민감도를 해석할 때는 직접 미분법보다는 수치미분방법이 구현하기에 용이하다. 특히 반해석적 방법에 의한 민감도 계산은 컴퓨터 자원을 많이 사용하지 않고 구현도 간단하다. 그러나 정적문제에서 형상 설계 민감도(shape sensitivity) 해석을 수행할 때 반해석적 방법을 사용하면 강체 모드가 큰 경우에는 증분량(step size)을 줄여도 수렴하는 민감도 계산 결과를 제공하지 못하는 것으로 보고되고 있다[1]. 이것은 미분항이 엄밀해로 계산되는 것이 아니라, 차분에 의해 계산되는 과정에서 요소에서 발생하는 강체모드의 결과가 round-off 오차를 증가시키는 것으로 판단되어 van Keulen[2]은 요소 내의 변위장을 순수 변형부와 강체 모드부로 분리하여 전체 민감도

* 서울대학교 기계공학부 석사과정

** 서울대학교 기계항공공학부 부교수

중에서 강제 모드부의 영향을 해석적 방법으로 도출하는 민감도 해석기법을 제시하였다. 또한, Oral[3]은 von Neumann 급수를 이용한 반복법으로 고차항을 고려함으로써, 증분량이 작았을 때 발생할 수 있는 truncation 오차를 감소시켜 민감도 해석 결과를 개선할 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 두 방법을 조합한 반해석적 민감도 해석기법을 제안하고, 동적 문제에 적용시킨 결과를 제시한다. 고유벡터를 강제모드와 순변형모드로 나누어 강제모드부의 민감도는 해석적으로 계산하며 반복법을 적용하여 설계변수의 증분량이 큰 경우에도 수렴성이 보장되도록 한다. 본 연구의 민감도 해석기법은 수치예를 통해 신뢰도와 효율성을 검증한다. 기존의 방법이 가지고 있었던 한계를 보완하기 위해 강제모드를 고려하여 round off 오차를 개선하였다. 그리고, truncation 오차를 줄이는 방안으로써 차분에 의해 계산되는 부분에 대해서는 고차항을 고려하기 위한 반복법을 추가하여, 더욱 개선된 결과를 제시하였다.

2. 정적문제에서의 반해석적 방법 개선

반해석적 방법과 유한차분법 모두 강제모드가 큰 경우에 증분량에 따라 신뢰할 수 없는 결과가 나타나게 된다. 따라서, 대부분의 오차를 발생시키는 $\frac{dK}{dx}$ 에 대해서, 강제모드가 차지하는 오차 부분을 제거 해야 할 필요가 있다.[2] 기존의 반해석적 방법은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{du}{dx} = K^{-1} \left(\frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right) \quad (1)$$

대부분의 오차는 $\frac{dK}{dx}$ 를 차분으로 계산할 때 발생하게 된다. 차분에 의한 미분식의 개선을 위해서는 강제모드와 순수 변형부와의 분리가 필요하며, 아래의 과정에 의해 전개될 수 있다.

$$\delta W_i = \delta u \cdot Ku = \sum_{e=1}^N \delta u_e \cdot K_e u_e \quad (2)$$

위의 관계에서 강제모드 공간의 벡터는 $K_e r = 0$ 이 된다. 그리고 이 식을 설계 변수로 미분하게 되면, 다음과 같다.

$$K_e' r_k + K_e r_k' = 0 \quad (3)$$

변위장은 다음의 과정을 통해서 순수 변형 부분과 순수 강제모드 부분으로 분리 할 수 있다.

$$u_e = u_e^\epsilon + \sum_{k=1}^r \frac{u_e \cdot r_k}{r_k \cdot r_k} r_k = u_e^\epsilon + \alpha^k r_k \quad (4)$$

α^k 는 변위장 벡터를 강제모드벡터와의 내적을 통해서 강제모드 부분을 분리하는 것을 의미한다. 이 식을 가상 하중 벡터에 대입하면, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_e &= f_e' - K_e' u_e = f_e' - K_e' (u_e^\epsilon + \alpha^k r_k) \\ K_e' (\alpha^k r_k) &= \alpha^k (K_e' r_k) = -\alpha^k (K_e r_k') \end{aligned}$$

따라서, 가상 하중 벡터는 다음과 같이 정리된다.

$$q_e = f_e' - K_e' u_e^\epsilon + \alpha^k K_e r_k' \quad (5)$$

위의 식에서 $K_e' u_e^\epsilon$ 는 차분에 의해 계산되고, $\alpha^k K_e r_k'$ 는 임밀해로 계산된다. $K_e u_e^\epsilon$ 이 강제모드 공간에 미치는 영향을 제거하고, 정리하면 다음과 같다.

$$q_e = f'_e - K'_e u_e^\epsilon + \left[\frac{r_k \cdot K_e u_e^\epsilon}{r_k \cdot r_k} \right] r_k + \left[\frac{r_k \cdot K_e u_e^\epsilon}{r_k \cdot r_k} \right] r_k + \alpha^k K_e r_k \quad (6)$$

3. 강체모드의 전개

본 연구에서는 Aminpour[4]가 제안한 4절점 혼합 셀요소소에 대해 민감도 기법을 정립하고자 한다. 강체모드를 구성하기 위해서는 각 요소의 강체모드 개수가 6개로 주어져야 한다. 본 논문에서 사용하는 혼합요소는 회전각 자유도를 가지고 있기 때문에, 요소마다 7개의 zero eigenvalue 값이 나타나게 된다. 그러므로,

$$\theta_z = \frac{1}{2}(u_{,y} - v_{,x}) \text{ 을 구속조건으로 이용하여 허구 강체 모드를 제어하였다. [5]}$$

강체 모드 전개는 힘 평형방정식과 모멘트 평형방정식을 이용하여 구성할 수 있다. Fig 1.은 절점당 6자유도를 갖는 4절점 요소의 평형방정식을 나타내는 그림이다.

Fig 1 에서, 강체모드 조건을 만족시키는 힘평형식과 모멘트 평형식은 다음과 같다.

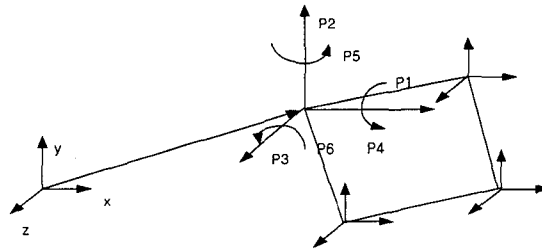


Fig 1. Rigid body mode in 4 node element

$$\begin{aligned} p_1 + p_7 + p_{13} + p_{19} &= 0 \\ p_2 + p_8 + p_{14} + p_{20} &= 0 \\ p_3 + p_9 + p_{15} + p_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -p_2 \bar{z}_1 + p_3 \bar{y}_1 + p_4 - p_8 \bar{z}_2 + p_9 \bar{y}_2 + p_{10} - p_{14} \bar{z}_3 + p_{15} \bar{y}_3 + p_{16} - p_{20} \bar{z}_4 + p_{21} \bar{y}_4 + p_{22} &= 0 \\ p_1 \bar{z}_1 - p_3 \bar{x}_1 + p_5 + p_7 \bar{z}_2 - p_9 \bar{x}_2 + p_{11} + p_{13} \bar{z}_3 - p_{15} \bar{x}_3 + p_{17} - p_{19} \bar{z}_4 + p_{21} \bar{x}_4 + p_{23} &= 0 \\ -p_1 \bar{y}_1 + p_2 \bar{x}_1 + p_6 - p_7 \bar{y}_2 + p_8 \bar{x}_2 + p_{12} - p_{13} \bar{y}_3 + p_{14} \bar{x}_3 + p_{18} - p_{19} \bar{y}_4 + p_{20} \bar{x}_4 + p_{24} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식(7)과 식(8)의 관계를 행렬식 형태로 전개하여, 각 자유도의 병진과 회전 강체모드 벡터를 얻을 수가 있다. 강체모드벡터는 직교화 과정을 통해 기준축에 대해 일반화 시킬수가 있다.

4. 동적 문제에서의 개선

기존의 반해석적 방법은 유한차분법에 비해 메모리와 연산 시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 상대적으로 증분량의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내고 있다. 특히, $10^{-1} \sim 10^{-7}$ 에서는 truncation 오차가 주된 원인이 10^{-7} 부터는 round-off

가 주된 원인이 된다.[6]

본 논문에서는 두 경우의 오차를 모두 제거 하기 위해 고유벡터를 순수 변형부와 순수 강제모드부로 분리하여 계산함으로써 round-off 오차 감소의 효과를 얻을 수 있고, 미분수행시 증분량이 클 때 발생할 수 있는 truncation 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가로써 개선할 수 있었다. 비감쇠 진동일 때 고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$K(x)u(x) - \lambda(x)M(x)u(x) = 0 \quad (9)$$

이 문제는 설계 변수에 대해서 미분을 하여 정리 하면, 다음과 같은 고유치의 민감도에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\lambda}{dx} \cong \frac{u^T \left(\frac{K(b+hI_i) - K(b)}{h} - \lambda \frac{M(b+hI_i) - M(b)}{h} \right) u}{u^T M u} \quad (10)$$

식(10)에서 우변의 분모 $u^T M u$ 와 분자의 두 번째 항 $\lambda u^T \frac{dM}{dx} u$ 은 간단히 계산될 수 있다. 여기서, $\frac{dM}{dx}$ 는 차분으로 계산되며, 첫 번째 항은 강제모드를 고려하여, 엄밀해로 계산이 가능하다. $u^T K' u$ 에서 u 를 순수 변형과 강제모드 부분으로 분리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (u_e^e{}^T + \alpha^k r_k^T) K' (u_e^e + \alpha^k r_k) &= (u_e^e{}^T + \alpha^k r_k^T) (K' u_e^e - \alpha^k K r_k') \\ &= u_e^e{}^T K' u_e^e + \alpha^k r_k^T K' u_e^e - \alpha^k u_e^e{}^T K r_k' - (\alpha^k)^2 r_k^T K r_k' \end{aligned} \quad (11)$$

위의 식에서 네 번째 항은 $Kr=0$ 에 의해 소거되고, 두 번째 항을 $-\alpha^k r_k^T K u_e^e$ 로 바꾸면, 두 번째와 세 번째는 동일한 식이므로, 위의 식은 $u_e^e{}^T K' u_e^e - 2\alpha^k u_e^e{}^T K r_k'$ 이 된다. 따라서, 설계 변수 변화에 대한 고유치 민감도는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\lambda}{dx} \cong \frac{u_e^e{}^T K' u_e^e - 2\alpha^k u_e^e{}^T K r_k' - \lambda u^T M' u}{u^T M u} \quad (12)$$

식 (12)에 의해 구해지는 고유치 민감도는 증분량이 10^{-4} 이하로 작아질 때는 안정적인 수렴성을 보이게 되지만, 10^{-3} 이상으로 커지게 되면, truncation 오차에 의해 수렴성이 크게 떨어지게 된다. 따라서, 증분량이 큰 경우에도 일정한 수렴성을 보장하기 위해서는 truncation 오차를 감소시키는 것이 필요하다.

반복법을 적용하기 위해서는 변화량을 이용하여 식을 표현할 필요가 있다. 설계변수의 변화에 따른 구조물의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K']\{u'\} = \lambda' [M']\{u'\} \quad (13)$$

설계변수의 변화에 따른 구조의 변화가 작은 경우 변화된 행렬과 변화된 고유치, 고유벡터는 변화량 Δ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [K'] &= [K] + [\Delta K] \\ [M'] &= [M] + [\Delta M] \\ \lambda' &= \lambda + \Delta \lambda \\ [u'] &= [u] + [\Delta u] \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에 의해서 식 (13)은 식 (15)로 표현될 수 있다.

$$(K + \Delta K)(u + \Delta u) = (\lambda + \Delta \lambda)(M + \Delta M)(u + \Delta u) \quad (15)$$

고유벡터 변화량 Δu 만을 좌항에 나타내면, 식 (16)과 같다.

$$\{(K + \Delta K) - (\lambda + \Delta \lambda)(M + \Delta M)\} \Delta u = \Delta \lambda(M + \Delta M)u - \{(K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M)\}u \quad (16)$$

고유벡터 민감도는 식 (16)에서 양변에 $\{(K + \Delta K) - (\lambda + \Delta \lambda)(M + \Delta M)\}$ 의 역행렬을 취하여 구할 수 있다.

$$\Delta u = \{(K + \Delta K) - (\lambda + \Delta \lambda)(M + \Delta M)\}^{-1} \{\Delta \lambda(M + \Delta M) - (K + \Delta K) + \lambda(M + \Delta M)\}u \quad (17)$$

식 (15)에서 고유치 변화량 $\Delta \lambda$ 만을 좌항으로 이항한 후, 양변에 고유벡터 u^T 를 곱하고 정리하여, 식 (18)을 얻은 후, 고유치의 민감도를 식(19)와 같이 얻을 수 있다.

$$u^T(M + \Delta M)(u + \Delta u)\Delta \lambda = u^T\{(K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M)\}(u + \Delta u) \quad (18)$$

$$\Delta \lambda = \frac{u^T(\Delta K - \lambda \Delta M)(u + \Delta u)}{u^T(M + \Delta M)(u + \Delta u)} \quad (19)$$

식 (17)에 입력되는 고유치 민감도 초기값은 식 (12)에서 구해지며, 여기서 구해지는 고유벡터는 식(19)에 입력되어 고유치 민감도를 계산할 수 있다. 계산된 민감도 값은 다시 식 (17)에 입력된다. 이런 과정은 고유치 민감도가 수렴할 때까지 계속되면, 대략 2-3회의 반복에 의해 수렴값을 얻을 수가 있다.

5. 수치예제

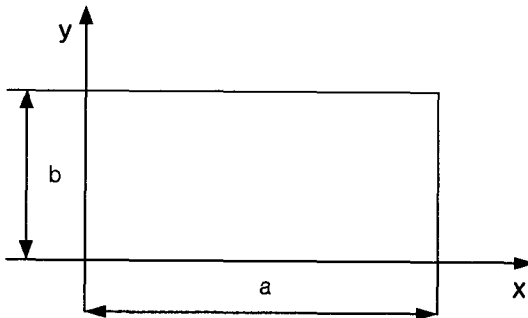


Fig 2. Vibration problem of plate

Fig 10은 판의 진동문제로서, 경계조건은 단순지지이며, $E=100$, $t=1$, $\nu=0.3$ 이다. 고유값 엄밀해와 민감도 엄밀해는 아래에 주어졌다.

$$\text{고유값 엄밀해 } \phi = \frac{\lambda_{nm}}{\left(\frac{D}{\rho h}\right)} = \pi^4 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right]^2 \quad (20)$$

$$\text{고유값 민감도 엄밀해 } \frac{\delta \phi}{\delta a} = -\frac{4n^2\pi^4}{a^3} \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] \quad (21)$$

수치예를 통한 검증을 위해서 길이 비 $a/b=2$ 인 경우 반해석적 방법, 유한차분법, 강체모드를 고려한 반해석적 방법을 각각 1차 모드부터 4차 모드까지 각 모드에서 동일한 격자수 일 때 증분량의 변화에 따른 수렴 경향을 나타내었다. 기존의 반해석적 방법이나 유한차분법은 증분량 범위 $10^{-1} \sim 10^{-4}$ 에서 truncation 오차가 크게 발생하고, 10^{-10} 부터는 round off 오차에 의해 오차가 크게 생기는 것을 알 수 있다. 기존의 반

해석적 방법과 비교해 볼 때, 강제모드를 고려한 경우는 두 가지의 주된 오차를 크게 감소 시킬 수 있고, 증분량에 무관하게 안정적인 수렴값을 가지게 된다는 것을 알 수 있다.

그 결과는 Fig 3 에 주어져 있다. Fig 4는 강제모드만을 고려한 결과와 반복법에 의해 truncation 오차를 감소시켰을 때의 결과를 비교한 것이다. 강제모드만을 고려했을 경우는 초기 증분량에서 큰 오차값을 보이고 있으며, 10^{-3} 의 값에서 수렴하고 있음을 알 수 있다. 반복법을 적용했을 때는 수렴속도가 더 빠르게 나타나고 있고, 안정성에서도 상대적으로 좋은 결과를 보이고 있다.

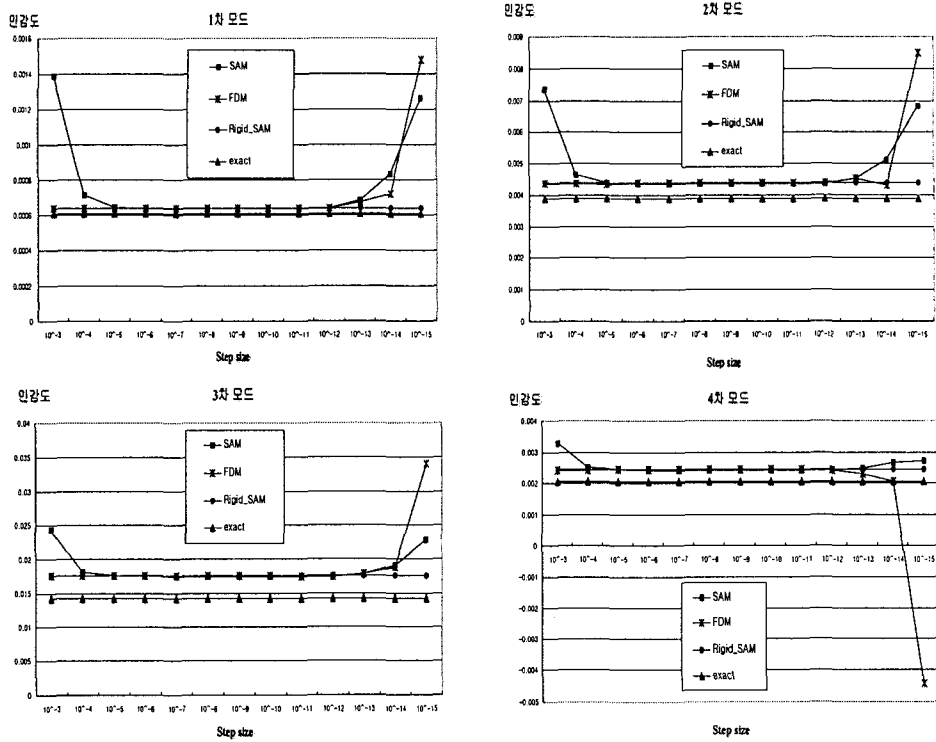
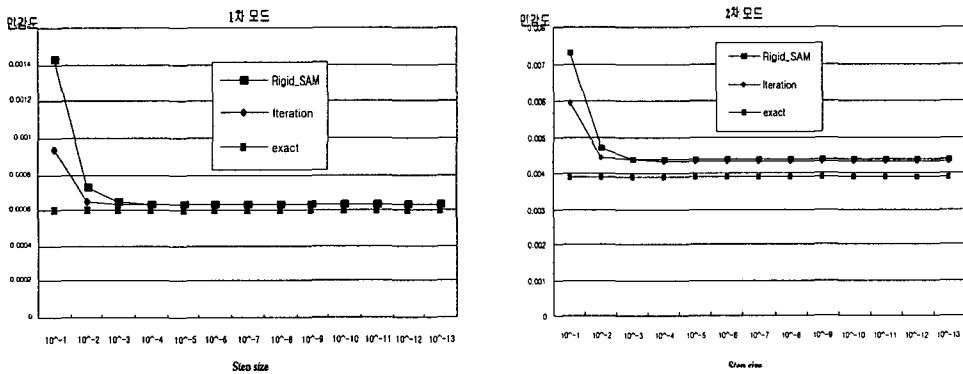


Fig 3. $a/b=2$,Result of eigenvalue sensitivity



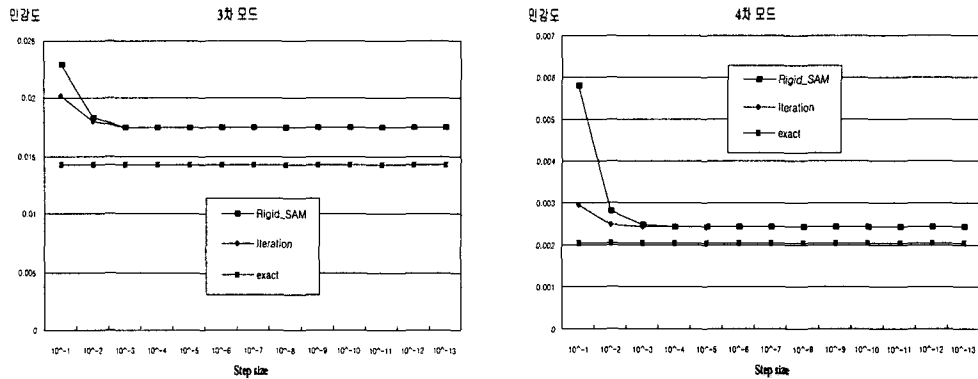


Fig 4. a/b=2 ,Result of eigenvalue sensitivity

6. 결 론

기존의 반해석적 방법은 유한차분법에 비해 메모리와 연산 시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 정적문제에서 상대적으로 강체모드가 큰 경우에는 증분량의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내며, 특히, $10^{-1} \sim 10^{-7}$ 에서는 truncation 오차가 주된 원인이고, 10^{-7} 부터는 round-off 오차가 주된 원인이 된다.[2] 이 문제는 Van Keulen 과 Oral 등에 의해 강체모드의 분리와 반복법에 의해서 개선되어 왔다.

본 논문에서는 동적 문제의 경우 이 두가지 방법을 조합하여 적용시킨 결과를 제시하였다. 그 방법으로 고유벡터를 강체모드와 순변형부로 나누어서 초기 고유치 민감도 값을 산출한후, 증분량을 이용한 표현식을 Von Neumann 급수를 사용하여 고유 벡터 변화량식과 고유치 변화량식을 구성하였다. 2~3 회의 반복법을 거치면 수렴값을 얻을 수가 있으며, 그 결과는 Fig 4에 보였다. 증분량이 10^{-5} 이하로 작은 경우에는 반복법의 성능개선이 확연히 나타나지는 않는다. 그러나 증분량이 큰 경우는 반복법을 사용하지 않는 경우보다 수렴 속도를 개선할 수 있고, 오차를 크게 줄일 수 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 동적문제에서도 고유벡터를 강체모드와 순변형부분으로 분리함으로써 round off 오차를 줄일 수 있고, 고차항을 추가하는 반복법에 의해 truncation 오차를 크게 감소시켰기 때문이다. 결론적으로, 동적문제에서 고유벡터를 순수 변형부와 순수 강체모드부로 분리하여 계산함으로써 오차 감소의 효과를 얻을 수 있고, truncation 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가로써 개선할 수 있었다. 본 연구에서 제시한 민감도 계산법은 정적문제에서도 계산 효율이 좋고, 높은 정확도를 보장하였으며, 구현하기가 간편하다. 특히, 동적문제는 정적문제에 비해 고유치 연산을 위해 많은 메모리와 시간을 요구하기 때문에 기존의 민감도 계산방법의 개선이 필요하며, 본 연구에서 제시된 방법은 상용 유한 요소 소프트웨어에도 쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. E.Parente Jr. and L.E.Vaz, 2001, "Improvement of semi-analytical design sensitivities of non-linear structures using equilibrium relations", *Int.J.Numer.Meth.Engng.*50, pp 2127 ~ 2142
2. F.Van Keulen and H.De Boer, 1998, "Rigorous improvement of Semi-analytical design sensitivities by exact defferentiation of rigid body motions". *Int.J.Numer. Meth. Engng.*42, pp. 71 ~ 91
3. Suha Oral, 2000, "A Mindlin plate finite element with semi analytical shape designsensitivities", *Computers and Structures.*78, pp 467 ~ 472
4. M.A.Aminpour, 1992, "An assumed stress hybrid 4 node shell element with drilling degrees freedom ", *Int.,J,Meth,Engng.*33, pp. 19 ~ 38
5. T.J.R.Hughes and F.Brezzi,1989, "On drilling degrees-of-freedom", *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*,72, pp.105-121
6. Barthelemy, T.Chon, Raphael T.Haftka,1988,"Accuracy problems associated with semi-analytical derivatives of static response",*Finite Elements in Analysis and Design*4, pp.249-265