

## 9절점 가변형도 쉘요소를 이용한 콘크리트 구조물의 후-정점하중 해석

### A post-peak analysis of concrete structures using a 9-node assumed strain shell element

이 상 진\* 이 홍 표\*\*\* 서 정 문\*\*\*  
Lee, Sang-Jin Lee, Hong-pyo Seo, Jeong-Moon

#### ABSTRACT

The post-peak analysis of concrete structures is carried out using a nine-node Reissner-Mindlin (RM) shell element which is formulated by using degenerated solid concepts. In order to avoid element deficiencies inherited in the standard RM shell element, assumed strains are adopted in the present shell element. A microscopic material model is adopted to represent the inelastic characteristic of concrete material. In particular, a concrete softening model is introduced to this material model. The arc-length control method is used to trace the post-peak behaviour of concrete structures. From the numerical test of the single-edge-notched beam, the present shell element shows a reasonable agreement with experimental data.

#### 1. 서 론

콘크리트는 하중 재하시 재료의 성능저하로 인해 연화현상을 나타내며 이는 결과적으로 수치해석시 해의 불안정을 초래하게 된다. 콘크리트 구조물은 이러한 성능저하로 인해 때로 기하학적인 비선형성에 의해 나타나는 스냅드루 (snap-through)와 같은 후-정점하중 거동을 나타내게 된다.

콘크리트 구조물의 후-정점하중 거동을 수치적으로 예측하기 위해서는 도입된 콘크리트 재료모델이 연화현상을 적절히 표현할 수 있어야 하며 균열이후에 일어나는 복잡한 하중-변위의 경로를 추적할 수 있는 해석 알고리즘이 필요하다. 따라서 콘크리트 구조물의 이러한 거동을 예측하기 위하여 연화모델을 도입한 미시적 재료모델<sup>(1)</sup>과 가변형도법<sup>(2)</sup>을 바탕으로 Reissner-Mindlin<sup>(3)</sup> 퇴화 쉘 요소<sup>(4)</sup>를 개발하고 이를 호장법과 연계하였다. 특히 인장력을 받는 콘크리트의 연화현상은 철근콘크리트 구조물에서 콘크리트에 균열이 발생하면 철근과 콘크리트사이의 부착력으로 인해 인장력이 콘크리트에서 철근으로 재분배되는 인장경화모델을 사용하여 모사하기도 하나 본 고에서는 콘크리트의 변형도 연화현상을 파괴에너지와 유효길이의 개념을 사용하여 표현하였다. 이렇게 개발된 9절점 가변형도 퇴화 쉘 요소를 이용하여 단일 노치를 가진 보의 실험을 모사하였으며 이때 나타나는 보의 후-정점하중 거동을 실험결과와 비교 분석하였다.

\* 정회원 · 한국원자력연구소 선임연구원 · 공학박사 · sjlee@kaeri.re.kr  
\*\* 학생회원 · 충남대학교 박사(학연)과정 · 공학석사  
\*\*\* 한국원자력연구소 책임기술원 · 공학박사

## 2. Reissner-Mindlin 가정

본 연구에서는 쉘의 횡단변형도 효과를 고려하기 위하여 Reissner-Mindlin (RM)가정<sup>(3)</sup>을 도입하였다. 도입된 가정을 정리하면 다음과 같다.

- (a) 중층(mid-surface)에 수직인 법선은 변형 후에도 직선을 유지한다. 그러나 변형 후 중층에 반드시 수직일 필요는 없다고 가정한다.
- (b) 중층에 수직인 법선방향 응력은 0이라고 가정한다.

위의 가정은 쉘과 판의 경우에 동일하게 사용되며 그림 1과 같이 도시할 수 있다.

RM가정을 바탕으로 개발된 쉘 유한요소는 전단변형의 효과를 고려하므로 전단변형을 고려하지 않는 쉘 요소에 비하여 유연하나 기하학적인 측면에서 강성과대현상을 초래할 수 있다.

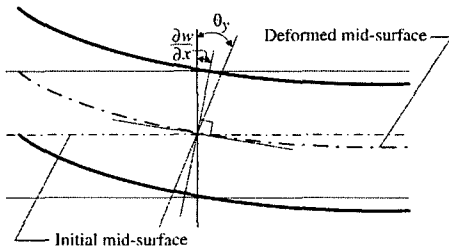


그림 1 Reissner-Mindlin 가정

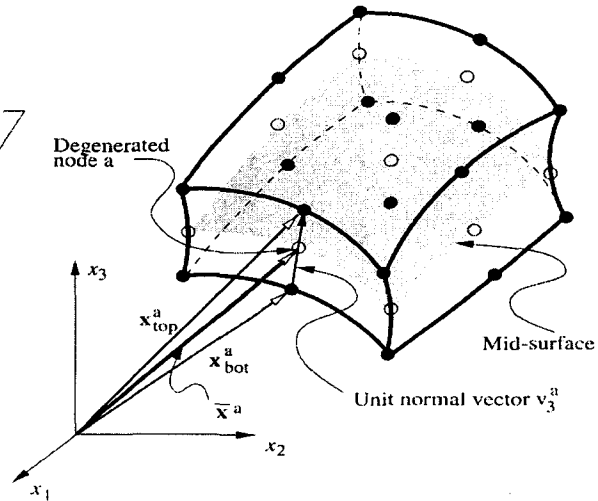


그림 2 쉘의 형상

## 3. 쉘요소의 형상

쉘 요소의 형태는 두 개의 위치벡터로 표현되어 질 수 있다. 그림 2에서 보는 바와 같이 이 두 개의 벡터는 고체 쉘요소가 퇴화 쉘요소로 퇴화하기 전의 상층면과 하층면을 나타내는 위치벡터이다.

두 위치벡터  $\mathbf{x}_{top}^a$ 와  $\mathbf{x}_{bot}^a$ 를 이용하면 쉘 요소의 형상은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[ \left( \frac{1+\xi_3}{2} \right) \mathbf{x}_{top}^a + \left( \frac{1-\xi_3}{2} \right) \mathbf{x}_{bot}^a \right] \quad (1)$$

위의 식을 정리하면 쉘의 형상은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[ \bar{\mathbf{x}}^a + \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{\mathbf{v}}_3^a \right] \quad (2)$$

여기서  $\bar{\mathbf{x}}^a$ 는 중층의 위치벡터를 나타내고  $\hat{\mathbf{v}}_3^a$ 는  $\mathbf{x}_{top}^a - \mathbf{x}_{bot}^a / |\mathbf{x}_{top}^a - \mathbf{x}_{bot}^a|$ 이다.

#### 4. 쉘요소의 변위장

변위장은 쉘의 자유도에 따라서 다르게 정의될 수 있다. 본 연구에서는 절점당 다섯 개의 자유도를 가지는 쉘요소에 대한 변위장에 대하여 기술하였다. 본 연구에 사용된 절점의 병진변위값은 전체좌표계  $x_i$ 에 준하고 회전변위의 경우는 절점좌표계  $v_i^a$ 에 준하는 것으로 정의한다. 따라서 변위장은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[ \mathbf{u}^a + \frac{\xi_3 h^a}{2} \bar{\mathbf{V}}^a \mathbf{a}^a \right] \quad (3)$$

여기서 변환행렬은  $\bar{\mathbf{V}}^a = [\hat{v}_1^a, \hat{v}_2^a]$ 이고 병진변위벡터는  $\mathbf{u}^a = [u_1^a, u_2^a, u_3^a]$  그리고 회전변위벡터는  $\mathbf{a}^a = [a_1, a_2]$ 이다.

#### 5. 쉘요소의 변형도

쉘은 곡면을 가지는 구조이므로 변형도를 국부좌표계에 준하여 나타내면 편리하다. 이때 변형도는 국부변위성분  $u'_i$ 을 사용하여 정의하게 된다. 쉘의 법선방향  $x'_3$ 에 대한 응력이 없다고 가정하면 국부변형도 벡터는 다섯 개의 국부변형도항을 가진다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{12} \\ \dots \\ \epsilon'_{23} \\ \epsilon'_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_{1,1} \\ u'_{2,2} \\ u'_{2,1} + u'_{1,2} \\ \dots \\ u'_{2,3} + u'_{3,2} \\ u'_{1,3} + u'_{3,1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $u'_1, u'_2, u'_3$ 는 국부좌표계  $x'_i$ 의 단위벡터와 관련한 변위성분이며 변위 그래디언트(gradient)  $u'_{i,j}$ 는  $\partial u'_i / \partial x'_j$ 이다. 가정된 변위장이 전체좌표계를 통하여 표현되기 때문에 변위 그래디언트는 먼저 전체 좌표계에 준하여 계산하는 것이 편리하다. 국부좌표계에 준하는 변위 그래디언트는 구해진 전체좌표계에 준하는 그래디언트를 이제 텐서변환을 사용하여 다음과 같이 구한다.

$$f_{ij} = \theta_{im} \theta_{jn} f_{mn} \quad (5)$$

여기서  $f_{ij} = \partial u_j / \partial x_i$ 와  $f'_{ij} = \partial u'_j / \partial x'_i$ 는 각각 전체좌표계에서의 변위 그래디언트와 국부좌표계에서의 변위 그래디언트를 나타내고  $\theta_{ij}$ 는  $x_i$ 축과  $x'_j$ 축이 이루는 방향코사인 값이다. 이렇게 유도한 변형도와 변위의 관계를 사용하여 개발된 표준 RM 퇴화 셀요소는 전술한 바와 같이 강성대현상을 일으킬 수 있으며, 또한 감차적분을 사용할 경우 영에너지 모드가 발생하기도 한다. 이러한 문제점들은 대체변형도를 도입함으로써 해결되는데 본 연구에 도입된 대체변형도<sup>(2)</sup>는 다음과 같다.

$$\bar{\epsilon}_{13} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi_1) Q_j(\xi_2) \epsilon_{13}^0, \quad \bar{\epsilon}_{23} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi_2) Q_j(\xi_1) \epsilon_{23}^0, \quad \bar{\epsilon}_{12} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi_1) Q_j(\xi_2) \epsilon_{12}^0 \quad (6)$$

여기서  $P_i(\xi) = 0.5(1 + (-1)^i \sqrt{3}\xi)$ ,  $Q_1(\xi) = 0.5\xi(\xi+1)$ ,  $Q_2(\xi) = 0.5(1+\xi^2)$ ,  $Q_3(\xi) = 0.5\xi(\xi-1)$ 는 보간함수이며  $\delta = 2(j-1) + i$ 는 가변형도를 형성하기 위하여 추출되는 변형도의 채취점의 위치를 나타낸다. 변형도  $\bar{\epsilon}_{11}$ ,  $\bar{\epsilon}_{22}$ 는 각각  $\bar{\epsilon}_{13}$ ,  $\bar{\epsilon}_{23}$ 과 같은 보간함수를 사용하여 구한다. 채취점에서 계산되는 변형도  $\epsilon_{ij}^0$ 는 식(6)의 관계를 이용하여 구한다. 채취된 변형도  $\epsilon_{ij}^0$ 의 위치는 그림 3에 도시하였다.

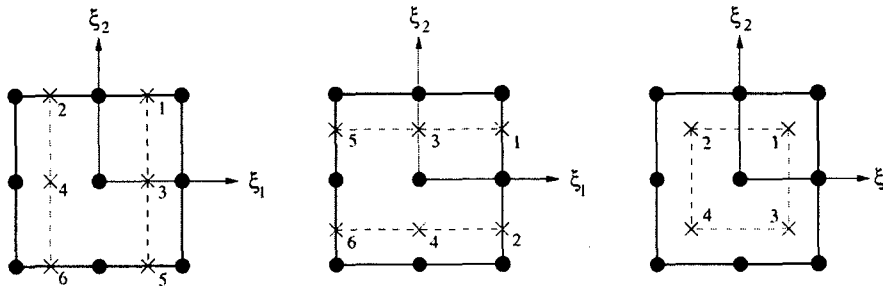


그림 3 표본점의 위치: (좌)  $\bar{\epsilon}_{11}$ ,  $\bar{\epsilon}_{13}$ , (중앙)  $\bar{\epsilon}_{22}$ ,  $\bar{\epsilon}_{23}$ , (우)  $\bar{\epsilon}_{12}$

## 6. 콘크리트의 구성방정식

본 연구에서는 콘크리트의 비탄성 거동을 표현하기 위하여 Maekawa등<sup>(1)</sup>에 의해서 제시된 미시적인 재료모델을 도입하였다. 콘크리트의 균열발생은 콘크리트가 압축-인장의 상태에 있을 경우 Niwa<sup>(5)</sup>가 제안한 응력포락선을 이용하여 균열을 측정하였고 인장-인장의 상태에 있을 경우에는 Aoygi-Yamada<sup>(6)</sup>가 제안한 응력포락선을 사용하였다. 본 연구에서는 콘크리트의 응력이 균열 기준값에 도달하고 주변형도 값 또한 한계변형도값에 이르면 균열이 발생한 것으로 간주하였다. 도입된 재료모델은 콘크리트 자체의 연화모델은 포함하고 있지 않아 본 연구에서는 다음과 같은 콘크리트의 연화모델을 도입하였다.

$$\sigma = f_t e^{-(\epsilon - \epsilon_c)/\alpha} \quad (7)$$

여기서 연화매개변수  $\alpha$ 는 파괴에너지  $G_f$  와 유효길이  $\ell$ 를 바탕으로 다음과 같이 정의하였다.

$$\alpha = (G_f - \frac{1}{2} f_t \varepsilon_{cr} \ell) / f_t \ell \quad (\alpha > 0) \quad (8)$$

식(8)에서 쉘 요소에 대한 유효길이  $\ell$ 은 다음과 같이 계산하였다.

$$\ell = \sqrt{A_e} = \left( \sum_{s_1=1}^3 \sum_{s_2=1}^3 \det(J) w_{s_1} w_{s_2} \right) \quad (9)$$

여기서  $J$ 는 Jacobian 행렬을 나타내고  $w_{s_1}, w_{s_2}$ 는 Gauss적분점에서의 가중치를 나타낸다. 그리고 콘크리트의 파괴에너지  $G_f$ 는 콘크리트 구조물에 사용된 골재의 크기나 입도에 따라 달라질 수 있으며 이는 참고문헌<sup>(7)</sup>에 있다.

## 7. 해석 알고리즘

콘크리트 구조물의 후-정점하중 해석을 실시하기 위하여 호장법을 도입하였다. 호장법은 구조물의 시스템이  $n$ 개의 미지수를 가지는 연립방정식으로 표현될 경우 하중세기인자  $\lambda$ 를 포함하여  $n+1$ 개의 미지수를 이용하여 비선형 방정식을 표현하게 된다.  $n+1$ 개의 미지수를 가지는 평형방정식<sup>(2)</sup>은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f} = 0 \quad (10)$$

여기서  $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ 는 변위  $\mathbf{u}$ 의 비선형 함수로 나타나는 내력벡터를 나타내고  $\mathbf{f}$ 는 기준하중벡터이다. 식(10)은  $n+1$ 개의 미지수를 가지는  $n$ 개의 연립방정식이므로 구속조건을 추가적으로 도입하면 식(10)의 확대식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} G(\mathbf{u}, \lambda) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) \end{cases} = 0 \quad (11)$$

본 연구에서는 추가되는 구속방정식  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda)$ 를 다음과 같은 형태로 나타내었다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \beta_k \Delta u_k^2 + \beta_{n+1} \alpha^2 \Delta \lambda^2 &= c^2 \\ \Delta u_k &= u_k^m - u_k^{m-1}; \Delta \lambda_k = \lambda_k^m - \lambda_k^{m-1} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\alpha$ 는 하중계수를 나타내고  $c$ 는 지정된 해석단계를 나타낸다.

식(11)를  $\mathbf{u}$ 와  $\lambda$ 를 이용하여 이전단계에 대하여 선형화하면 평형방정식과 구속방정식은 다음과 같다.

$$2 \sum_{i=1}^n \beta_k (\mathbf{u}^{i,m} - \mathbf{u}^{m-1}) \Delta \mathbf{u}^{i,m} + 2\beta_{n+1} \lambda^2 (\lambda^{i,m} - \lambda^{m-1}) \Delta \lambda^{i,m} = c^2 - \sum_k \beta_k (\mathbf{u}_k^{i,m} - \mathbf{u}_k^{m-1})^2 - \beta_{n+1} \alpha^2 (\alpha^{i,m} - \alpha^{m-1})^2 \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{r}^{i,m}$ 은 불평형력을 나타내고,  $\partial \mathbf{p}^{i,m} [= \partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^{i,m})]$ 는 접선강성행렬을 나타내며 윗첨자  $(i, m)$ 은  $m$ 번째의 해석단계에서  $i$ 번째의 반복계산일때의 값을 나타낸다.

구속방정식으로 확대된 선형화된 비선형방정식은 행렬의 형식으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \partial \mathbf{p}^{i,m} & f \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{i,m} \\ \Delta \lambda^{i,m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^{i,m} \\ \mathbf{r}^{i,m} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^T &= \{2\beta_1(u_1^{i,m} - u_1^{m-1}), \dots, 2\beta_n(u_n^{i,m} - u_n^{m-1})\}_{(n \times 1)} \\ \mathbf{C}_2 &= 2\beta_{n+1} \alpha^2 (\alpha^{i,m} - \alpha^{m-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $\partial \mathbf{p}^{i,m}$ 는 변위벡터  $\mathbf{u}^{i,m}$ 에 대한 접선강성행렬을 나타낸다. 이때 변위  $\mathbf{u}^m$ 은 하중단계  $m$ 에서 수렴된 값을 뜻한다. 변위와 하중파라메타는 다음과 같은 증분의 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i+1,m} &= \mathbf{u}^{i,m} + \Delta \mathbf{u}^{i,m} \\ \lambda^{i+1,m} &= \lambda^{i,m} + \Delta \lambda^{i,m} \end{aligned} \quad (16)$$

구속방정식의 매개변수  $\beta$ 를 조절함으로써 해석 알고리즘의 종류를 선택할 수 있으며 본 연구에서는 호장법을 이용하였다. 이때  $\beta_k$ 는 0이 아닌 수를 택하였다.

## 8. 단일 노치를 가진 콘크리트 보의 유한요소해석

단일 노치를 가진 보의 실험은 Arrea 와 Ingraffea<sup>(8)</sup>에 의해 처음 시도되었으며 이후 유사한 실험들이 많이 실시되었다. 이러한 실험데이터는 콘크리트 구조물의 후-정점하중 거동을 모사하고 균열의 진전에 대한 연구를 수행하기 위하여 유용하게 사용되어 왔다. 본 연구에서는 Schlangen<sup>(9)</sup>에 의해서 정리된 실험데이터를 유한요소 해석과 비교하였다. 수치해석에 이용된 보는 그림 4에 도시된 바와 같이 크기가  $5 \times 20$  ( $mm^2$ )인 노치를 포함하고 있으며 보의 전체크기는  $400 \times 100 \times 100$  ( $mm^3$ )이다. 보에 가해지는 전체하중  $F$ 는 중앙에 가까운 위치에  $F_1 = 10/11F$  그리고 보의 왼쪽끝 지점에  $F_2 = 1/11F$  로 나누어 가해졌다. 노치 왼쪽에 위치한 지지점은 수직방향으로만 고정되었으며 보의 오른쪽부분에 지지된 지점은 수평과 수직방향으로 모두 고정되어 있다. 보에 사용된 콘크리트의 재료특성치는 압축강도가

$f_c = 36.5 N/mm^2$ , 인장강도는  $f_t = 2.8 N/mm^2$ , 탄성계수는  $E = 35000 N/mm^2$ , 프와송비는  $\nu = 0.15$  그리고 파괴에너지는  $G_f = 0.07 N mm/mm^2$ 이다. 유한요소해석에는 131개의 9절점 쉘요소를 이용하였으며 이때 평면 응력상태를 모사하기 위하여 모든 절점의 병진변위  $u, v$ 를 제외한 자유도는 고정시켰다. 유한요소 해석시 호장법을 사용하였으며 강성행렬을 형성하기 위하여 정상적분을 사용하였다. 해석을 통하여 후-정점하중 이후의 거동이 실험데이터와는 다소 상이한 결과를 나타내었다. 실험에 비해 수치해석으로 구해진 해는 보가 다소 유연하게 표현되었으며 해석의 보의 정점하중이 실험값의 약 84%로 나타났다. 그러나 보의 하중-변위 경로의 형태는 전체적으로 실험결과와 유사하였다. 참고로 단일 노치 보의 실험결과는 분산된 데이터로 주어지나 본 연구의 수치해석결과와 비교된 실험데이터는 문헌상의 값을 그대로 사용하였다.

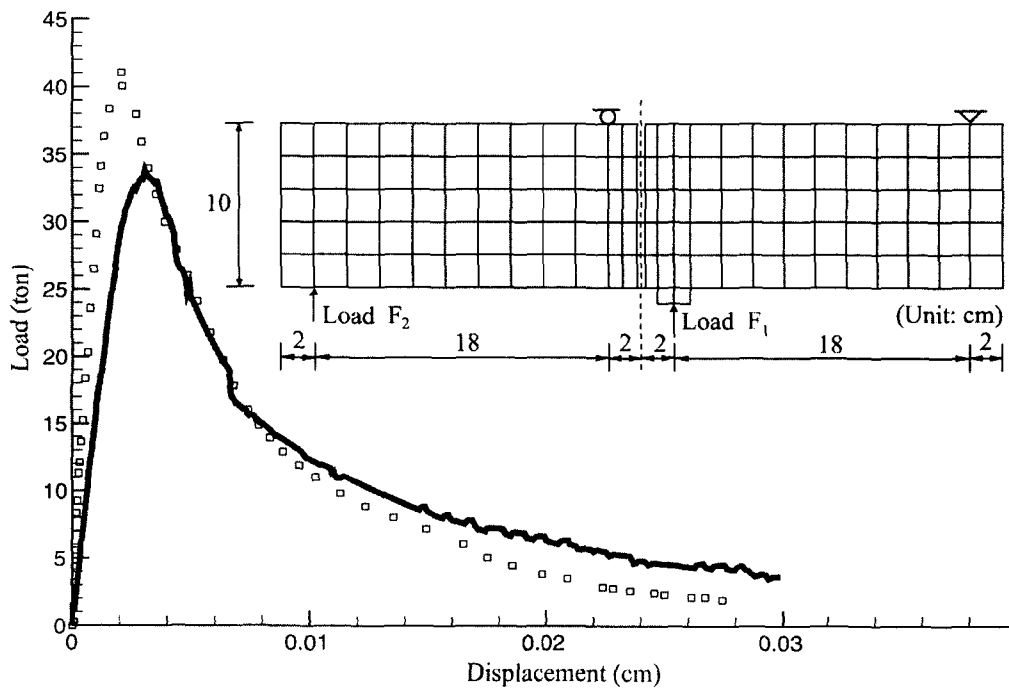


그림 4 단일노치를 가진 콘크리트 보의 하중-변위 곡선

## 9. 결론

미시적 재료모델과 가변형도법을 바탕으로 개발된 9절점 퇴화 쉘 요소를 이용하여 콘크리트 구조물의 후-정점하중 해석을 실시하고 그 결과를 기술하였다. 해석결과로부터 개발된 쉘 요소는 콘크리트 구조물의 후-정점하중 거동을 비교적 실험과 유사한 형태로 파악하였다. 그러나 본 연구를 통하여 콘크리트 구조물의 거동을 단일의 유한요소나 통합된 표준 해석 알고리즘으로 해결하기는 매우 어렵다고 판단되었으며 개발된 요소에 대한 요소망 의존도에 대한 연구가 필요한 것으로 판단된다. 특히 콘크리트 및 철근 콘크리트 구조물의 해석에 적합한 해석알고리즘의 개발이 반드시 필요한 것으로 판단된다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술부의 원자력 중장기연구개발 사업의 일환으로 수행되었음.

## 참 고 문 헌

1. 岡村甫, 前川宏一, "鐵筋콘크리트의非線形解析と構成則", 技報堂出版, 1991
2. Lee, S.J. and Kanok-Nuchulchai, W., "A nine-node assumed strain finite element for large-deformation analysis of laminated shells", Int. J. Numer. Method. Eng. Vol. 42, 1998, pp.777~798
3. Reissner, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate", ASME J. Appl. Mech. Vol. 12, pp.69~76.
4. Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Numer. Method. Eng. Vol. 2, 1970, pp.419~451.
5. 二羽淳一郎, "鐵筋콘크리트 板要素の力學的性狀", 土木工學科, 東京大學修士論文, 1980
6. Aoyagi, Y. and Yamada, K., "Strength and deformation characteristics of RC shell elements subjected to in-plane forces", Concrete library international JSCE, No.4, pp.129-160, 1984
7. CEB-FIP, Model code 1990, Bulletin d'information, 1999
8. Arrea, M. and Ingraffea, A.R., "Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete", Report 81-13, Cornell University, New York, USA, 1982
9. Schlagen, E., "Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete", Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands, 1993